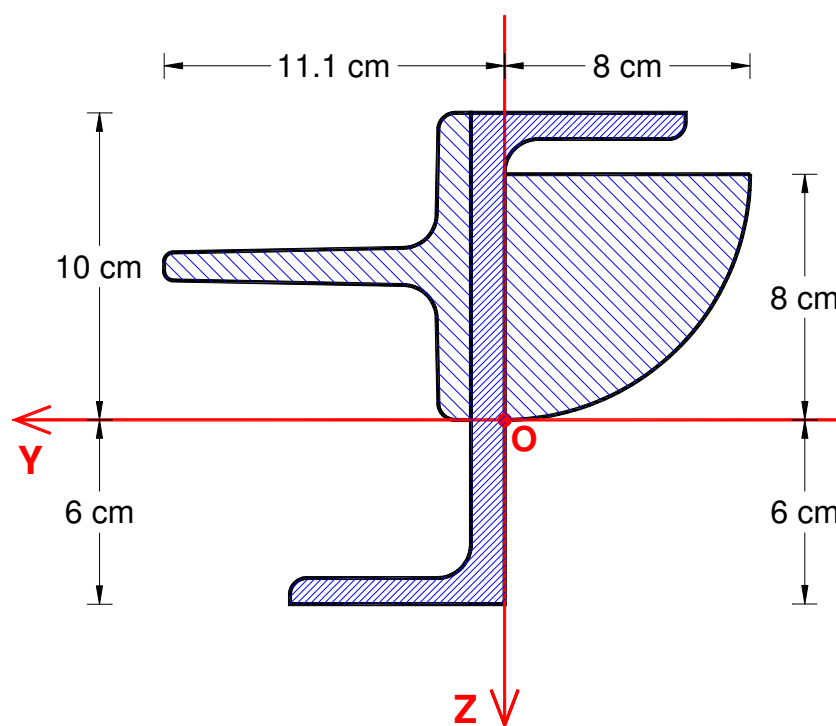


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA



GEOMETRIA DE MASSAS

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO DO EXAME DE ÉPOCA NORMAL
ANO LETIVO 2024 / 25

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

Considere a secção plana representada na Figura constituída por um perfil Z, um perfil T e um quarto de círculo com um raio de 8 cm.

- Determine as coordenadas do centro de gravidade relativamente ao sistema de eixos (y,z) e represente-o na Figura, cotando o seu posicionamento.
- Determine os momentos de inércia I_y e I_z e o produto de inércia I_{yz} .
- Posicione na figura o eixo que passa em O e em relação ao qual o momento de inércia é máximo. Determine o valor desse momento de inércia máximo.

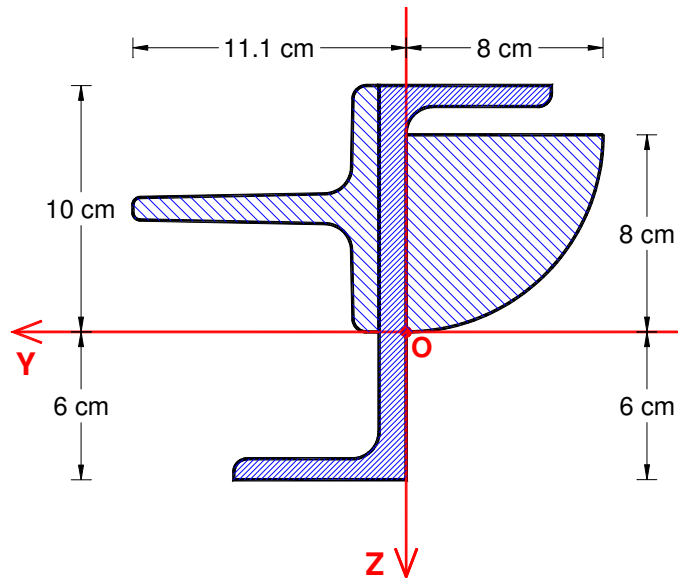
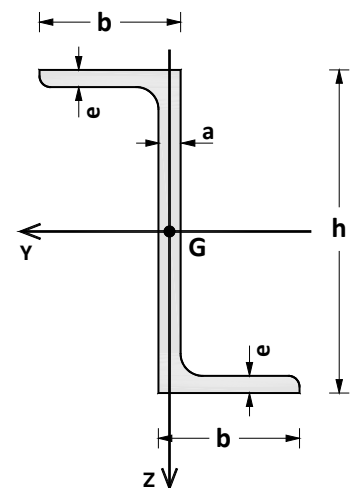
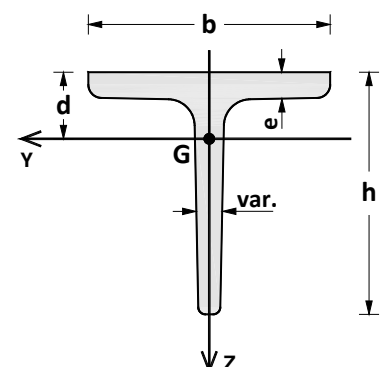


Figura 4

Perfil Z	Área (cm ²)	h (mm)	b (mm)	e (mm)	a (mm)	I_y (cm ⁴)	I_z (cm ⁴)	I_{yz} (cm ⁴)
	27,50	160	70	8,5	11	1060	204	-349

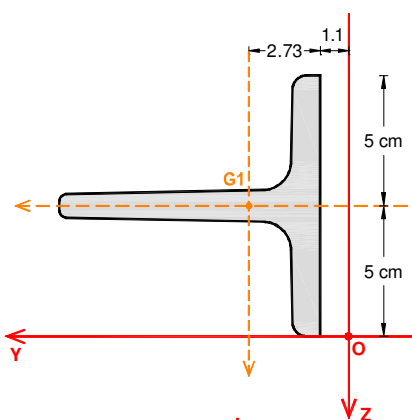
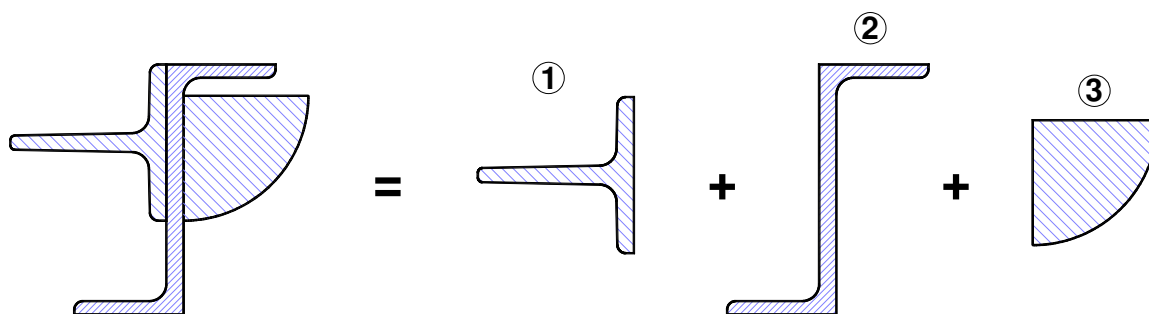


Perfil T	Área (cm ²)	h (mm)	b (mm)	e (mm)	d (cm)	I_y (cm ⁴)	I_z (cm ⁴)	I_{yz} (cm ⁴)
	20,90	100	100	11	2,73	179,0	88,3	0

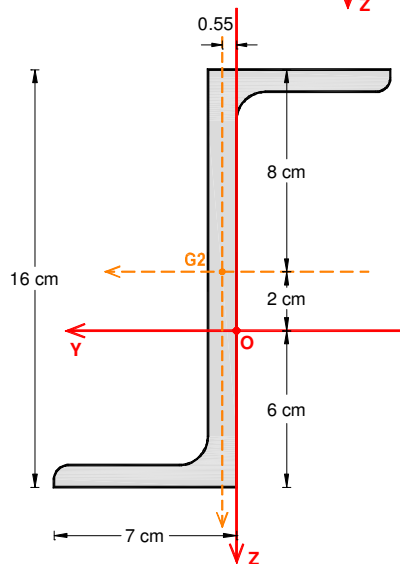


RESOLUÇÃO

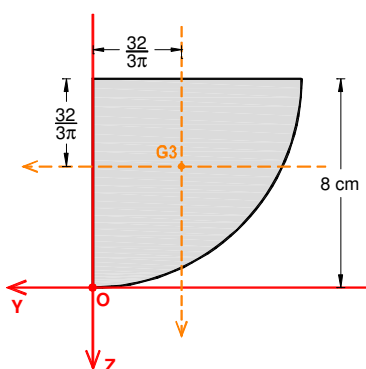
Alínea a)



$$\text{Secção 1: } \begin{cases} A_1 = 20,90 \text{ cm}^2 \\ Y_{G1} = 1,1 + 2,73 = 3,83 \text{ cm} \\ Z_{G1} = -5 \text{ cm} \end{cases}$$



$$\text{Secção 2: } \begin{cases} A_2 = 27,50 \text{ cm}^2 \\ Y_{G2} = 0,55 \text{ cm} \\ Z_{G2} = -2 \text{ cm} \end{cases}$$

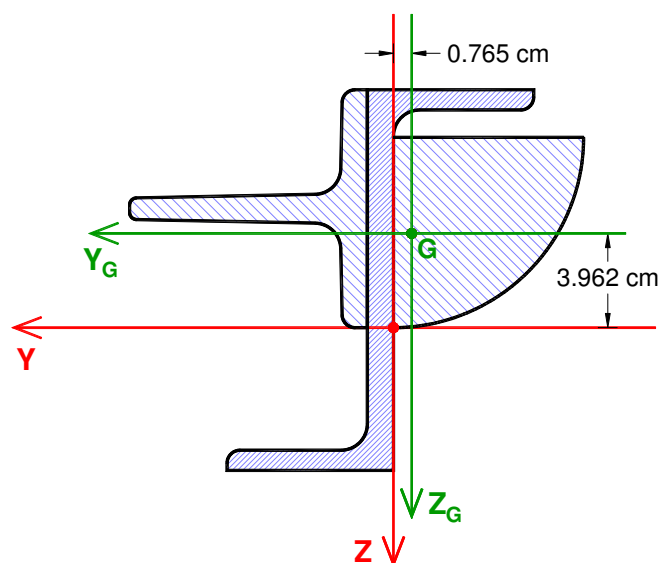


$$\text{Secção 3: } \begin{cases} A_3 = \frac{\pi \times 8^2}{4} = 16\pi \text{ cm}^2 \\ Y_{G3} = -\frac{4 \times 8}{3\pi} = -\frac{32}{3\pi} = -3,395 \text{ cm} \\ Z_{G3} = -8 + \frac{32}{3\pi} = -4,605 \text{ cm} \end{cases}$$

Secção	A_i (cm ²)	Y_{Gi} (cm)	Z_{Gi} (cm)	$A_i \times Y_{Gi}$	$A_i \times Z_{Gi}$
1	20,90	3,83	- 5	80,047	- 104,500
2	27,50	0,55	- 2	15,125	- 55,000
3	16π	- 3,395	- 4,605	- 170,667	- 231,457
1+2+3	98,665			-75,495	-390,957

$$Y_G = \frac{\sum A_i \cdot Y_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{-75,495}{98,665} = -0,765 \text{ cm}$$

$$Z_G = \frac{\sum A_i \cdot Z_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{-390,957}{98,665} = -3,962 \text{ cm}$$



Alínea b)

Determinação dos momentos de inércia I_Y e I_Z

$$\text{Secção 1: } \begin{cases} I_Y^{(1)} = 88,3 + 20,90 \times 5^2 = 610,8 \text{ cm}^4 \\ I_Z^{(1)} = 179,0 + 20,90 \times 3,83^2 = 485,580 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\text{Secção 2: } \begin{cases} I_Y^{(2)} = 1060 + 27,50 \times 2^2 = 1170 \text{ cm}^4 \\ I_Z^{(2)} = 204 + 27,50 \times 0,55^2 = 212,319 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\text{Secção 3: } \begin{cases} I_Y^{(3)} = 8^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + 16\pi \times \left(-8 + \frac{32}{3\pi} \right)^2 = 1290,572 \text{ cm}^4 \\ I_Z^{(3)} = \frac{\pi \times 8^4}{16} = 804,248 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Teorema de Steiner
(Teorema de transferência
de momentos de inércia)

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + A \cdot d^2$$

$$\begin{cases} I_Y = I_{Y_G} + A \cdot Z_G^2 \\ I_Z = I_{Z_G} + A \cdot Y_G^2 \end{cases}$$

- **Momentos de Inércia**

$$I_Y = I_Y^{(1)} + I_Y^{(2)} + I_Y^{(3)} = 610,8 + 1170 + 1290,572 = 3071,372 \text{ cm}^4$$

$$I_Z = I_Z^{(1)} + I_Z^{(2)} + I_Z^{(3)} = 485,580 + 212,319 + 804,248 = 1502,147 \text{ cm}^4$$

Determinação do produto de inércia I_{YZ}

Teorema da transferência de produto de inércia

$$I_{YZ} = I_{Y_G Z_G} + A \cdot Y_G \cdot Z_G$$

- **Secção 1**

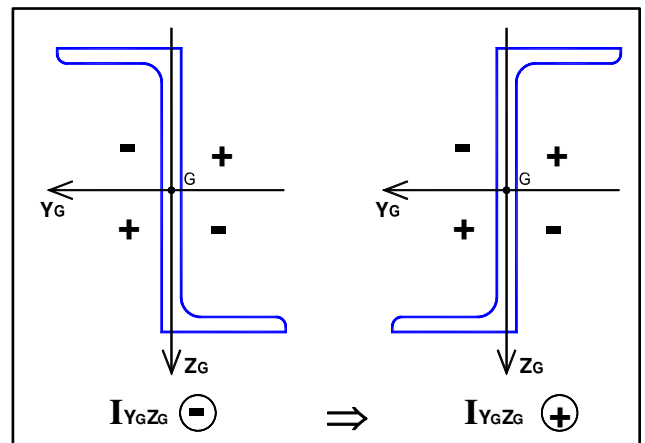
$$I_{YZ}^{(1)} = I_{Y_{G1} Z_{G1}}^{(1)} + A_1 \cdot Y_{G1} \cdot Z_{G1}$$

$$I_{YZ}^{(1)} = 0 + 20,90 \times 3,83 \times (-5) = -400,235 \text{ cm}^4$$

- **Secção 2**

$$I_{YZ}^{(2)} = I_{Y_{G2} Z_{G2}}^{(2)} + A_2 \cdot Y_{G2} \cdot Z_{G2}$$

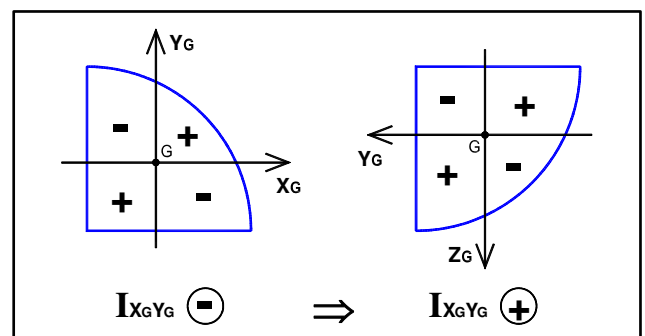
$$I_{YZ}^{(2)} = 349 + 27,50 \times 0,55 \times (-2) = 318,750 \text{ cm}^4$$



- **Secção 3**

$$I_{YZ}^{(3)} = I_{Y_{G3} Z_{G3}}^{(3)} + A_3 \cdot Y_{G3} \cdot Z_{G3}$$

$$I_{XY}^{(3)} = 8^4 \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8} \right) + 16\pi \times \left(-8 + \frac{32}{3\pi} \right) \times \left(-\frac{32}{3\pi} \right) = 853,333 \text{ cm}^4$$



- **Produto de Inércia**

$$I_{YZ} = I_{YZ}^{(1)} + I_{YZ}^{(2)} + I_{YZ}^{(3)} = -400,235 + 318,750 + 853,333 = 771,848 \text{ cm}^4$$

Alínea c)

Momento de inércia máximo

Eixos Principais de Inércia (EPI) a passar em **O**

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(- \frac{2 I_{YZ}}{I_Y - I_Z} \right) \pm 90^\circ$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(- \frac{2 \times 771,848}{1502,147 - 3071,372} \right) \pm 90^\circ = -22,27^\circ \pm 90^\circ$$

Eixo em relação ao qual o momento de inércia é máximo $\Rightarrow$ **eixo 1**

Como $I_Y > I_Z \Rightarrow \begin{cases} \text{eixo 1 mais próximo do eixo Y} \\ \text{eixo 2 mais próximo do eixo Z} \end{cases}$

Momento Principal de Inércia máximo $\Rightarrow I_{\text{máx}} = I_1$

$$I_{\text{máx}} = I_1 = \frac{I_Y + I_Z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_Y - I_Z)^2 + 4 I_{YZ}^2}$$

$$I_{\text{máx}} = I_1 = \frac{371,372 + 1502,147}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(371,372 - 1502,147)^2 + 4 \times 771,848^2}$$

$$I_{\text{máx}} = I_1 = 3387,38 \text{ cm}^4$$

