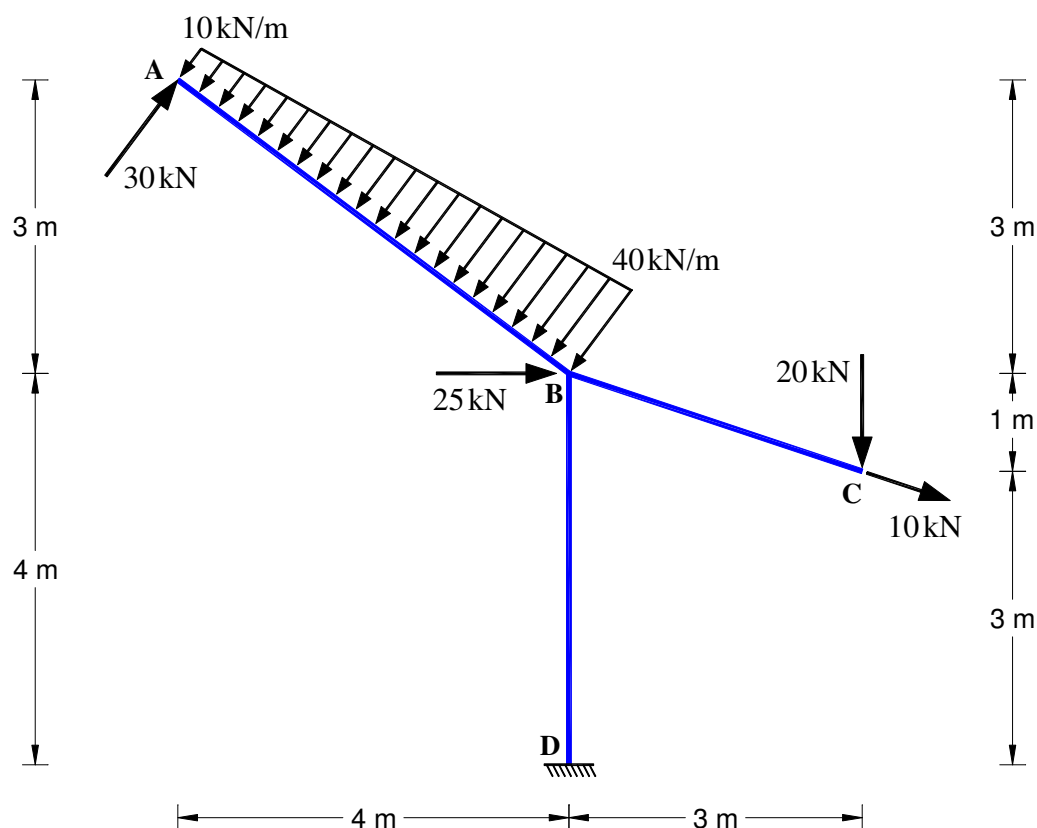


ESTÁTICA



DIAGRAMAS

ESFORÇO AXIAL - ESFORÇO TRANSVERSO - MOMENTO FLETOR

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO DO EXAME DA ÉPOCA DE RECURSO
ANO LETIVO 2024-25

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

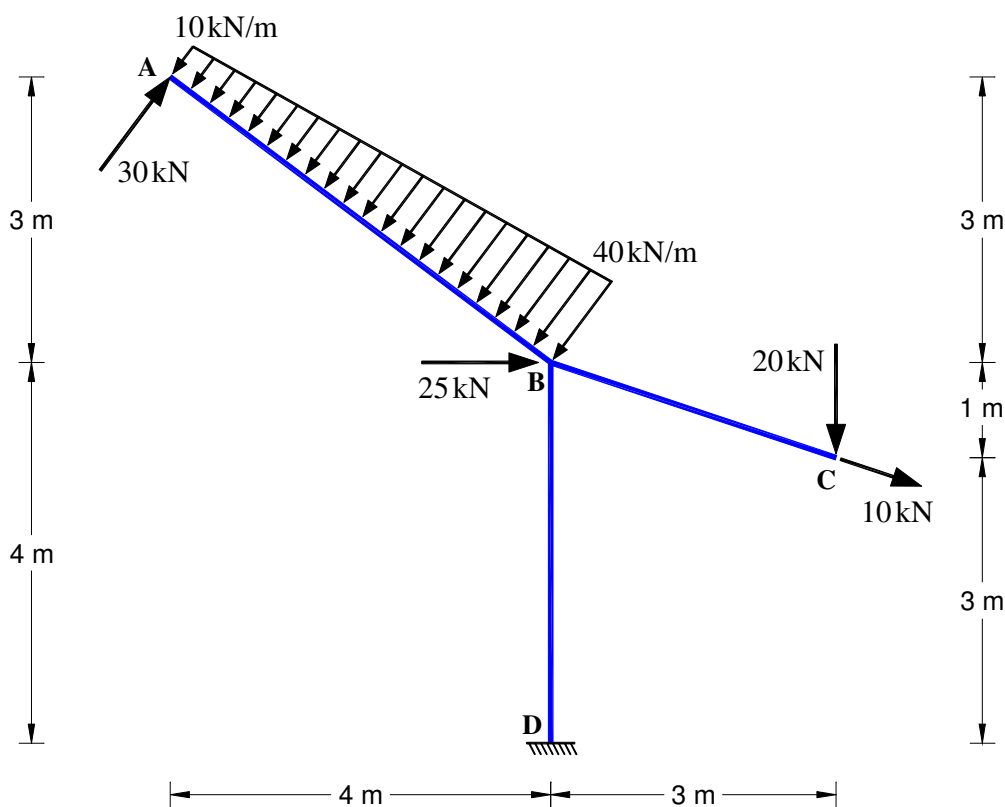
Considere a estrutura representada na Figura.

Sem calcular as reações, determine as expressões analíticas dos esforços **N**, **V** e **M** e caracterize os seus pontos notáveis, indicando os valores nas extremidades de cada tramo, valores nulos, máximos e mínimos e as respetivas posições.

Trace os diagramas de esforços **N**, **V** e **M**, indicando se são retas ou curvas e assinalando os pontos notáveis.

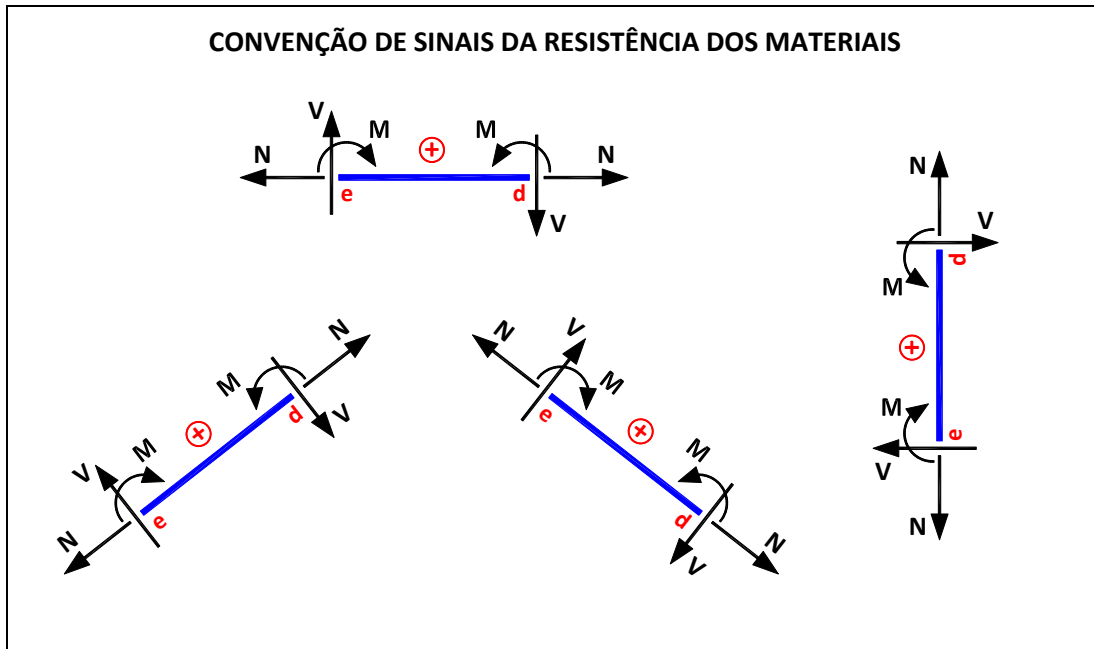
Observações:

- A força de 30 kN aplicada em **A** é perpendicular à barra **AB**.
- A força de 25 kN aplicada em **B** é horizontal.
- A força de 20 kN aplicada em **C** é vertical.
- A força de 10 kN aplicada em **C** tem a direção da barra **BC**.
- A carga distribuída trapezoidal é perpendicular à barra **AB**.



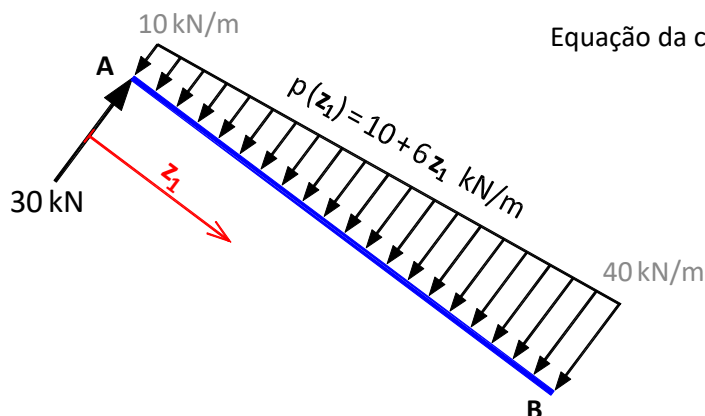
Figura

RESOLUÇÃO



• **Tramo AB**

Comprimento da barra **AB** = 5 m



Equação da carga trapezoidal: $p(z_1) = 10 + 6z_1$ kN/m

$$V(z) = - \int p(z) dz$$

$$M(z) = \int V(z) dz$$

$$N(z_1) = 0$$

$$V(z_1) = 30 - \int P(z_1) dz_1 = 30 - \int (10 + 6z_1) dz_1 = 30 - 10z_1 - 3z_1^2 \quad (\text{curva do 2º grau})$$

Concavidade do diagrama de esforço transversor: $\frac{d^2V}{dz_1^2} < 0 \Rightarrow$ concavidade $\cap$

Secção onde o esforço transversor é nulo: $V = 0 \Rightarrow 30 - 10z_1 - 3z_1^2 = 0 \Rightarrow z_1 = 1,908$ m

$$M(z_1) = \int V(z_1) dz_1 = \int (30 - 10z_1 - 3z_1^2) dz_1 = -z_1^3 - 5z_1^2 + 30z_1 \quad (\text{curva do 3º grau})$$

Secção onde o momento é máximo:

$$V(z_1)=0 \Rightarrow M(z_1) = M_{\text{máx}} \Rightarrow M_{\text{máx}} = M_{(z_1 = 1,908\text{m})} = -100 \text{ kNm}$$

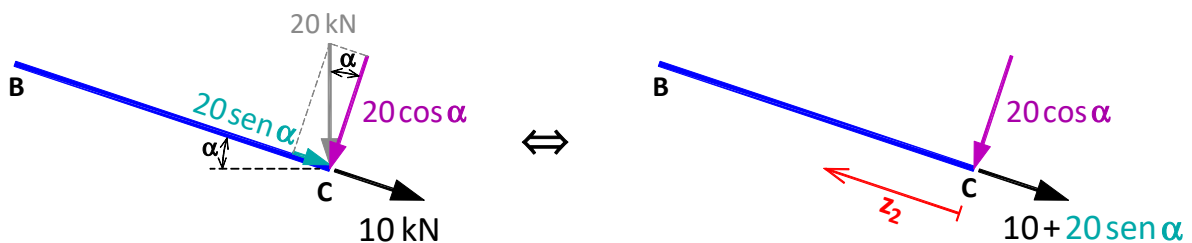
$$\text{Secção onde o momento é nulo: } M=0 \Rightarrow -z_1^3 - 5z_1^2 + 30z_1 = 0 \Rightarrow z_1 = 3,521 \text{ m}$$

$$\text{Concavidade do diagrama de Momentos: } \frac{d^2M}{dz_1^2} < 0 \Rightarrow \text{concavidade } \cup$$

Tramo AB	$\begin{cases} N(z_1)=0 \\ V(z_1)=30-10z_1-3z_1^2 \\ M(z_1)=-z_1^3-5z_1^2+30z_1 \end{cases}$	A (z₁=0)	$\begin{cases} N_A=0 \\ V_A=30 \text{ kN} \\ M_A=0 \end{cases}$	B (z₁=5m)	$\begin{cases} N_B=0 \\ V_B=-95 \text{ kN} \\ M_B=-100 \text{ kNm} \end{cases}$
-----------------	--	----------------------------	---	-----------------------------	---

• **Tramo BD**

Comprimento da barra **BC** = $\sqrt{10}$ m



$$\alpha = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18,435^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0,9487 \\ \sin \alpha = 0,3162 \end{cases}$$

$$N(z_2) = 10 + 20 \sin \alpha = 16,325 \text{ kN} \quad (\text{reta de nível})$$

$$V(z_2) = 20 \cos \alpha = 18,974 \text{ kN} \quad (\text{reta de nível})$$

$$M(z_2) = -20 \cos \alpha \times z_2 = -18,974 z_2 \text{ kNm} \quad (\text{reta})$$

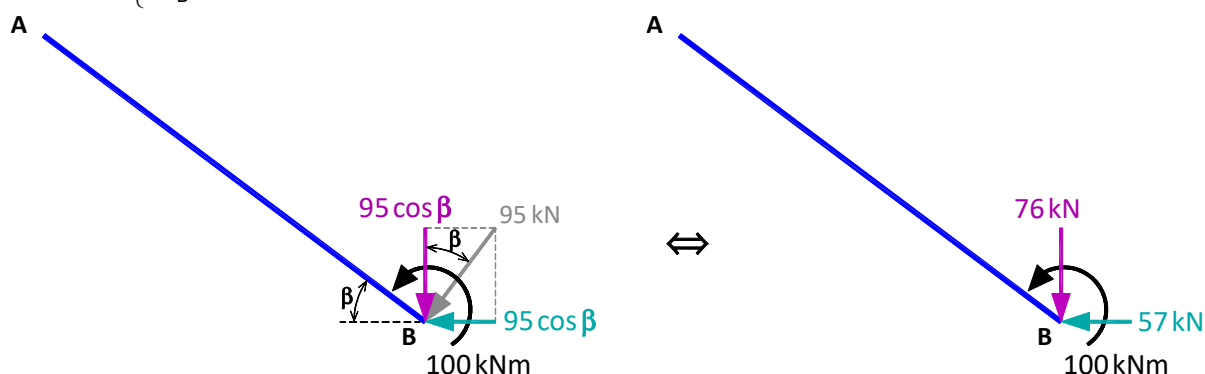
Tramo BC	$\begin{cases} N(z_2)=16,325 \\ V(z_2)=18,974 \\ M(z_2)=-18,974 z_2 \end{cases}$	C (z₂=0)	$\begin{cases} N_C=16,325 \text{ kN} \\ V_C=18,974 \text{ kN} \\ M_C=0 \end{cases}$	B (z₂=$\sqrt{10}$ m)	$\begin{cases} N_B=16,325 \text{ kN} \\ V_B=18,974 \text{ kN} \\ M_B=-60 \text{ kNm} \end{cases}$
-----------------	--	----------------------------	---	---	---

• **Tramo BD**

Comprimento da barra **BD** = 4 m

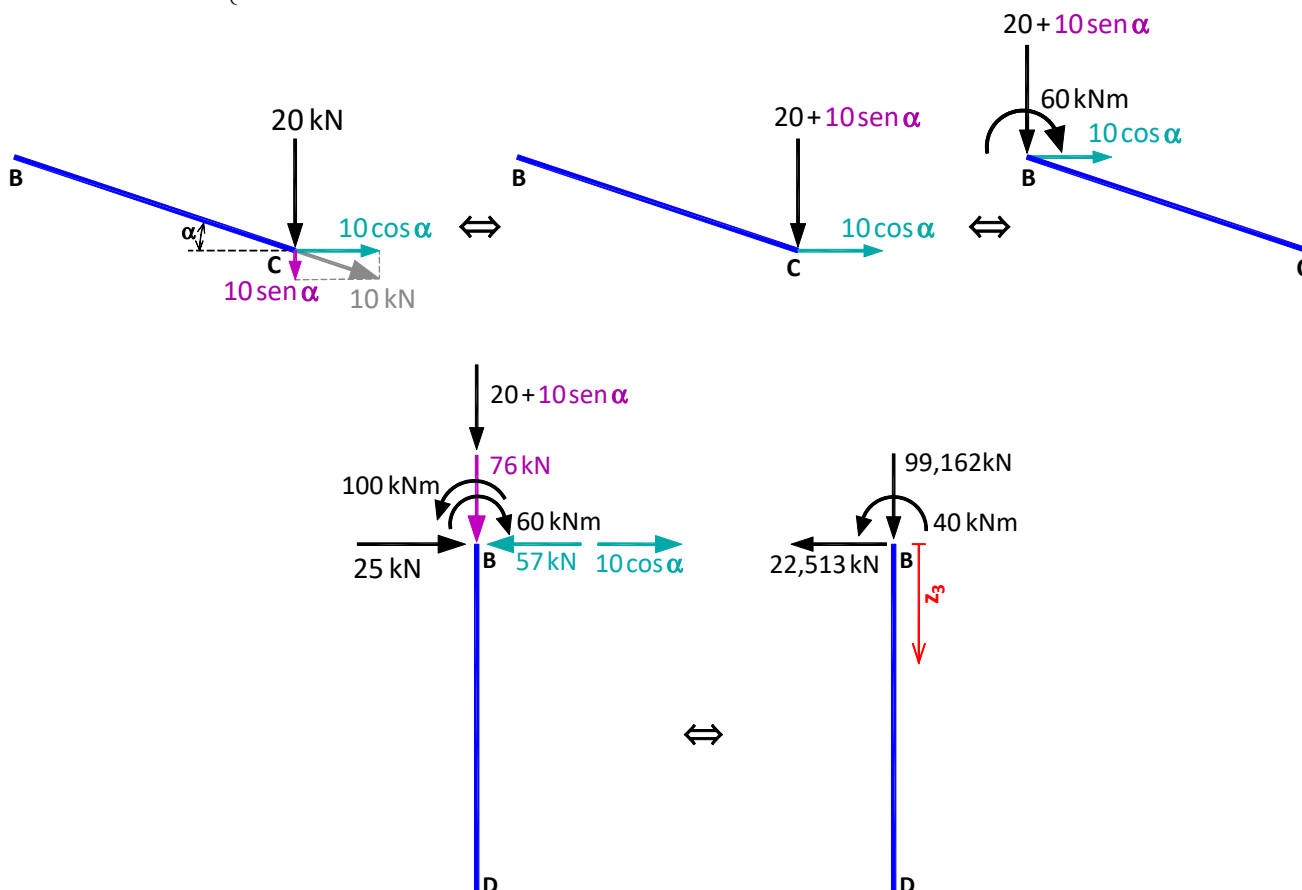
Resultante de todas as ações à esquerda da secção **B** $\Rightarrow$ Esforços na secção **B** da barra **AB**

$$\mathbf{B} \text{ (barra AB)} \begin{cases} N_B = 0 \\ V_B = -95 \text{ kN} \\ M_B = -100 \text{ kNm} \end{cases} \quad \beta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36,870^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0,8 \\ \sin \alpha = 0,6 \end{cases}$$



Resultante de todas as ações à direita da secção (atuantes na barra **BC**)

$$\mathbf{B} \text{ (barra BC)} \begin{cases} N_B = 16,325 \text{ kN} \\ V_B = 18,974 \text{ kN} \\ M_B = -60 \text{ kNm} \end{cases} \quad \alpha = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18,435^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0,9487 \\ \sin \alpha = 0,3162 \end{cases}$$



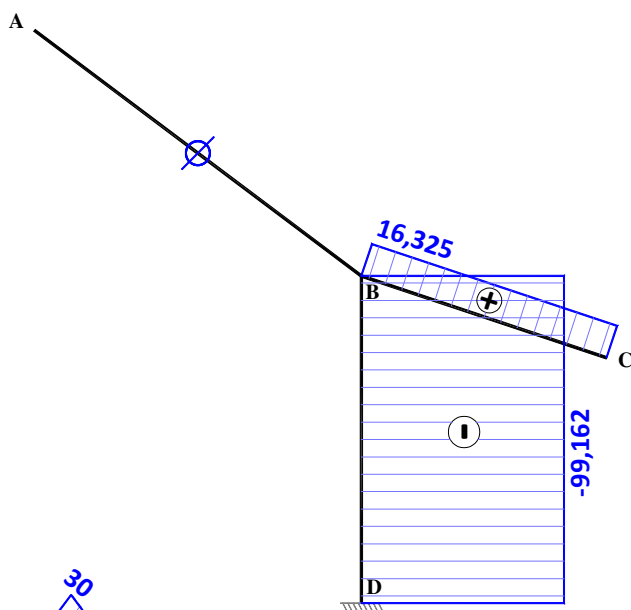
$$N(z_3) = -99,162 \text{ kN} \quad (\text{reta de nível})$$

$$V(z_3) = -22,513 \text{ kN} \quad (\text{reta de nível})$$

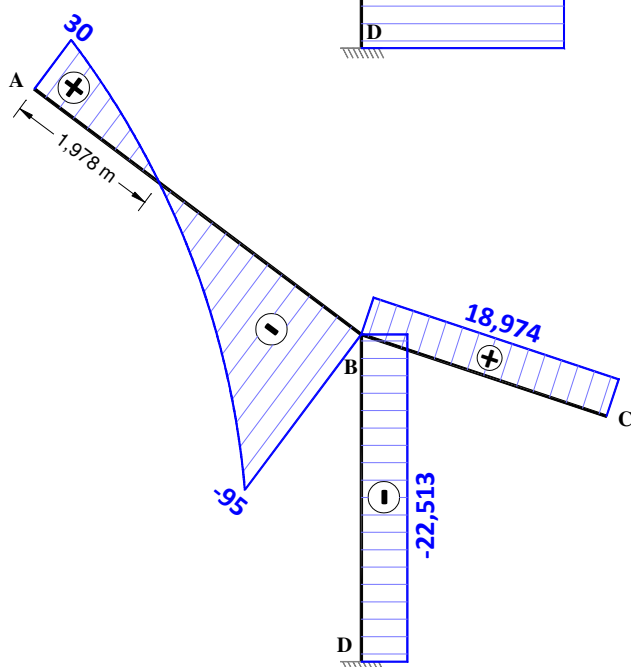
$$M(z_3) = 40 + 22,513 \times z_3 \text{ kNm} \quad (\text{reta})$$

$$\begin{array}{l} \text{Tramo BD} \left\{ \begin{array}{l} N(z_3) = -99,162 \\ V(z_3) = -22,513 \\ M(z_3) = 40 + 22,513 z_3 \end{array} \right. \quad B(z_3 = 0) \left\{ \begin{array}{l} N_B = -99,162 \text{ kN} \\ V_B = -22,513 \text{ kN} \\ M_B = 40 \text{ kNm} \end{array} \right. \quad D(z_3 = 4 \text{ m}) \left\{ \begin{array}{l} N_D = -99,162 \text{ kN} \\ V_D = -22,513 \text{ kN} \\ M_D = 130,053 \text{ kNm} \end{array} \right. \end{array}$$

N [kN]



V [kN]



M [kNm]

