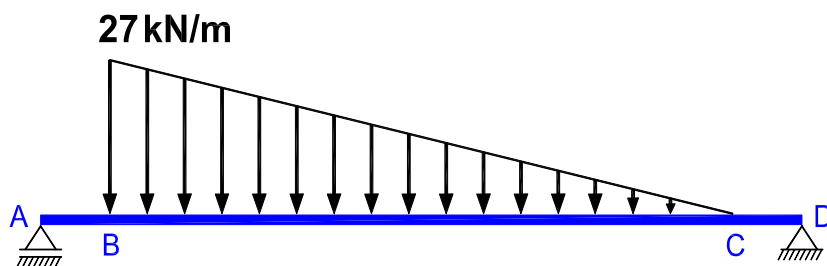


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA

DIAGRAMAS

ESFORÇO AXIAL - ESFORÇO TRANSVERSO - MOMENTO FLECTOR



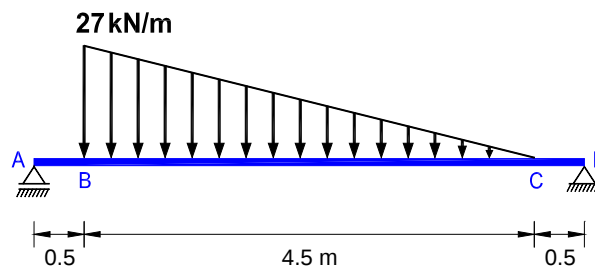
EXERCÍCIO EXEMPLIFICATIVO APRESENTADO NAS AULAS TEÓRICAS

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

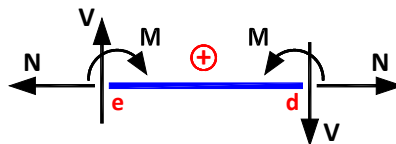
Determine as expressões analíticas do esforço axial (**N**), esforço transversal (**V**) e momento flector (**M**) da viga representada na figura.

Desenhe os diagramas dos esforços (**N**, **V** e **M**) caracterizando todos os pontos notáveis (máximos, mínimos e zeros).

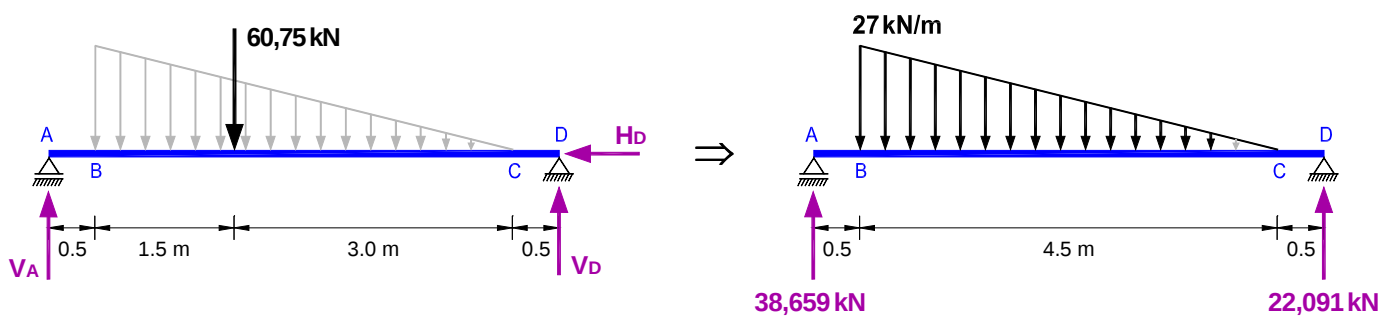


RESOLUÇÃO

CONVENÇÃO DE SINAIS DA RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS



1. CÁLCULO DAS REACÇÕES



$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum M_D = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_D = 0 \\ 5,5 V_A - 60,75 \times 3,5 = 0 \\ 5,5 V_D - 60,75 \times 2,0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_D = 0 \\ V_A = 38,659 \text{ kN} \\ V_D = 22,091 \text{ kN} \end{cases}$$

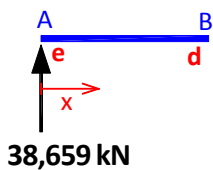
2. RESOLUÇÃO COM O REFERENCIAL:



Não existe qualquer força na direcção do eixo da viga, pelo que o esforço axial é nulo em todos os tramos da viga.

Esforço axial $\Rightarrow N = 0$ (em toda a viga)

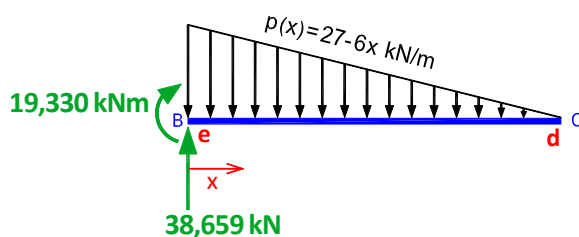
• Tramo AB



$$\overline{AB} \begin{cases} V(x) = 38,659 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = 38,659 x \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$A (x=0) \begin{cases} V_A = 38,659 \text{ kN} \\ M_A = 0 \end{cases} \quad B (x=0,5 \text{ m}) \begin{cases} V_B = 38,659 \text{ kN} \\ M_B = 19,330 \text{ kNm} \end{cases}$$

• Tramo BC



Equação da carga triangular: $p(x) = 27 - 6x \text{ kN/m}$

$$\begin{aligned} V &= \int -p(x) dx \\ M &= \int V(x) dx \end{aligned}$$

$$V(x) = \int -(27 - 6x) dx = \int (-27 + 6x) dx = -27x + 3x^2 + C$$

$$B (x=0) \begin{cases} V_B = 38,659 \text{ kN} \\ V_B = V_{(x=0)} = -27x + 3x^2 + C = C \end{cases} \Rightarrow C = 38,659$$

$$V(x) = 3x^2 - 27x + 38,659 \text{ kN} \quad \text{curva (2º grau)}$$

$$M(x) = \int V(x) dx = \int (3x^2 - 27x + 38,659) dx = x^3 - \frac{27}{2}x^2 + 38,659x + C$$

$$B (x=0) \begin{cases} M_B = 19,330 \text{ kNm} \\ M_B = M_{(x=0)} = x^3 - 13,5x^2 + 38,659x + C = C \end{cases} \Rightarrow C = 19,330$$

$$M(x) = x^3 - 13,5x^2 + 38,659x + 19,330 \text{ kNm} \quad \text{curva (3º grau)}$$

$$B (x=0) \begin{cases} V_B = 38,659 \text{ kN} \\ M_B = 19,330 \text{ kNm} \end{cases} \quad C (x=4,5 \text{ m}) \begin{cases} V_C = -22,091 \text{ kN} \\ M_C = 11,046 \text{ kNm} \end{cases}$$

Secção onde o esforço transversal é nulo: $V = 0 \Rightarrow 3x^2 - 27x + 38,659 = 0 \Rightarrow x = 1,786 \text{ m}$

Concavidade do diagrama de Esforço Transverso: $\frac{d^2V}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ concavidade **U**

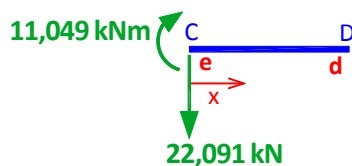
Secção onde o momento é máximo:

$$V(x)=0 \Rightarrow M(x) = M_{\text{máx}} \Rightarrow M_{\text{máx}} = M_{(x=1,786)} = 1,786^3 - 13,5 \times 1,786^2 + 38,659 \times 1,786 + 19,330$$

$$M_{\text{máx}} = 51,01 \text{ kNm}$$

Concavidade do diagrama de Momentos: $\frac{d^2M}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ concavidade **U**

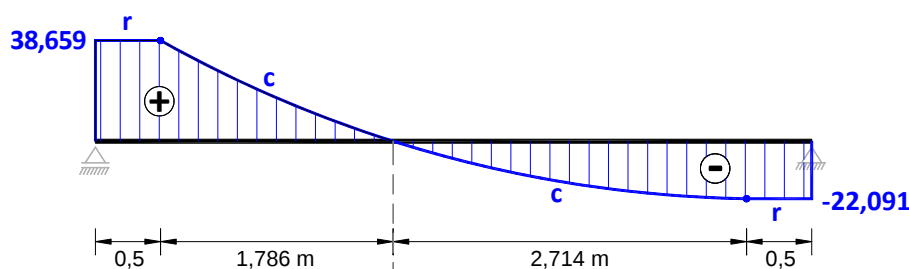
• **Tramo CD**



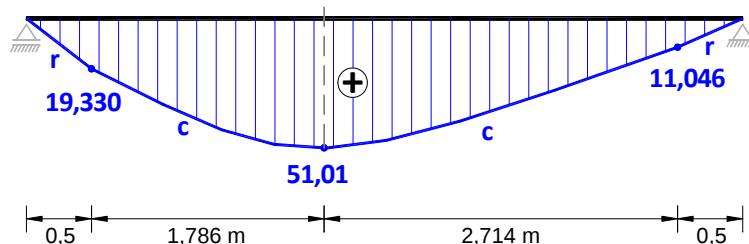
$$\overline{CD} \begin{cases} V(x) = -22,091 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = -22,091 x + 11,049 \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$C (x=0) \begin{cases} V_C = -22,091 \text{ kN} \\ M_C = 11,049 \text{ kNm} \end{cases} \quad D (x=0,5 \text{ m}) \begin{cases} V_D = -22,091 \text{ kN} \\ M_D = 0 \end{cases}$$

DIAGRAMAS



V
ESFORÇO TRANSVERSO
unidade: kN

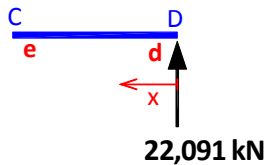


M
MOMENTO FLECTOR
unidade: kNm

3. RESOLUÇÃO COM O REFERENCIAL:



• Tramo DC

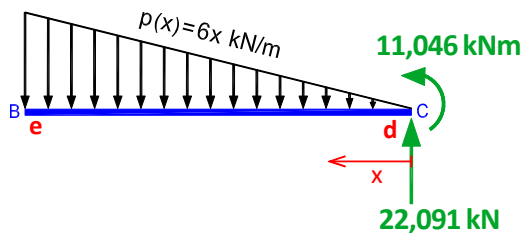


$$\overline{DC} \begin{cases} V(x) = -22,091 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = -22,091 x \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$D (x=0 \text{ m}) \begin{cases} V_D = -22,091 \text{ kN} \\ M_D = 0 \end{cases} \quad C (x=0,5 \text{ m}) \begin{cases} V_C = -22,091 \text{ kN} \\ M_C = 11,049 \text{ kNm} \end{cases}$$

• Tramo CB

Equação da carga triangular: $p(x) = 6x \text{ kN/m}$



$$\begin{aligned} V &= \int p(x) dx \\ M &= \int -V(x) dx \end{aligned}$$

$$V(x) = \int 6x dx = 3x^2 + C$$

$$C (x=0) \begin{cases} V_C = -22,091 \text{ kN} \\ V_C = V_{(x=0)} = 3x^2 + C = C \end{cases} \Rightarrow C = -22,091$$

$$V(x) = 3x^2 - 22,091 \text{ kN} \quad \text{curva (2º grau)}$$

$$M(x) = \int -V(x) dx = \int -(3x^2 - 22,091) dx = \int (-3x^2 + 22,091) dx = -x^3 + 22,091x + C$$

$$C (x=0) \begin{cases} M_C = 11,046 \text{ kNm} \\ M_C = M_{(x=0)} = -x^3 + 22,091x + C = C \end{cases} \Rightarrow C = 11,046$$

$$M(x) = -x^3 + 22,091x + 11,046 \text{ kNm} \quad \text{curva (3º grau)}$$

$$C (x=0) \begin{cases} V_C = -22,091 \text{ kN} \\ M_C = 11,046 \text{ kNm} \end{cases} \quad B (x=4,5 \text{ m}) \begin{cases} V_B = 38,659 \text{ kN} \\ M_B = 19,330 \text{ kNm} \end{cases}$$

Secção onde o esforço transversal é nulo: $V=0 \Rightarrow 3x^2 - 22,091 = 0 \Rightarrow x = 2,714 \text{ m}$

Concavidade do diagrama de Esforço Transverso: $\frac{d^2V}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ concavidade **U**

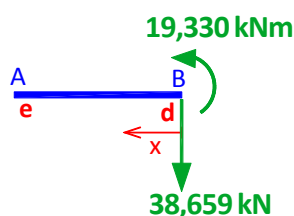
Secção onde o momento é máximo:

$$V(x)=0 \Rightarrow M(x) = M_{\text{máx}} \Rightarrow M_{\text{máx}} = M_{(x=2,714)} = -2,714^3 + 22,091 \times 2,714 + 11,046$$

$$M_{\text{máx}} = 51,01 \text{ kNm}$$

Concavidade do diagrama de Momentos: $\frac{d^2M}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ concavidade **U**

• **Tramo BA**



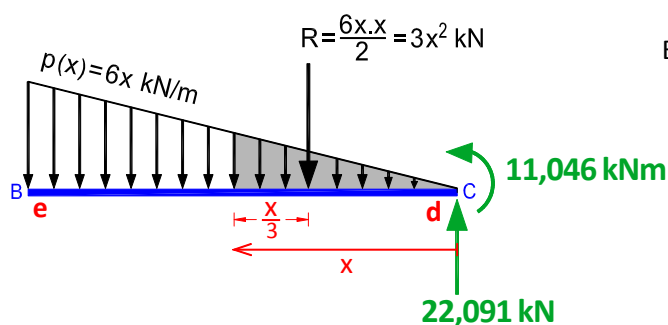
$$\overline{BA} \begin{cases} V(x) = 38,659 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = 19,330 - 38,659 x \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$B (x=0) \begin{cases} V_B = 38,659 \text{ kN} \\ M_B = 19,330 \text{ kNm} \end{cases} \quad A (x=5 \text{ m}) \begin{cases} V_A = 38,659 \text{ kN} \\ M_A = 0 \end{cases}$$

4. RESOLUÇÃO DO TRAMO CB SEM INTEGRAÇÃO E COM O REFERENCIAL:



• **Tramo CB**



Equação da carga triangular: $p(x) = 6x \text{ kN/m}$

$$\overline{CB} \begin{cases} V(x) = 3x^2 - 22,091 \text{ kN} & \Rightarrow \text{curva (2º grau)} \\ M(x) = -3x^2 \cdot \frac{x}{3} + 22,091 x + 11,046 = -x^3 + 22,091 x + 11,046 \text{ kNm} & \Rightarrow \text{curva (3º grau)} \end{cases}$$

$$C (x=0) \begin{cases} V_C = -22,091 \text{ kN} \\ M_C = 11,046 \text{ kNm} \end{cases} \quad B (x=4,5 \text{ m}) \begin{cases} V_B = 38,659 \text{ kN} \\ M_B = 19,330 \text{ kNm} \end{cases}$$