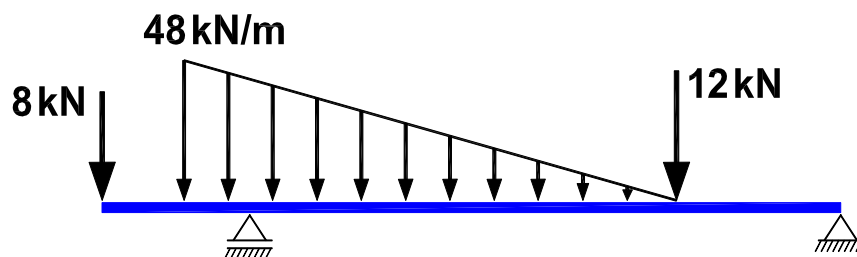


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA

DIAGRAMAS

ESFORÇO AXIAL - ESFORÇO TRANSVERSO - MOMENTO FLECTOR



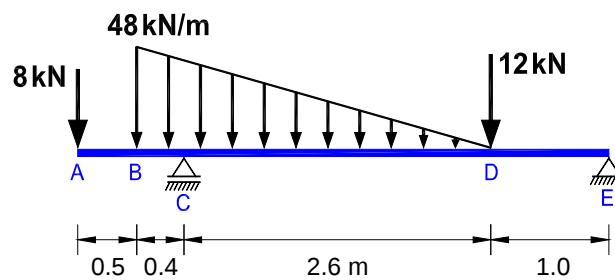
EXERCÍCIO EXEMPLIFICATIVO APRESENTADO NAS AULAS TEÓRICAS

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

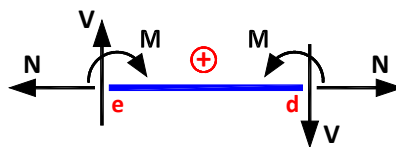
Determine as expressões analíticas do esforço axial (**N**), esforço transversal (**V**) e momento flector (**M**) da viga representada na figura.

Desenhe os diagramas dos esforços (**N**, **V** e **M**) caracterizando todos os pontos notáveis (máximos, mínimos e zeros).

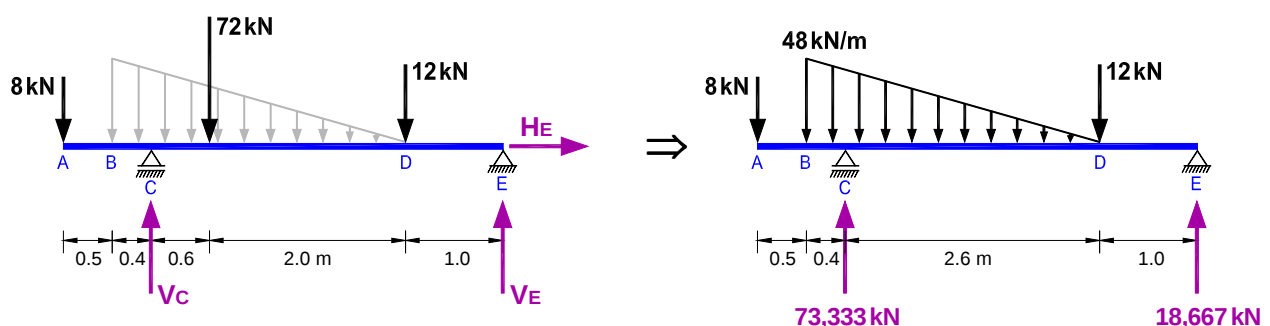


RESOLUÇÃO

CONVENÇÃO DE SINAIS DA RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS



1. CÁLCULO DAS REACÇÕES



$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum M_E = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_E = 0 \\ 3,6 V_C - 8 \times 4,5 - 72 \times 3 - 12 \times 1 = 0 \\ 3,6 V_E + 8 \times 0,9 - 72 \times 0,6 - 12 \times 2,6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_E = 0 \\ V_C = 73,333 \text{ kN} \\ V_E = 18,667 \text{ kN} \end{cases}$$

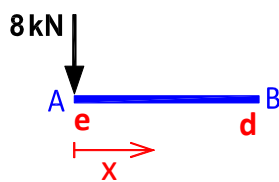
2. RESOLUÇÃO COM O REFERENCIAL:



Não existe qualquer força na direcção do eixo da viga, pelo que o esforço axial é nulo em todos os tramos da viga.

Esforço axial $\Rightarrow N = 0$ (em toda a viga)

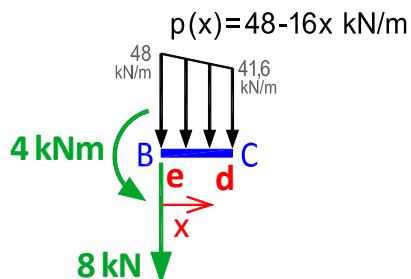
• Tramo AB



$$\overline{AB} \begin{cases} V(x) = -8 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = -8x \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$A (x=0) \begin{cases} V_A = -8 \text{ kN} \\ M_A = 0 \end{cases} \quad B (x=0,5 \text{ m}) \begin{cases} V_B = -8 \text{ kN} \\ M_B = -4 \text{ kNm} \end{cases}$$

• Tramo BC



Equação da carga trapezoidal: $p(x) = 48 - 16x \text{ kN/m}$

$$V = \int -p(x) dx$$

$$M = \int V(x) dx$$

$$V(x) = \int -(48 - 16x) dx = \int (-48 + 16x) dx = -48x + 8x^2 + C$$

$$B (x=0) \begin{cases} V_B = -8 \text{ kN} \\ V_B = V_{(x=0)} = -48x + 8x^2 + C = C \end{cases} \Rightarrow C = -8$$

$$V(x) = 8x^2 - 48x - 8 \text{ kN} \quad \text{curva (2ª grau)}$$

$$M(x) = \int V(x) dx = \int (8x^2 - 48x - 8) dx = \frac{8}{3}x^3 - 24x^2 - 8x + C$$

$$B (x=0) \begin{cases} M_B = -4 \text{ kNm} \\ M_B = M_{(x=0)} = \frac{8}{3}x^3 - 24x^2 - 8x + C = C \end{cases} \Rightarrow C = -4$$

$$M(x) = \frac{8}{3}x^3 - 24x^2 - 8x - 4 \text{ kNm} \quad \text{curva (3ª grau)}$$

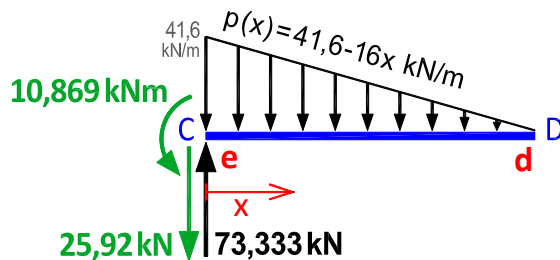
$$B (x=0) \begin{cases} V_B = -8 \text{ kN} \\ M_B = -4 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$C (x=0,4 \text{ m}) \begin{cases} V_C = -25,92 \text{ kN} \\ M_C = -10,869 \text{ kNm} \end{cases}$$

Concavidade do diagrama de Esforço Transverso: $\frac{d^2V}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ concavidade **U**

Concavidade do diagrama de Momentos: $\frac{d^2M}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ concavidade **U**

• **Tramo CD**



Equação da carga triangular: $p(x) = 41,6 - 16x \text{ kN/m}$

$$V = \int -p(x) dx$$

$$M = \int V(x) dx$$

$$V(x) = \int -(41,6 - 16x) dx = \int (-41,6 + 16x) dx = -41,6x + 8x^2 + C$$

$$C (x=0) \begin{cases} V_C = -25,92 + 73,333 = 47,413 \text{ kN} \\ V_C = V_{(x=0)} = -41,6x + 8x^2 + C = C \end{cases} \Rightarrow C = 47,413$$

$$V(x) = 8x^2 - 41,6x + 47,413 \text{ kN} \quad \text{curva (2º grau)}$$

$$M(x) = \int V(x) dx = \int (8x^2 - 41,6x + 47,413) dx = \frac{8}{3}x^3 - 20,8x^2 + 47,413x + C$$

$$C (x=0) \begin{cases} M_C = -10,869 \text{ kNm} \\ M_C = M_{(x=0)} = \frac{8}{3}x^3 - 20,8x^2 + 47,413x + C = C \end{cases} \Rightarrow C = -10,869$$

$$M(x) = \frac{8}{3}x^3 - 20,8x^2 + 47,413x - 10,869 \text{ kNm} \quad \text{curva (3º grau)}$$

$$C (x=0) \begin{cases} V_C = 47,413 \text{ kN} \\ M_C = -10,869 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$D (x=2,6 \text{ m}) \begin{cases} V_D = -6,667 \text{ kN} \\ M_D = 18,674 \text{ kNm} \end{cases}$$

Secção onde o esforço transverso é nulo: $V = 0 \Rightarrow 8x^2 - 41,6x + 47,413 = 0 \Rightarrow x = 1,687 \text{ m}$

Concavidade do diagrama de Esforço Transverso: $\frac{d^2V}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ concavidade **U**

Secção onde o momento é máximo:

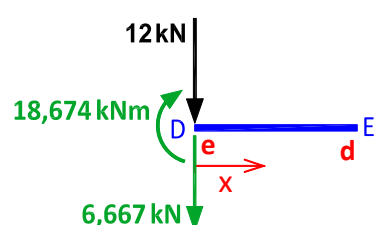
$$V(x)=0 \Rightarrow M(x)=M_{\max} \Rightarrow M_{\max}=M_{(x=1,687)}=\frac{8}{3}\times 1,687^3-20,8\times 1,687^2+47,413\times 1,687-10,869$$

$$M_{\max}=22,72 \text{ kNm}$$

Secção onde o momento é nulo: $M=0 \Rightarrow \frac{8}{3}x^3-20,8x^2+47,413x-10,869=0 \Rightarrow x=0,257 \text{ m}$

Concavidade do diagrama de Momentos: $\frac{d^2M}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ concavidade **U**

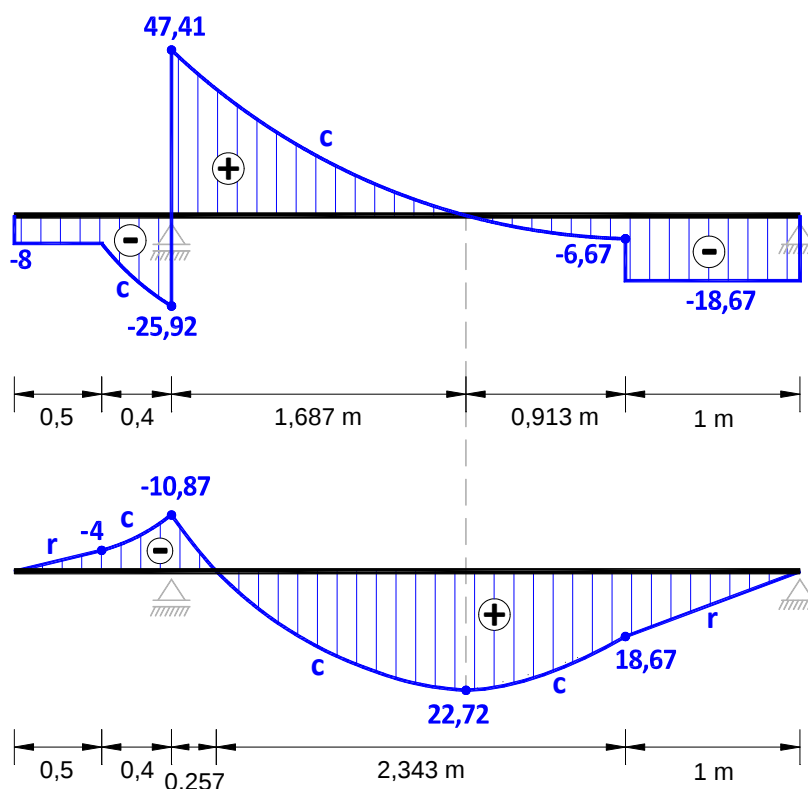
• **Tramo DE**



$$\overline{DE} \begin{cases} V(x) = -12 - 6,667 = -18,667 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = -18,667 x + 18,674 \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$D (x=0) \begin{cases} V_D = -18,667 \text{ kN} \\ M_D = 18,674 \text{ kNm} \end{cases} \quad E (x=1 \text{ m}) \begin{cases} V_E = -18,667 \text{ kN} \\ M_E = 0 \end{cases}$$

DIAGRAMAS



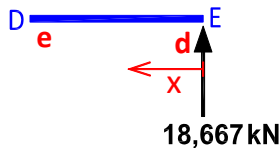
V
ESFORÇO TRANSVERSO
unidade: kN

M
MOMENTO FLECTOR
unidade: kNm

3. RESOLUÇÃO COM O REFERENCIAL:



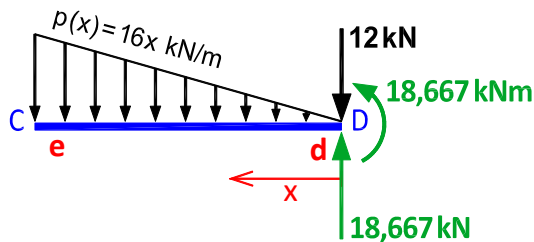
• Tramo ED



$$\overline{ED} \begin{cases} V(x) = -18,667 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = 18,667 x \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$E (x=0) \begin{cases} V_E = -18,667 \text{ kN} \\ M_E = 0 \end{cases} \quad D (x=1\text{m}) \begin{cases} V_D = -18,667 \text{ kN} \\ M_D = 18,667 \text{ kNm} \end{cases}$$

• Tramo DC



Equação da carga triangular: $p(x) = 16 x \text{ kN/m}$

$$\begin{aligned} V &= \int p(x) dx \\ M &= \int -V(x) dx \end{aligned}$$

$$V(x) = \int 16 x dx = 8 x^2 + C$$

$$D (x=0) \begin{cases} V_D = -18,667 + 12 = -6,667 \text{ kN} \\ V_D = V_{(x=0)} = 8 x^2 + C = C \end{cases} \Rightarrow C = -6,667$$

$$V(x) = 8 x^2 - 6,667 \text{ kN} \quad \text{curva (2º grau)}$$

$$M(x) = \int -V(x) dx = \int -(8 x^2 - 6,667) dx = -\frac{8}{3} x^3 + 6,667 x + C$$

$$D (x=0) \begin{cases} M_D = 18,667 \text{ kNm} \\ M_D = M_{(x=0)} = -\frac{8}{3} x^3 + 6,667 x + C = C \end{cases} \Rightarrow C = 18,667$$

$$M(x) = -\frac{8}{3} x^3 + 6,667 x + 18,667 \text{ kNm} \quad \text{curva (3º grau)}$$

$$D (x=0) \begin{cases} V_D = -6,667 \text{ kN} \\ M_D = 18,667 \text{ kNm} \end{cases} \quad C (x=2,6\text{m}) \begin{cases} V_C = 47,413 \text{ kN} \\ M_C = -10,868 \text{ kNm} \end{cases}$$

Secção onde o esforço transversal é nulo: $V=0 \Rightarrow 8x^2 - 6,667 = 0 \Rightarrow x = 0,913 \text{ m}$

Concavidade do diagrama de Esforço Transverso: $\frac{d^2V}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ concavidade **U**

Secção onde o momento é máximo:

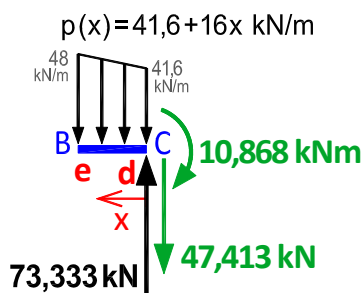
$$V(x)=0 \Rightarrow M(x) = M_{\text{máx}} \Rightarrow M_{\text{máx}} = M_{(x=0,913)} = -\frac{8}{3} \times 0,913^3 + 6,667 \times 0,913 + 18,667$$

$$M_{\text{máx}} = 22,72 \text{ kNm}$$

Secção onde o momento é nulo: $M=0 \Rightarrow -\frac{8}{3}x^3 + 6,667x + 18,667 = 0 \Rightarrow x = 2,343 \text{ m}$

Concavidade do diagrama de Momentos: $\frac{d^2M}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ concavidade **U**

• **Tramo CB**



Equação da carga trapezoidal: $p(x) = 41,6 + 16x \text{ kN/m}$

$$V = \int p(x) dx$$

$$M = \int -V(x) dx$$

$$V(x) = \int (41,6 + 16x) dx = 8x^2 + 41,6x + C$$

$$C(x=0) \begin{cases} V_C = 47,413 - 73,333 = -25,92 \text{ kN} \\ V_C = V_{(x=0)} = 8x^2 + 41,6x + C = C \end{cases} \Rightarrow C = -25,92$$

$$V(x) = 8x^2 + 41,6x - 25,92 \text{ kN} \quad \text{curva (2ª grau)}$$

$$M(x) = \int -V(x) dx = \int -(8x^2 + 41,6x - 25,92) dx = \int (-8x^2 - 41,6x + 25,92) dx = -\frac{8}{3}x^3 - 20,8x^2 + 25,92x + C$$

$$C(x=0) \begin{cases} M_C = -10,868 \text{ kNm} \\ M_C = M_{(x=0)} = -\frac{8}{3}x^3 - 20,8x^2 + 25,92x + C = C \end{cases} \Rightarrow C = -10,868$$

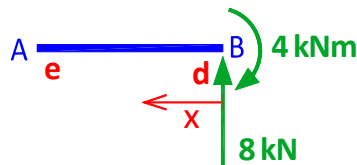
$$M(x) = -\frac{8}{3}x^3 - 20,8x^2 + 25,92x - 10,868 \text{ kNm} \quad \text{curva (3ª grau)}$$

$$C(x=0) \begin{cases} V_C = -25,92 \text{ kN} \\ M_C = -10,868 \text{ kNm} \end{cases} \quad B(x=0,4\text{m}) \begin{cases} V_B = -8 \text{ kN} \\ M_B = -4 \text{ kNm} \end{cases}$$

Concavidade do diagrama de esforço transverso: $\frac{d^2V}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ concavidade U

Concavidade do diagrama de Momentos: $\frac{d^2M}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ concavidade U

• **Tramo BA**



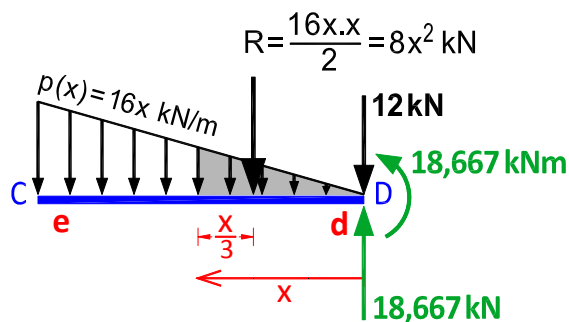
$$\overline{BA} \begin{cases} V(x) = -8 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = -4 + 8x \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$B (x=0) \begin{cases} V_B = -8 \text{ kN} \\ M_B = -4 \text{ kNm} \end{cases} \quad A (x=0,5\text{m}) \begin{cases} V_A = -8 \text{ kN} \\ M_A = 0 \end{cases}$$

4. RESOLUÇÃO DO TRAMO DC SEM INTEGRAÇÃO E COM O REFERENCIAL:



• **Tramo DC**



Equação da carga triangular: $p(x) = 16x \text{ kN/m}$

$$\overline{DC} \begin{cases} V(x) = 8x^2 + 12 - 18,667 = 8x^2 - 6,667 \text{ kN} & \Rightarrow \text{curva (2ª grau)} \\ M(x) = -8x^2 \cdot \frac{x}{3} + 6,667x + 18,667 = -\frac{8}{3}x^3 + 6,667x + 18,667 \text{ kNm} & \Rightarrow \text{curva (3ª grau)} \end{cases}$$

$$D (x=0) \begin{cases} V_D = -6,667 \text{ kN} \\ M_D = 18,667 \text{ kNm} \end{cases} \quad C (x=2,6\text{m}) \begin{cases} V_C = 47,413 \text{ kN} \\ M_C = -10,868 \text{ kNm} \end{cases}$$