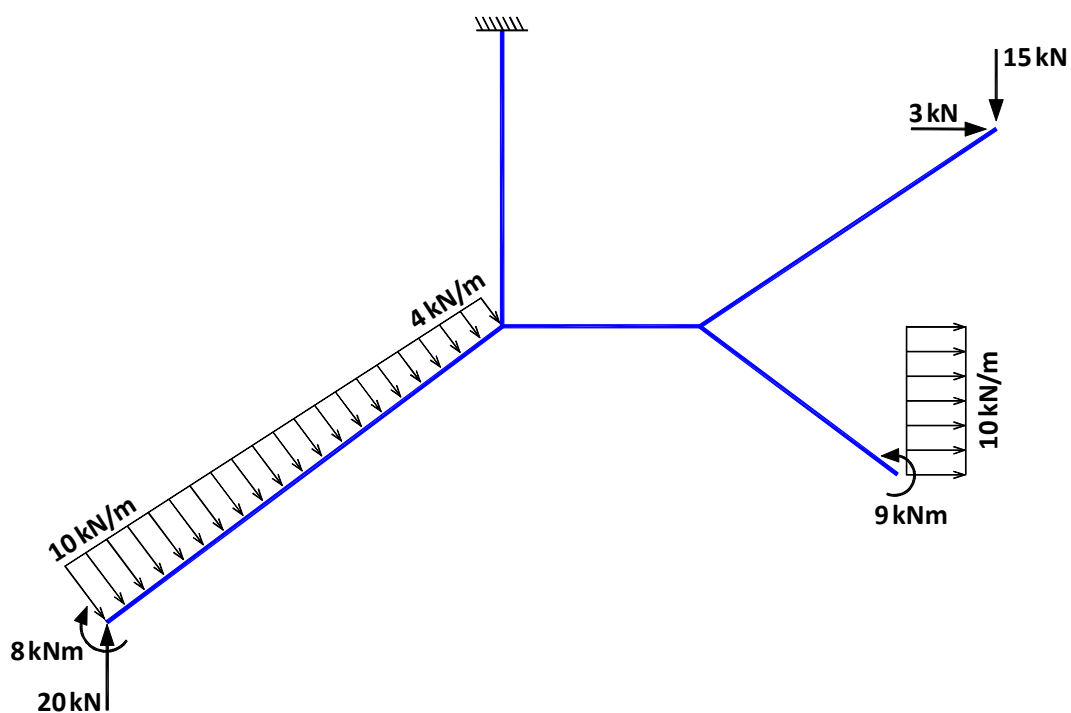


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA

DIAGRAMAS

ESFORÇO AXIAL - ESFORÇO TRANSVERSO - MOMENTO FLECTOR



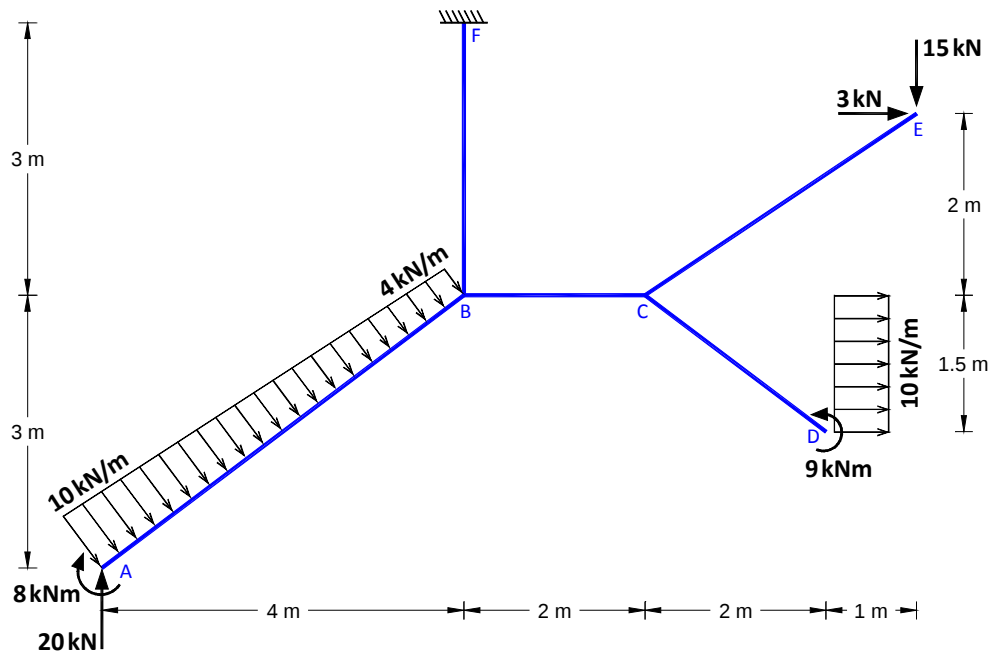
RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

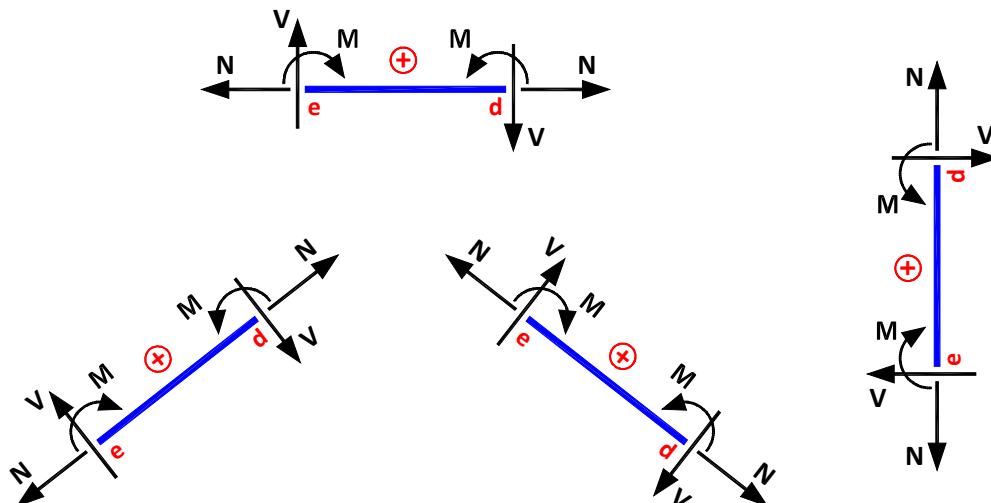
Sem determinar as reacções, determine as expressões analíticas do esforço axial (**N**), esforço transversal (**V**) e momento flector (**M**) em todas as barras da estrutura representada.

Desenhe os diagramas dos esforços (**N**, **V** e **M**) caracterizando todos os pontos notáveis (máximos, mínimos e zeros).

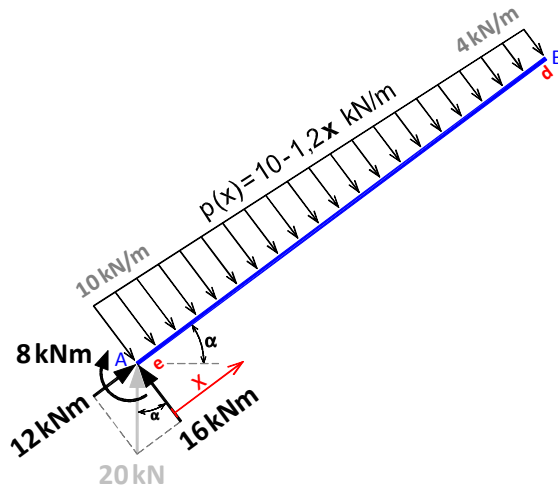


RESOLUÇÃO

CONVENÇÃO DE SINAIS DA RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS



• **Tramo AB**



Comprimento da barra AB = 5 m

$$\alpha \begin{cases} \cos \alpha = 0,8 \\ \sin \alpha = 0,6 \end{cases}$$

Equação da carga trapezoidal: $p(x) = 10 - 1,2x$ kN/m

$$\begin{aligned} V &= \int -p(x) dx \\ M &= \int V(x) dx \end{aligned}$$

$$V(x) = \int -(10 - 1,2x) dx = \int (-10 + 1,2x) dx = -10x + 0,6x^2 + C$$

$$A(x=0) \begin{cases} V_A = 16 \text{ kN} \\ V_A = V_{(x=0)} = -10x + 0,6x^2 + C = 16 \end{cases} \Rightarrow C = 16$$

$$V(x) = 0,6x^2 - 10x + 16 \text{ kN} \quad \text{curva (2º grau)}$$

$$M(x) = \int V(x) dx = \int (0,6x^2 - 10x + 16) dx = 0,2x^3 - 5x^2 + 16x + C$$

$$A(x=0) \begin{cases} M_A = 8 \text{ kNm} \\ M_A = M_{(x=0)} = 0,2x^3 - 5x^2 + 16x + C = 8 \end{cases} \Rightarrow C = 8$$

$$M(x) = 0,2x^3 - 5x^2 + 16x + 8 \text{ kNm} \quad \text{curva (3º grau)}$$

$$\text{Tramo AB} \begin{cases} N(x) = -12 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ V(x) = 0,6x^2 - 10x + 16 \text{ kN} & \Rightarrow \text{curva (2º grau)} \\ M(x) = 0,2x^3 - 5x^2 + 16x + 8 \text{ kNm} & \Rightarrow \text{curva (3º grau)} \end{cases}$$

$$A(x=0) \begin{cases} N_A = -12 \text{ kN} \\ V_A = 16 \text{ kN} \\ M_A = 8 \text{ kNm} \end{cases} \quad B(x=5 \text{ m}) \begin{cases} N_B = -12 \text{ kN} \\ V_B = 0,6 \times 5^2 - 10 \times 5 + 16 = -19 \text{ kN} \\ M_B = 0,2 \times 5^3 - 5 \times 5^2 + 16 \times 5 + 8 = -12 \text{ kNm} \end{cases}$$

Concavidade do diagrama de Esforço Transverso: $\frac{d^2V}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ concavidade $\cup$

Secção onde o esforço transverso é nulo: $V = 0 \Rightarrow 0,6x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x = 1,793 \text{ m}$

Secção onde o momento é máximo:

$$V(x)=0 \Rightarrow M(x)=M_{\max} \Rightarrow M_{\max}=M_{(x=1,793)}=0,2 \times 1,793^3 - 5 \times 1,793^2 + 16 \times 1,793 + 8$$

$$M_{\max}=21,767 \text{ kNm}$$

Secção onde o momento é nulo: $M=0 \Rightarrow 0,2x^3 - 5x^2 + 16x + 8 = 0 \Rightarrow x=4,316 \text{ m}$

Concavidade do diagrama de Momentos: $\frac{d^2M}{dx^2} < 0 \Rightarrow \text{concavidade } \cup$

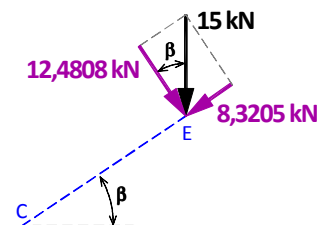
• **Tramo EC**

Comprimento da barra $EC = \sqrt{13} \text{ m}$

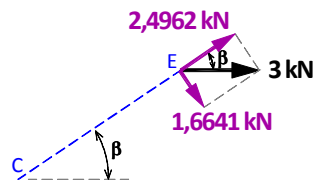
$$\beta = \arctg \frac{2}{3} = 33,69^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \beta = 0,832 \\ \sin \beta = 0,555 \end{cases}$$

Decomposição das forças:

Força 15 kN $\downarrow \Rightarrow \begin{cases} 15 \cos \beta = 12,4808 \text{ kN} \searrow \\ 15 \sin \beta = 8,3205 \text{ kN} \swarrow \end{cases}$

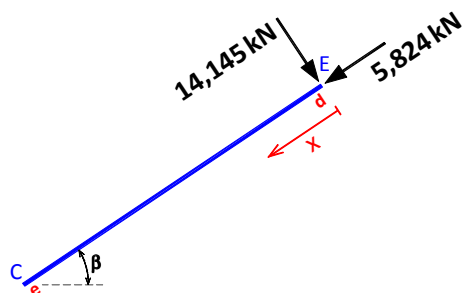


Força 3 kN $\rightarrow \Rightarrow \begin{cases} 3 \sin \beta = 1,6641 \text{ kN} \searrow \\ 3 \cos \beta = 2,4962 \text{ kN} \swarrow \end{cases}$



Resultante na perpendicular à barra: $12,4808 + 1,6641 = 14,1449 \text{ kN} \searrow$

Resultante na direcção do eixo da barra: $8,3205 - 2,4962 = 5,8243 \text{ kN} \swarrow$



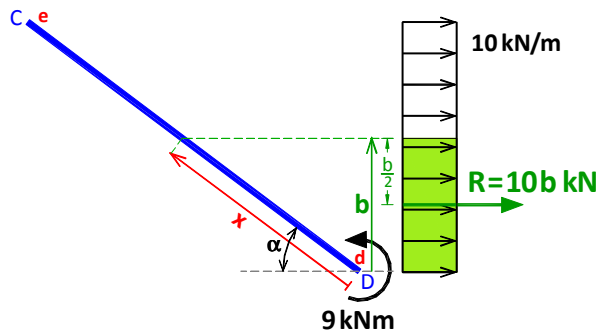
$$\begin{cases} N(x) = -5,824 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ V(x) = 14,145 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = -14,145 x \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$E (x=0) \begin{cases} N_E = -5,824 \text{ kN} \\ V_E = 14,145 \text{ kN} \\ M_E = 0 \end{cases}$$

$$C (x=\sqrt{13} \text{ m}) \begin{cases} N_C = -5,824 \text{ kN} \\ V_C = 14,145 \text{ kN} \\ M_C = -14,145 \times \sqrt{13} = -51 \text{ kNm} \end{cases}$$

• **Tramo DC**

Comprimento da barra DC = 2,5 m



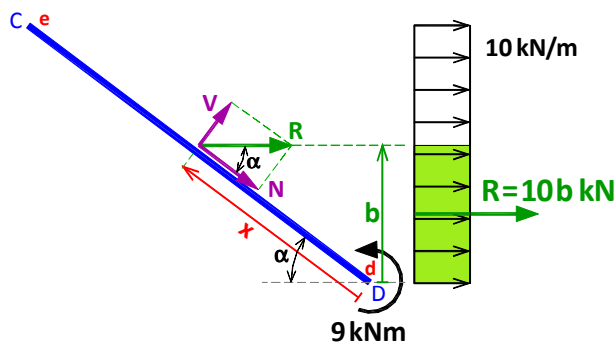
$$\alpha = \arctg \frac{1,5}{2} = 36,8699^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0,8 \\ \sin \alpha = 0,6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b &= x \sin \alpha \\ b &= 0,6 x \end{aligned}$$

$$M(b) = 9 + 10 b \frac{b}{2} = 9 + 5 b^2 \text{ kNm}$$

$$M(x) = 9 + 5 (0,6 x)^2 = 9 + 1,8 x^2 \text{ kNm} \Rightarrow \text{curva (2ª grau)}$$

Concavidade do diagrama de Momentos: $\frac{d^2 M}{d x^2} > 0 \Rightarrow \text{concavidade } \cap$



R – resultante de todas as forças à direita do ponto.

$$R = 10 b \text{ kN}$$

$$N = R \cos \alpha = 10 b \cos \alpha$$

$$V = R \sin \alpha = 10 b \sin \alpha$$

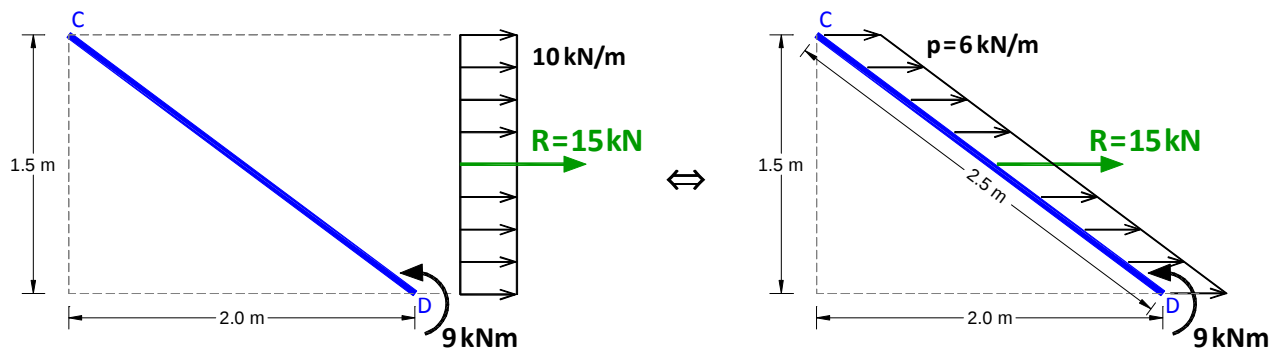
$$\begin{cases} N(b) = 10 b \cos \alpha \\ V(b) = -10 b \sin \alpha \end{cases} \xrightarrow{b = x \sin \alpha} \begin{cases} N(x) = 10 x \sin \alpha \cos \alpha = -10 x \times 0,6 \times 0,8 = 4,8 x \text{ kN} \Rightarrow \text{recta} \\ V(x) = -10 x \sin \alpha \sin \alpha = -10 x \times 0,6 \times 0,6 = -3,6 x \text{ kN} \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$\text{Tramo DC} \begin{cases} N(x) = 4,8 x \text{ kN} \Rightarrow \text{recta} \\ V(x) = -3,6 x \text{ kN} \Rightarrow \text{recta} \\ M(x) = 9 + 1,8 x^2 \text{ kNm} \Rightarrow \text{curva (2ª grau)} \end{cases}$$

$$D (x=0) \begin{cases} N_D = 0 \\ V_D = 0 \\ M_D = 9 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$C (x=2,5 \text{ m}) \begin{cases} N_C = 4,8 \times 2,5 = 12 \text{ kN} \\ V_C = -3,6 \times 2,5 = -9 \text{ kN} \\ M_C = 9 + 1,8 \times 2,5^2 = 20,25 \text{ kNm} \end{cases}$$

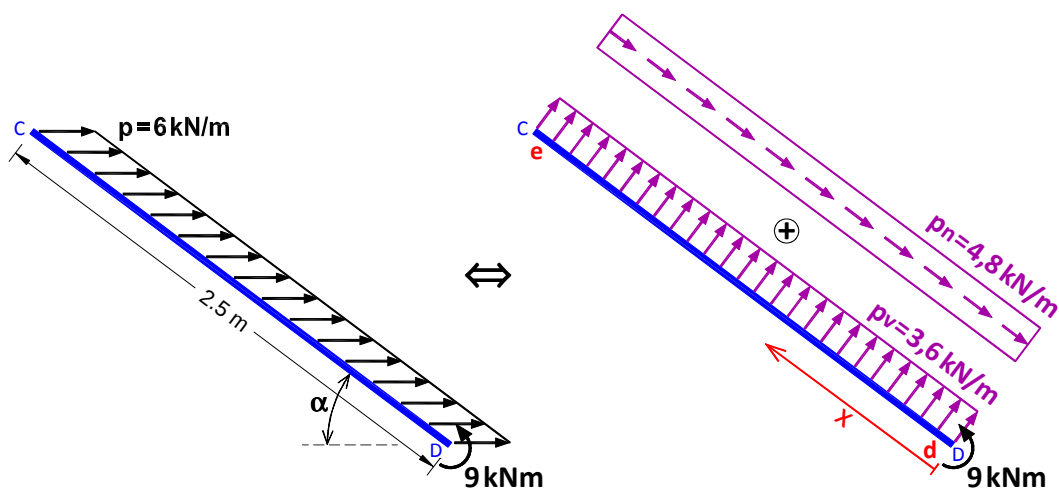
• **Tramo DC** - outra resolução



Para os dois sistemas serem equivalentes, a Resultante tem que ser igual, ou seja:

$$R = 10 \times 1,5 = 15 \text{ kN} \Rightarrow p \times 2,5 = R = 15 \text{ kN} \Rightarrow p = 6 \text{ kN/m}$$

$$\begin{aligned} p_n &= p \cos \alpha \\ p_v &= p \sin \alpha = 6 \times 0,6 = 3,6 \text{ kN/m} \\ p_n &= p \cos \alpha = 6 \times 0,8 = 4,8 \text{ kN/m} \end{aligned}$$



$$\text{Tramo DC} \begin{cases} N(x) = p_n \cdot x = 4,8 \cdot x \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta} \\ V(x) = -p_v \cdot x = -3,6 \cdot x \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta} \\ M(x) = 9 + 3,6 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 9 + 1,8 \cdot x^2 \text{ kNm} & \Rightarrow \text{curva (2º grau)} \end{cases}$$

$$D (x=0) \begin{cases} N_D = 0 \\ V_D = 0 \\ M_D = 9 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$C (x=2,5 \text{ m}) \begin{cases} N_C = 4,8 \times 2,5 = 12 \text{ kN} \\ V_C = -3,6 \times 2,5 = -9 \text{ kN} \\ M_C = 9 + 1,8 \times 2,5^2 = 20,25 \text{ kNm} \end{cases}$$

• **Tramo CB**

Resultante de todas as acções à direita do ponto **C** com a direcção do eixo da barra **CB**:

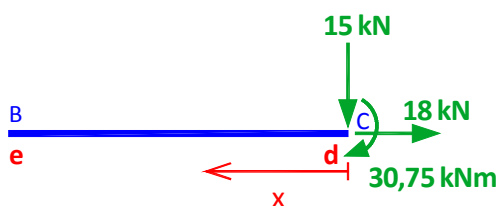
$$3 + 10 \times 1,5 = 18 \text{ kN} \rightarrow$$

Resultante de todas as acções à direita do ponto **C** com a direcção perpendicular ao eixo da barra **CB**:

$$15 \text{ kN} \downarrow$$

Momento no ponto C devido a todas as acções à direita do ponto **C**:

$$\begin{cases} \text{Barra DC} \Rightarrow M_C = 20,25 \text{ kNm} \curvearrowright \\ \text{Barra EC} \Rightarrow M_C = 51 \text{ kNm} \curvearrowright \end{cases} \Rightarrow M_C = 51 - 20,25 = 30,75 \text{ kNm} \curvearrowright$$



$$\begin{cases} N(x) = 18 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ V(x) = 15 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = -30,75 - 15x \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

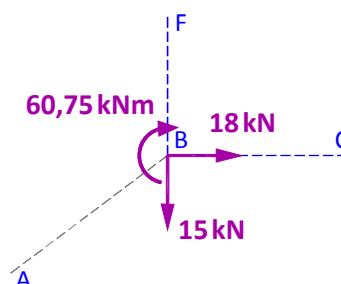
$$C (x=0) \begin{cases} N_C = 18 \text{ kN} \\ V_C = 15 \text{ kN} \\ M_C = -30,75 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$B (x=2 \text{ m}) \begin{cases} N_B = 18 \text{ kN} \\ V_B = 15 \text{ kN} \\ M_B = -30,75 - 15 \times 2 = -60,75 \text{ kNm} \end{cases}$$

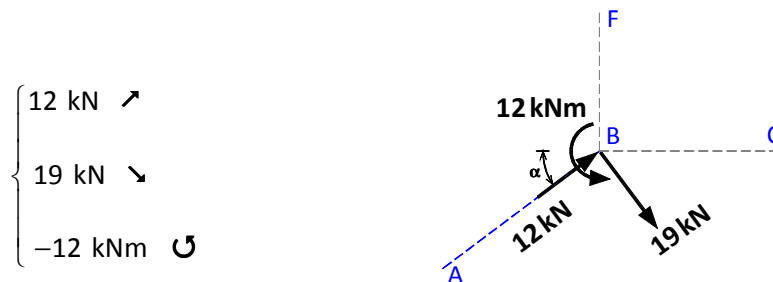
• **Tramo BF**

Resultante de todas as acções à direita do ponto **B** (acções transmitidas à barra **BF** pela barra **CB**):

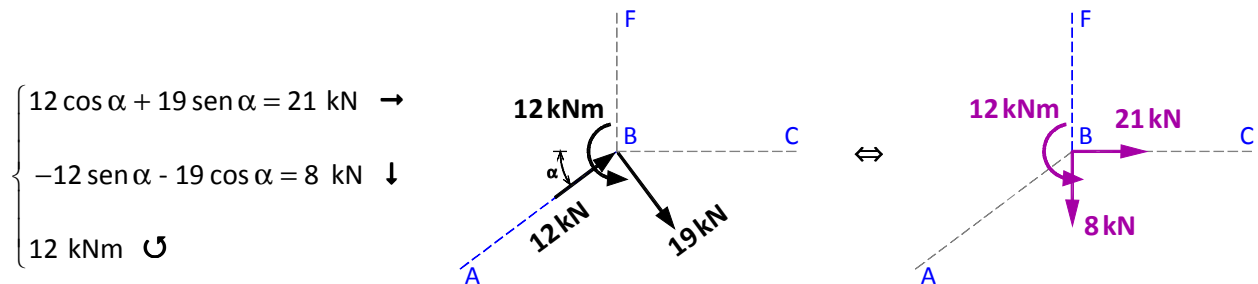
$$\begin{cases} 18 \text{ kN} \rightarrow \\ 15 \text{ kN} \downarrow \\ -60,75 \text{ kNm} \curvearrowright \end{cases}$$



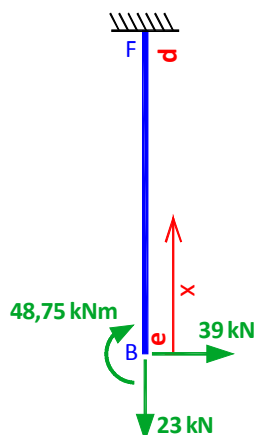
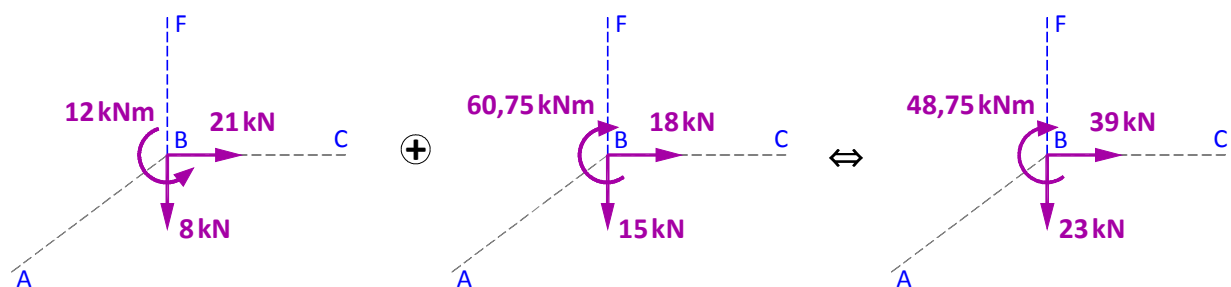
Resultante de todas as acções à esquerda do ponto **B** (acções transmitidas à barra **BF** pela barra **AB**):



Resultante de todas as acções à direita do ponto **B** com o referencial da barra **BF**:



Resultante de todas as acções transmitidas à barra **BF**:



$$\begin{cases} N(x) = 23 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ V(x) = -39 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = 48,75 - 39x \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$\mathbf{B} (x=0) \begin{cases} N_B = 23 \text{ kN} \\ V_B = 39 \text{ kN} \\ M_B = 48,75 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\mathbf{F} (x=3 \text{ m}) \begin{cases} N_F = 23 \text{ kN} \\ V_F = 39 \text{ kN} \\ M_F = 48,75 - 39 \times 3 = -68,25 \text{ kNm} \end{cases}$$

Secção onde o momento é nulo: $M = 0 \Rightarrow 48,75 - 39x = 0 \Rightarrow x = 1,25 \text{ m}$

VERIFICAÇÃO DO DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES

$$\sum M_{\text{esq}} = \sum M_{\text{dir}}$$

• Nó B

No nó **B** concorrem três barras:

- Barra BC – extremidade esquerda: $M_e = -60,75 \text{ kNm}$
- Barra BF – extremidade esquerda: $M_e = 48,75 \text{ kNm}$
- Barra AB – extremidade direita: $M_d = 12 \text{ kNm}$

$$\begin{cases} \sum M_{\text{esq}} = -60,75 + 48,75 = 12 \text{ kNm} \\ \sum M_{\text{dir}} = 12 \text{ kNm} \end{cases} \Rightarrow \sum M_{\text{esq}} = \sum M_{\text{dir}} \quad \checkmark$$

• Nó C

No nó **C** concorrem três barras:

- Barra CD – extremidade esquerda: $M_e = 20,25 \text{ kNm}$
- Barra CE – extremidade esquerda: $M_e = -51 \text{ kNm}$
- Barra BC – extremidade direita: $M_d = -30,75 \text{ kNm}$

$$\begin{cases} \sum M_{\text{esq}} = 20,25 - 51 = -30,75 \text{ kNm} \\ \sum M_{\text{dir}} = -30,75 \text{ kNm} \end{cases} \Rightarrow \sum M_{\text{esq}} = \sum M_{\text{dir}} \quad \checkmark$$

DIAGRAMAS

