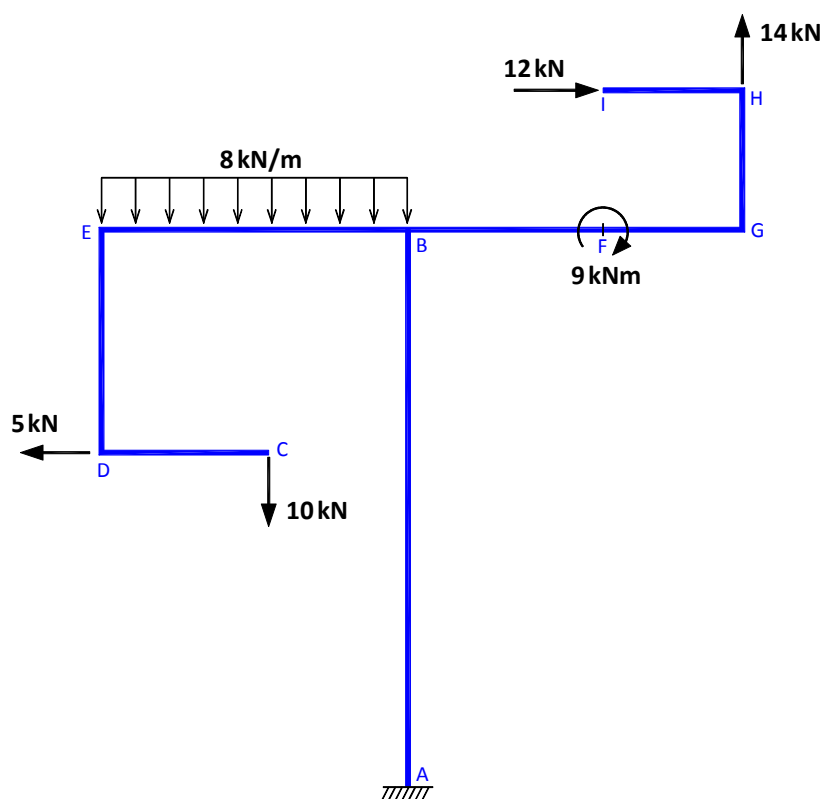


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA

DIAGRAMAS

ESFORÇO AXIAL - ESFORÇO TRANSVERSO - MOMENTO FLECTOR



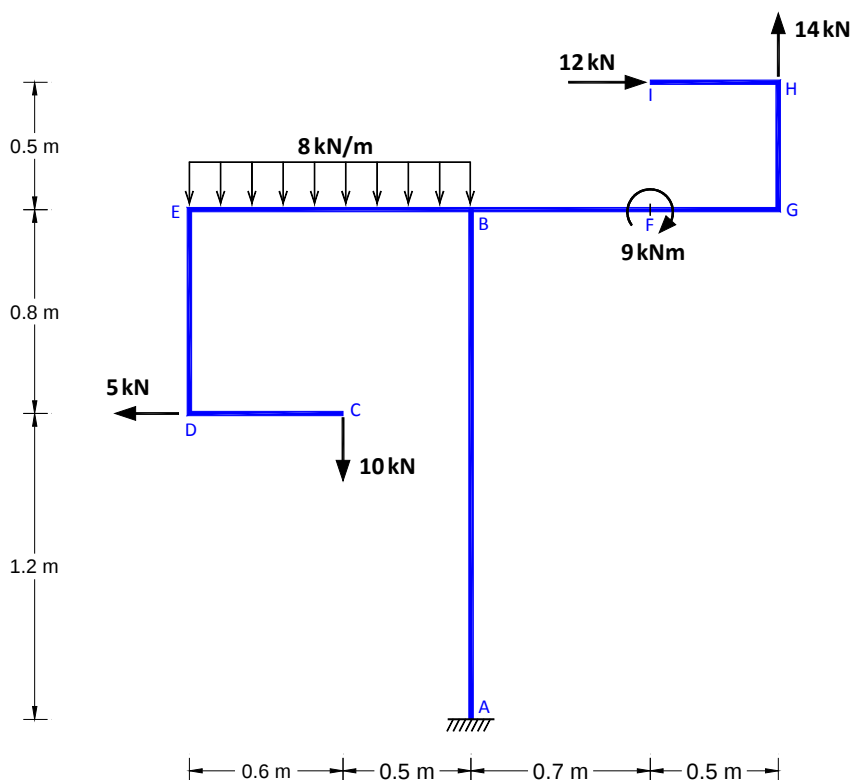
EXERCÍCIO EXEMPLIFICATIVO APRESENTADO NAS AULAS TEÓRICAS

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

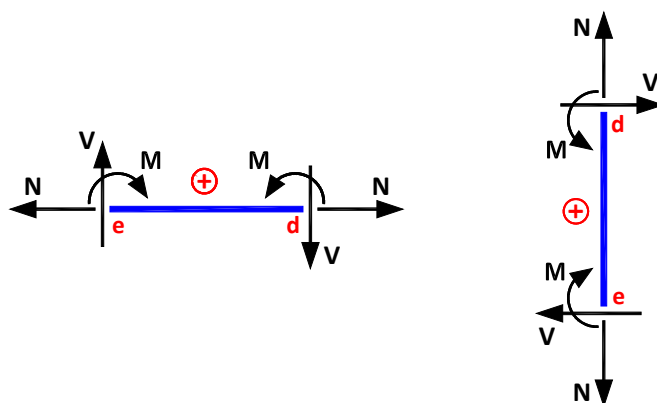
Sem calcular previamente as reacções, determine as expressões analíticas do esforço axial (**N**), esforço transversal (**V**) e momento flector (**M**), em cada tramo da estrutura representada na figura.

Desenhe os diagramas dos esforços (**N**, **V** e **M**) caracterizando todos os pontos notáveis.

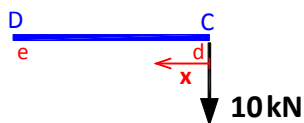


RESOLUÇÃO

CONVENÇÃO DE SINAIS DA RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS



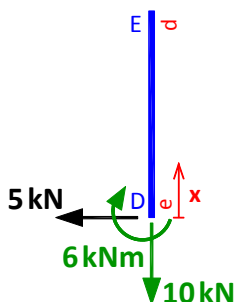
• Tramo CD



$$\overline{CD} \begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = 10 \text{ kN} \\ M(x) = -10x \text{ kNm} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \Rightarrow \text{recta de n\u00edvel} \\ \Rightarrow \text{recta} \end{matrix}$$

$$C (x=0) \Rightarrow \begin{cases} N_C = 0 \\ V_C = 10 \text{ kN} \\ M_C = 0 \end{cases} \quad D (x=0,60\text{m}) \Rightarrow \begin{cases} N_D = 0 \\ V_D = 10 \text{ kN} \\ M_D = -6 \text{ kNm} \end{cases}$$

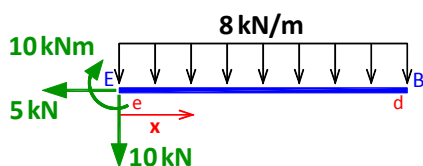
• Tramo DE



$$\overline{DE} \begin{cases} N(x) = 10 \text{ kN} \\ V(x) = 5 \text{ kN} \\ M(x) = 6 + 5x \text{ kNm} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \Rightarrow \text{recta de n\u00edvel} \\ \Rightarrow \text{recta de n\u00edvel} \\ \Rightarrow \text{recta} \end{matrix}$$

$$D (x=0) \Rightarrow \begin{cases} N_D = 10 \text{ kN} \\ V_D = 5 \text{ kN} \\ M_D = 6 \text{ kNm} \end{cases} \quad E (x=0,80\text{m}) \Rightarrow \begin{cases} N_E = 10 \text{ kN} \\ V_E = 5 \text{ kN} \\ M_E = 10 \text{ kNm} \end{cases}$$

• Tramo EB



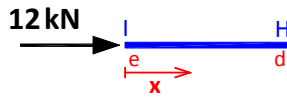
$$\overline{EB} \begin{cases} N(x) = 5 \text{ kN} \\ V(x) = -10 - 8x \text{ kN} \\ M(x) = 10 - 10x - 8x \frac{x}{2} = 10 - 10x - 4x^2 \text{ kNm} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \Rightarrow \text{recta de n\u00edvel} \\ \Rightarrow \text{recta} \\ \Rightarrow \text{curva (2\u00b0 grau)} \end{matrix}$$

$$E (x=0) \Rightarrow \begin{cases} N_E = 5 \text{ kN} \\ V_E = -10 \text{ kN} \\ M_E = 10 \text{ kNm} \end{cases} \quad B (x=1,10\text{m}) \Rightarrow \begin{cases} N_B = 5 \text{ kN} \\ V_B = -18,8 \text{ kN} \\ M_B = -5,84 \text{ kNm} \end{cases}$$

Concavidade do diagrama de Momentos: $\frac{d^2M}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ concavidade **U**

Secção onde o momento é nulo: $M=0 \Rightarrow 10 - 10x - 4x^2 = 0 \Rightarrow x=0,766\text{m}$

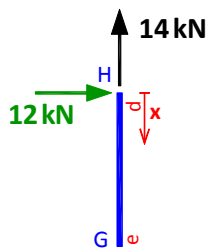
• **Tramo IH**



$$\overline{IH} \begin{cases} N(x) = -12 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ V(x) = 0 \\ M(x) = 0 \end{cases}$$

$$I \text{ e } H \Rightarrow \begin{cases} N_I = N_H = -12 \text{ kN} \\ V_I = V_H = 0 \\ M_I = M_H = 0 \end{cases}$$

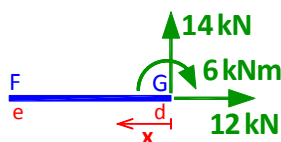
• **Tramo HG**



$$\overline{HG} \begin{cases} N(x) = 14 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ V(x) = 12 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = -12x \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$H (x=0) \Rightarrow \begin{cases} N_H = 14 \text{ kN} \\ V_H = 12 \text{ kN} \\ M_H = 0 \end{cases} \quad G (x=0,50 \text{ m}) \Rightarrow \begin{cases} N_G = 14 \text{ kN} \\ V_G = 12 \text{ kN} \\ M_G = -6 \text{ kNm} \end{cases}$$

• **Tramo FG**

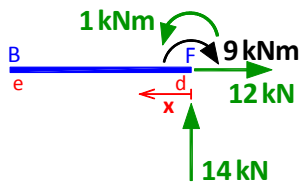


$$\overline{FG} \begin{cases} N(x) = 12 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ V(x) = -14 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = -6 + 14x \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$G (x=0) \Rightarrow \begin{cases} N_G = 12 \text{ kN} \\ V_G = -14 \text{ kN} \\ M_G = -6 \text{ kNm} \end{cases} \quad F (x=0,50 \text{ m}) \Rightarrow \begin{cases} N_F = 12 \text{ kN} \\ V_F = -14 \text{ kN} \\ M_F = 1 \text{ kNm} \end{cases}$$

Secção onde o momento é nulo: $M=0 \Rightarrow -6+14x=0 \Rightarrow x=0,429\text{m}$

• **Tramo BF**

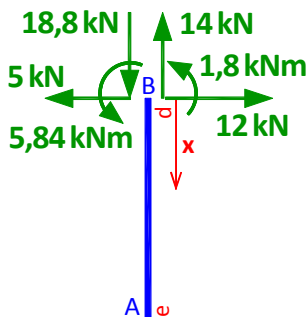


$$\overline{BF} \begin{cases} N(x) = 12 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ V(x) = -14 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = -9 + 1 + 14x = -8 + 14x \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$F (x=0) \Rightarrow \begin{cases} N_F = 12 \text{ kN} \\ V_F = -14 \text{ kN} \\ M_F = -8 \text{ kNm} \end{cases} \quad B (x=0,70 \text{ m}) \Rightarrow \begin{cases} N_B = 12 \text{ kN} \\ V_B = -14 \text{ kN} \\ M_B = 1,8 \text{ kNm} \end{cases}$$

Secção onde o momento é nulo: $M=0 \Rightarrow -8+14x=0 \Rightarrow x=0,571\text{m}$

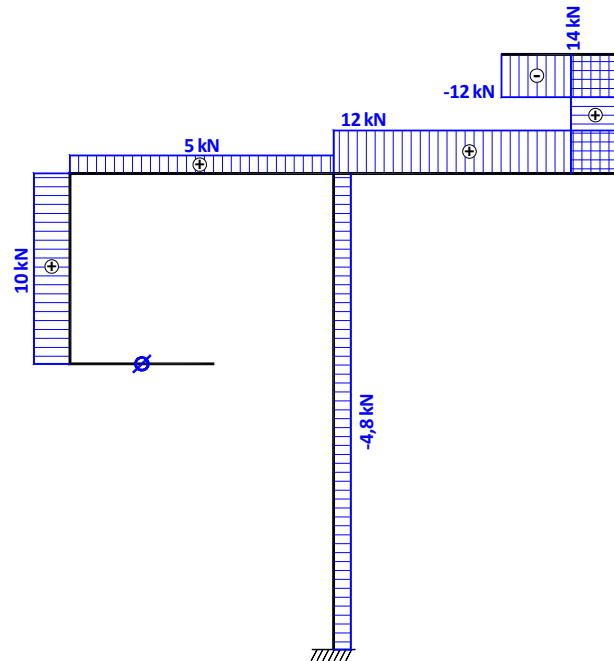
• **Tramo AB**



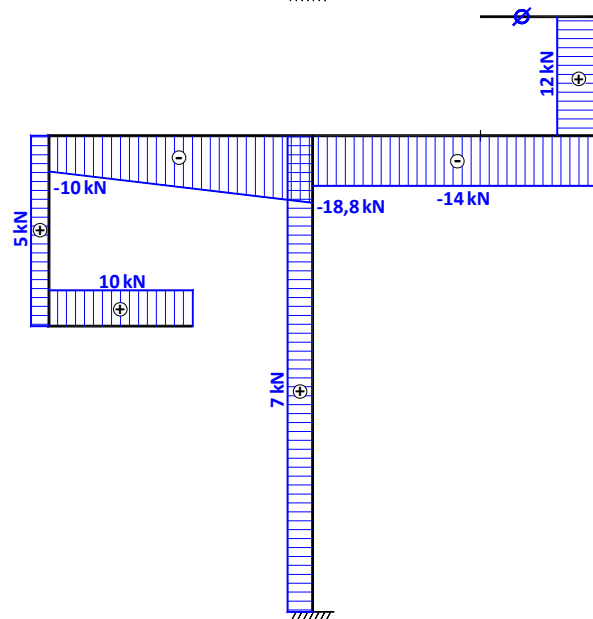
$$\overline{AB} \begin{cases} N(x) = 14 - 18,8 = -4,8 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ V(x) = 12 - 5 = 7 \text{ kN} & \Rightarrow \text{recta de nível} \\ M(x) = 5,84 + 1,8 - 7x = 7,64 - 7x \text{ kNm} & \Rightarrow \text{recta} \end{cases}$$

$$B (x=0) \Rightarrow \begin{cases} N_B = -4,8 \text{ kN} \\ V_B = 7 \text{ kN} \\ M_B = 7,64 \text{ kNm} \end{cases} \quad A (x=2 \text{ m}) \Rightarrow \begin{cases} N_A = -4,8 \text{ kN} \\ V_A = 7 \text{ kN} \\ M_A = -6,36 \text{ kNm} \end{cases}$$

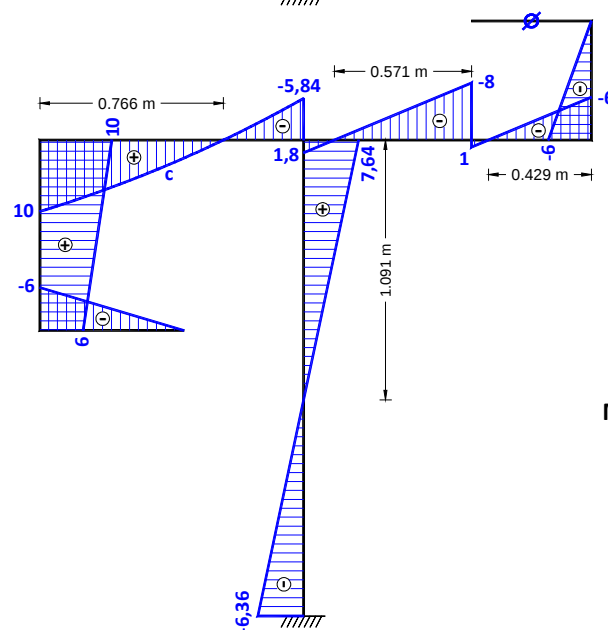
Secção onde o momento é nulo: $M=0 \Rightarrow 7,64-7x=0 \Rightarrow x=1,091\text{m}$



N
ESFORÇO AXIAL
unidade: kN



V
ESFORÇO TRANSVERSO
unidade: kN



M
MOMENTO FLECTOR
unidade: kNm