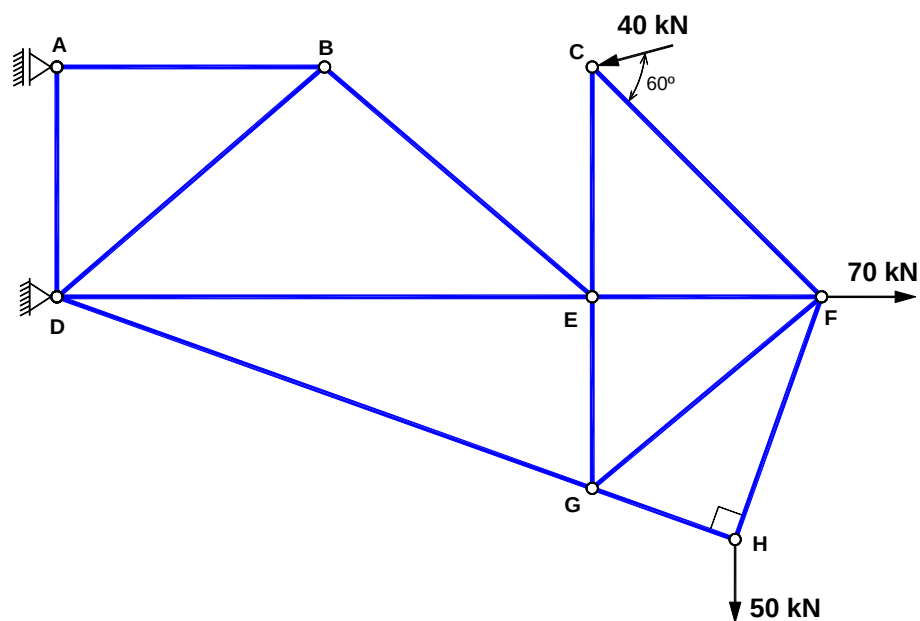


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA

SISTEMA ARTICULADO PLANO



RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO

ISABEL ALVIM TELES

RESOLUÇÃO

1. O Método de Equilíbrio dos Nós permite escrever um sistema de duas equações para cada nó.

$$\text{Sistema de equações para cada nó: } \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

Para ser possível calcular todos os esforços nas barras sem previamente determinar as reacções nos apoios, é necessário que se possa ir avançando de nó para nó resolvendo sistemas de 2 equações com somente 2 incógnitas.

a) Nó C: 2 incógnitas: N_{CE} e N_{CF} ✓

b) Nó H: 2 incógnitas: N_{FH} e N_{GH} ✓

c) Nó F: $\begin{cases} \text{barra CF} \rightarrow \text{esforço já determinado: } N_{CF} \\ \text{barra EF} \rightarrow \text{incógnita } N_{EF} \\ \text{barra FG} \rightarrow \text{incógnita } N_{FG} \\ \text{barra FH} \rightarrow \text{esforço já determinado: } N_{FH} \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ incógnitas: } N_{EF} \text{ e } N_{FG} \quad \checkmark$

d) Nó G: $\begin{cases} \text{barra GH} \rightarrow \text{esforço já determinado: } N_{GH} \\ \text{barra FG} \rightarrow \text{esforço já determinado: } N_{FG} \\ \text{barra EG} \rightarrow \text{incógnita } N_{EG} \\ \text{barra DG} \rightarrow \text{incógnita } N_{DG} \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ incógnitas: } N_{EG} \text{ e } N_{DG} \quad \checkmark$

e) Nó E: $\begin{cases} \text{barra CE} \rightarrow \text{esforço já determinado: } N_{CE} \\ \text{barra EF} \rightarrow \text{esforço já determinado: } N_{EF} \\ \text{barra EG} \rightarrow \text{esforço já determinado: } N_{EG} \\ \text{barra DE} \rightarrow \text{incógnita } N_{DE} \\ \text{barra BE} \rightarrow \text{incógnita } N_{BE} \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ incógnitas: } N_{DE} \text{ e } N_{BE} \quad \checkmark$

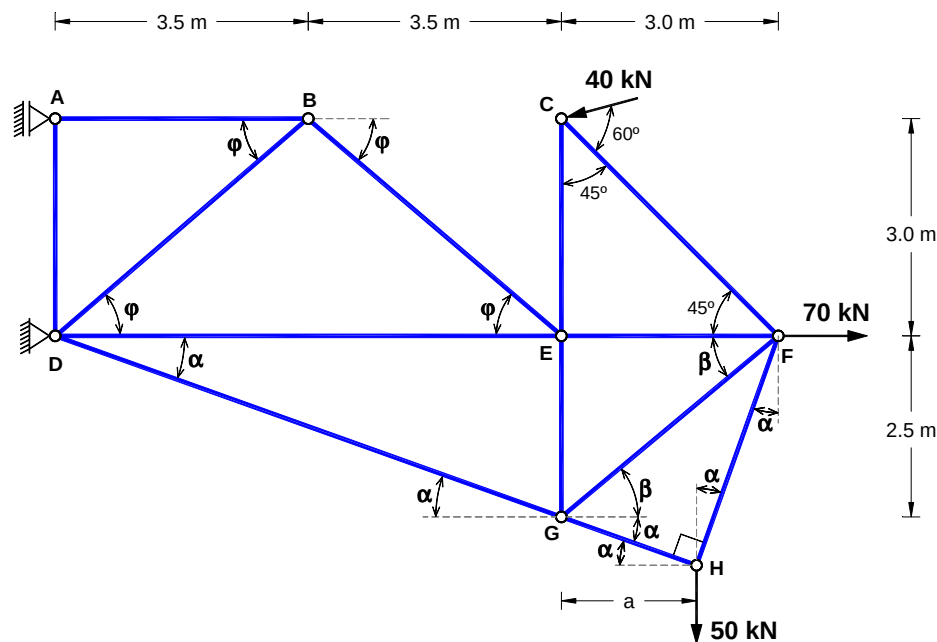
f) Nó B: $\begin{cases} \text{barra BE} \rightarrow \text{esforço já determinado: } N_{BE} \\ \text{barra BD} \rightarrow \text{incógnita } N_{BD} \\ \text{barra AB} \rightarrow \text{incógnita } N_{AB} \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ incógnitas: } N_{BF} \text{ e } N_{AB} \quad \checkmark$

g) Nó A: $\begin{cases} \text{barra AB} \rightarrow \text{esforço já determinado: } N_{AB} \\ \text{barra AD} \rightarrow \text{incógnita } N_{AD} \\ \text{reacção horizontal em A} \rightarrow \text{incógnita } H_A \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ incógnitas: } N_{AD} \text{ e } H_A \quad \checkmark$

h) Nó D: $\begin{cases} \text{barra AD} \rightarrow \text{incógnita } N_{AD} \\ \text{barra DB} \rightarrow \text{incógnita } N_{DB} \\ \text{barra DE} \rightarrow \text{incógnita } N_{DE} \\ \text{barra DG} \rightarrow \text{incógnita } N_{DG} \\ \text{reacção horizontal em B} \rightarrow \text{incógnita } H_D \\ \text{reacção vertical em B} \rightarrow \text{incógnita } V_D \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ incógnitas: } H_D \text{ e } V_D \quad \checkmark$

Conclui-se que é possível calcular todos os esforços nas barras sem previamente determinar as reacções nos apoios.

2.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{EG}}{\overline{ED}} \Rightarrow \alpha = \arctg \frac{2,5}{7} = 19,6538^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0,9417 \\ \sin \alpha = 0,3363 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{EG}}{\overline{EF}} \Rightarrow \beta = \arctg \frac{2,5}{3} = 39,8056^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \beta = 0,7685 \\ \sin \beta = 0,6402 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{3,5} \Rightarrow \varphi = \arctg \frac{3}{3,5} = 40,6013^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = 0,7593 \\ \sin \varphi = 0,6508 \end{cases}$$

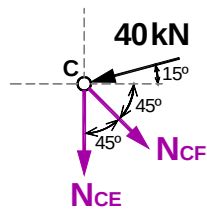
$$\overline{FH} = \overline{DF} \sin \alpha \Rightarrow \overline{FH} = 10 \sin \alpha = 3,363 \text{ m}$$

$$\overline{FG} = \sqrt{3^2 + 2,5^2} = \sqrt{15,25} \text{ m}$$

$$\overline{FG}^2 = \overline{GH}^2 + \overline{FH}^2 \Rightarrow 15,25 = \overline{GH}^2 + (10 \sin \alpha)^2 \Rightarrow \overline{GH} = 1,984 \text{ m}$$

$$a = \overline{GH} \cos \alpha \Rightarrow a = 1,984 \times 0,9417 \Rightarrow a = 1,868 \text{ m}$$

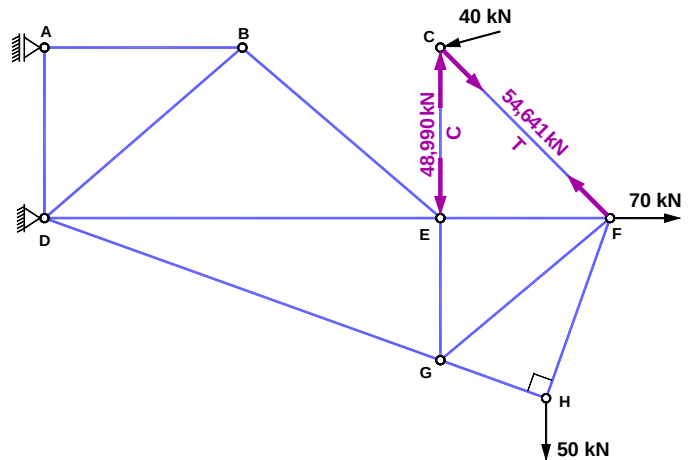
Nó C



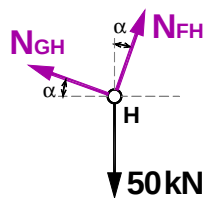
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{CF} \cos 45^\circ - 40 \cos 15^\circ = 0 \\ -N_{CE} - N_{CF} \sin 45^\circ - 40 \sin 15^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{CF} = 54,641 \text{ kN (tracção)} \\ N_{CE} = -48,990 \text{ kN (compressão)} \end{cases}$$



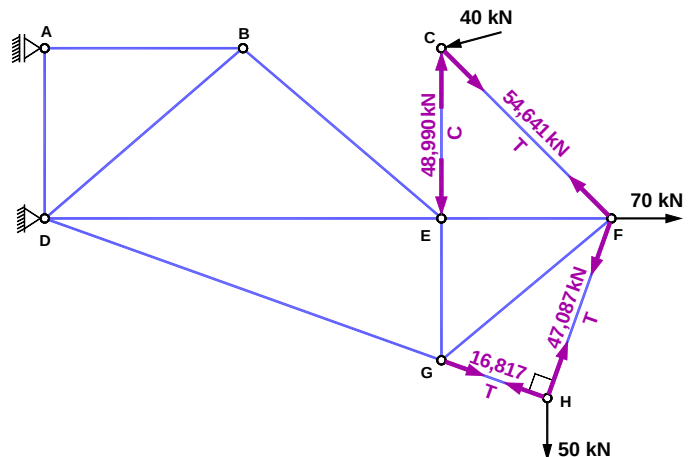
Nó H



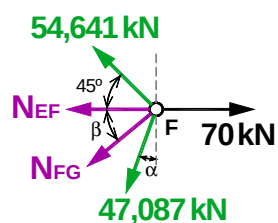
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -N_{GH} \cos \alpha + N_{FH} \sin \alpha = 0 \\ N_{GH} \sin \alpha + N_{FH} \cos \alpha - 50 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{GH} = 16,817 \text{ kN (tracção)} \\ N_{FH} = 47,087 \text{ kN (tracção)} \end{cases}$$



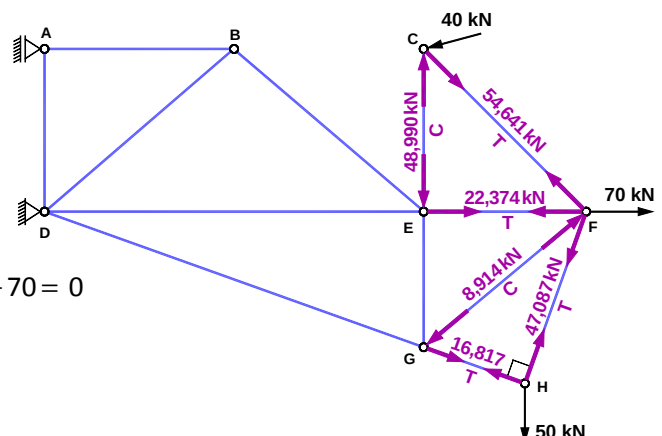
Nó F



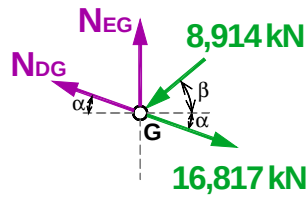
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -N_{EF} - N_{FG} \cos \beta - 54,641 \cos 45^\circ - 47,087 \sin \alpha + 70 = 0 \\ -N_{FG} \sin \beta + 54,641 \sin 45^\circ - 47,087 \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{EF} = 22,374 \text{ kN (tracção)} \\ N_{FG} = -8,914 \text{ kN (compressão)} \end{cases}$$



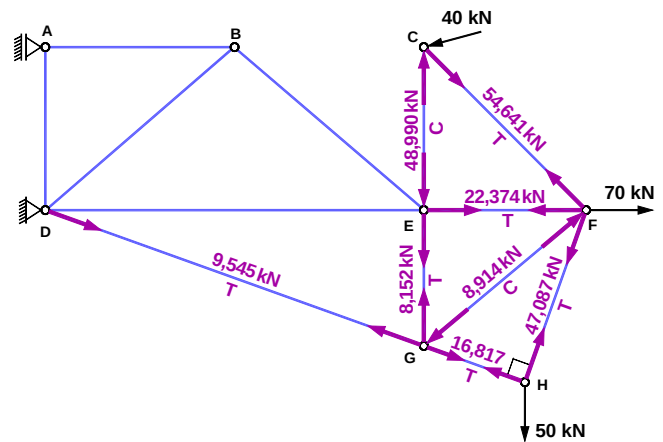
Nó G



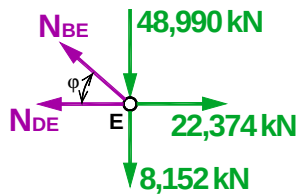
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -N_{DG} \cos \alpha - 8,914 \cos \beta + 16,817 \cos \alpha = 0 \\ N_{DG} \sin \alpha + N_{EG} - 8,914 \sin \beta - 16,817 \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{DG} = 9,545 \text{ kN (tracção)} \\ N_{EG} = 8,152 \text{ kN (tracção)} \end{cases}$$



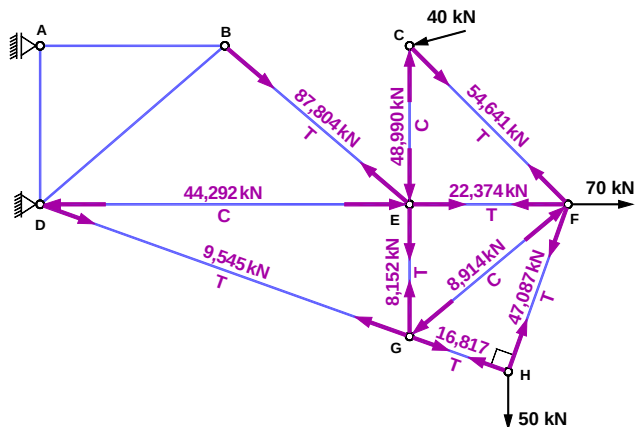
Nó E



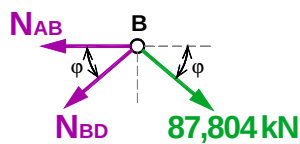
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -N_{DE} - N_{BE} \cos \phi + 22,374 = 0 \\ N_{BE} \sin \phi - 48,990 - 8,152 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{DE} = -44,292 \text{ kN (compressão)} \\ N_{BE} = 87,804 \text{ kN (tracção)} \end{cases}$$



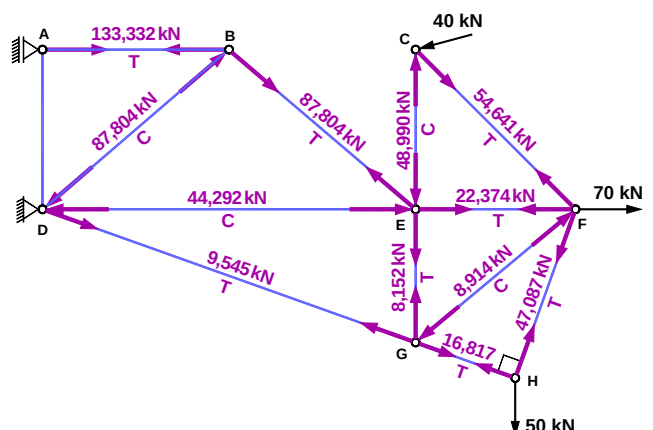
Nó B



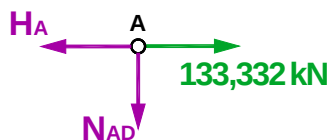
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -N_{AB} - N_{BD} \cos \phi + 87,804 \cos \phi = 0 \\ -N_{BD} \sin \phi - 87,804 \sin \phi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{AB} = 133,332 \text{ kN (tracção)} \\ N_{BD} = -87,804 \text{ kN (compressão)} \end{cases}$$

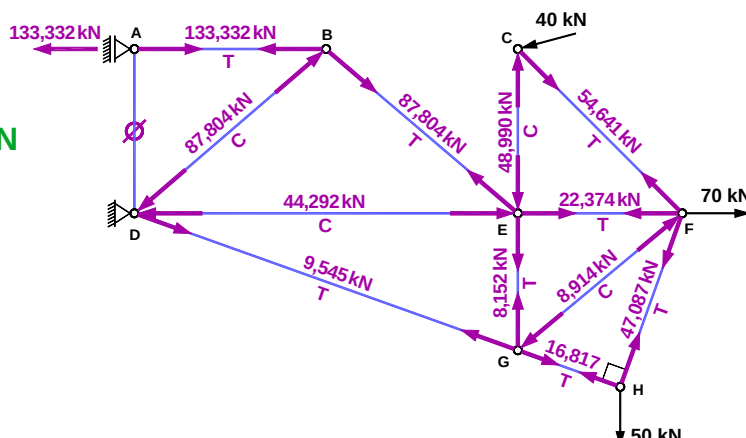


Nó A

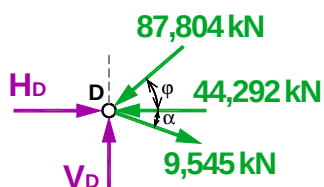


$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 133,332 \text{ kN} \leftarrow \\ N_{AD} = 0 \text{ (barra descarregada)} \end{cases}$$



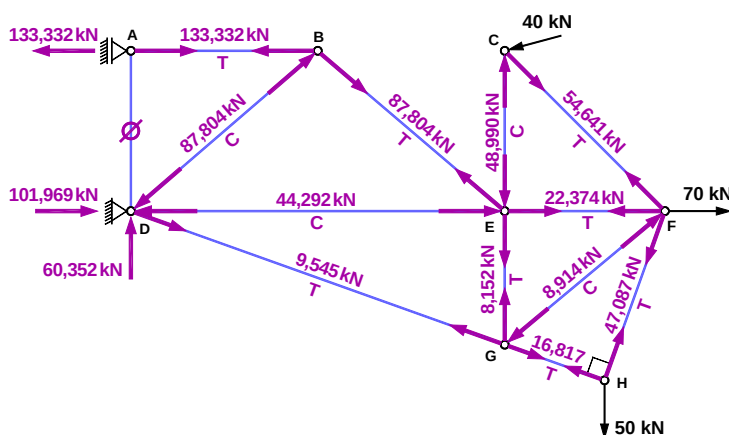
Nó D



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_D - 44,292 - 87,804 \cos \varphi + 9,545 \cos \alpha = 0 \\ V_D - 87,804 \sin \varphi - 9,545 \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

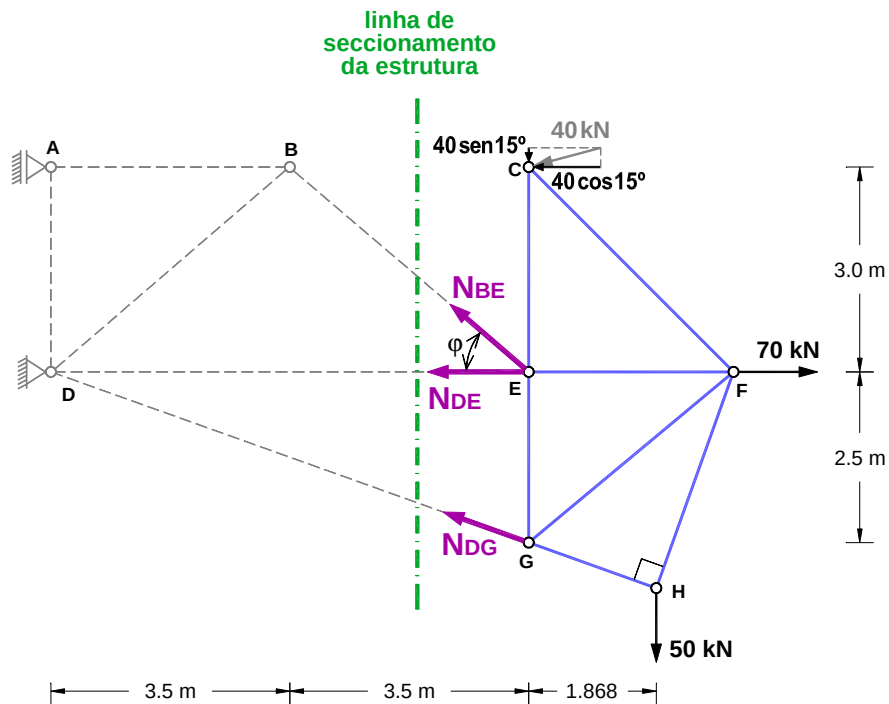
$$\begin{cases} H_D = 101,969 \text{ kN} \rightarrow \\ V_D = 60,352 \text{ kN} \uparrow \end{cases}$$



QUADRO RESUMO DOS ESFORÇOS NAS BARRAS

Barras	Compressão (kN)	Tracção (kN)
AB	—	133,33
AD	0	0
BD	87,80	—
BE	—	87,80
CE	48,99	—
CF	—	54,64
DE	44,29	—
DG	—	9,55
EF	—	22,37
EG	—	8,15
FG	8,91	—
FH	—	47,09
GH	—	16,82

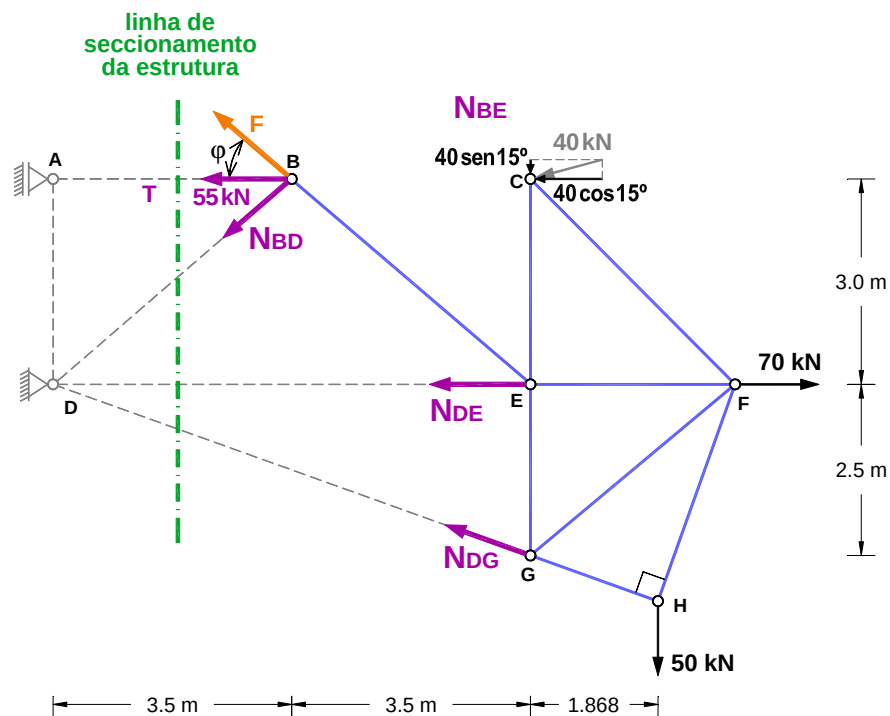
3.



$$\sum M_D = 0 \Rightarrow N_{BE} \sin \varphi \times 7 + 40 \cos 15^\circ \times 3 - 40 \sin 15^\circ \times 7 - 50 \times 8,868 = 0$$

$$N_{BE} = 87,80 \text{ kN (tracção)}$$

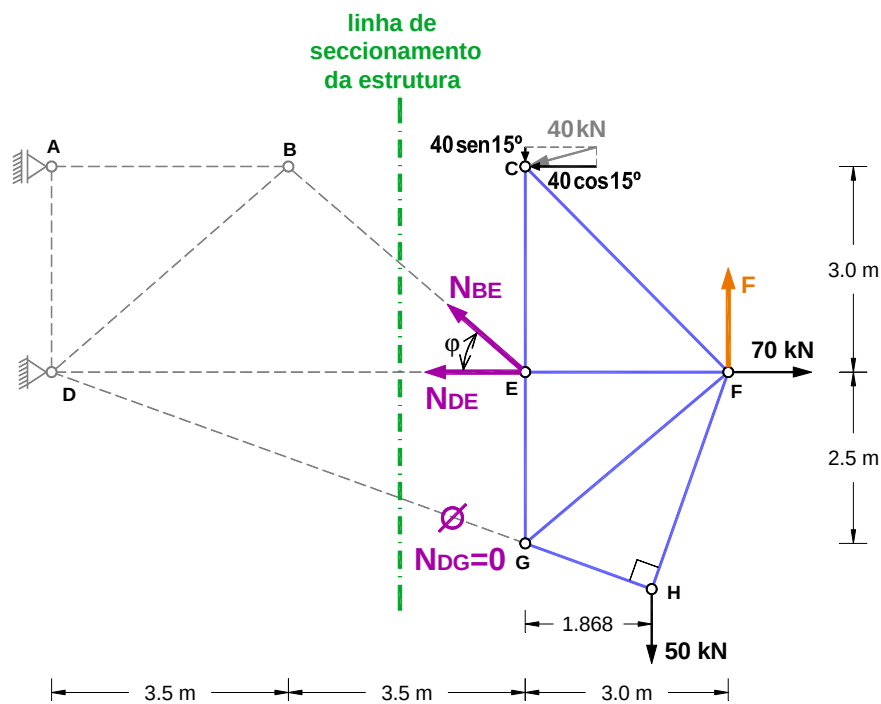
4.



$$\sum M_D = 0 \Rightarrow F \sin \varphi \times 3,5 + F \cos \varphi \times 3 + 55 \times 3 + 40 \cos 15^\circ \times 3 - 40 \sin 15^\circ \times 7 - 50 \times 8,868 = 0$$

$$F = 51,58 \text{ kN}$$

5.



$$\sum M_E = 0 \Rightarrow F \times 3 + 40 \cos 15^\circ \times 3 - 50 \times 1,868 = 0$$

$$F = -7,50 \text{ kN} \Rightarrow F = 7,50 \text{ kN} \downarrow$$

Para uma força vertical descendente $F = 7,5 \text{ kN} \Rightarrow$ barra DG está descarregada ($N_{DG} = 0$)

Para uma força vertical descendente $F > 7,5 \text{ kN} \Rightarrow$ barra DG está comprimida