LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA

GEOMETRIA DE MASSAS

RESUMO / FORMULÁRIO

ISABEL ALVIM TELES

GEOMETRIA DE MASSAS

RESUMO

NOTA: As expressões apresentadas foram deduzidas para as condições representadas nas figuras anexas.

DETERMINAÇÃO DAS COORDENADAS DO CENTRO DE GRAVIDADE

Secções constituídas pelo mesmo material

$$\mathbf{u}_G = \frac{\sum A_i \, . \, u_{Gi}}{\sum A_i}$$

$$\mathbf{v}_G = \frac{\sum A_i \, . \, v_{Gi}}{\sum A_i}$$

Secções constituídas por materiais diferentes

$$\mathbf{u}_G = \frac{\sum A_i \, . \, \gamma_i \, . \, u_{Gi}}{\sum A_i \, . \, \gamma_i}$$

$$\mathbf{v}_G = \frac{\sum A_i \, . \, \gamma_i \, . \, v_{Gi}}{\sum A_i \, . \, \gamma_i}$$

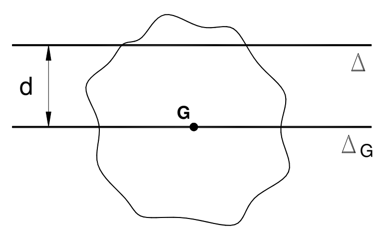
MOMENTO DE INÉRCIA

TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS (STEINER)

$$\boxed{\mathbf{I}_\Delta = \mathbf{I}_{\Delta_G} + d^2 . A}$$

A – área da secção

d – distância entre os dois eixos (um dos quais baricêntrico)



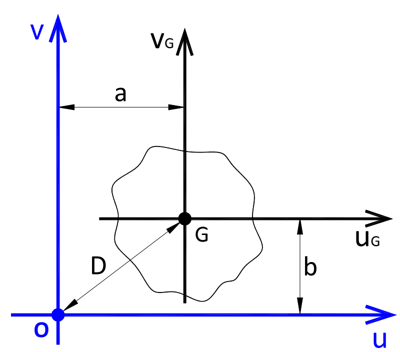
MOMENTO DE INÉRCIA POLAR

$$\mathbf{I_O} = \mathbf{I}_u + \mathbf{I}_v$$

Teorema da transferência: $\boxed{\mathbf{I_O} = \mathbf{I}_G + D^2 . A}$

A – área da secção

$D^2 = a^2 + b^2$



RAIO DE GIRAÇÃO

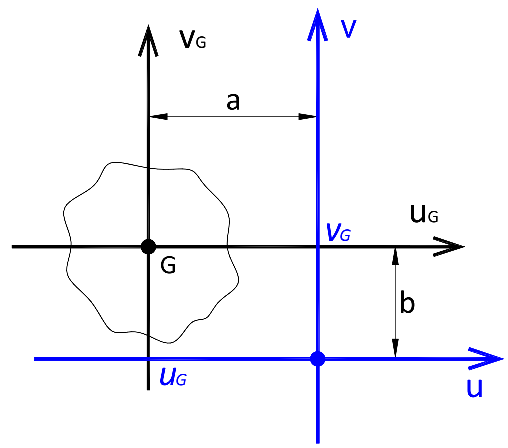
$$\mathbf{i_\Delta} = \sqrt{\frac{\mathbf{I}_\Delta}{A}}$$

com: $\mathbf{I_\Delta}$ – Momento de inércia

A – área da secção

PRODUTO DE INÉRCIA

Teorema da transferência: $\boxed{\mathbf{I}_{uv} = \mathbf{I}_{u_G v_G} + a.b.A}$



($\mathbf{u_G}$; $\mathbf{v_G}$) – eixos baricêntricos

a = u_G → Coordenada **u** do centro de centro de gravidade no sistema de eixos (**u**; **v**).

No exemplo representado na figura u_G é negativo.

b = v_G → Coordenada **v** do centro de centro de gravidade no sistema de eixos (**u**; **v**).

No exemplo representado na figura v_G é positivo.

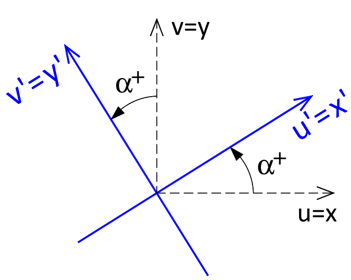
ROTAÇÃO DE EIXOS

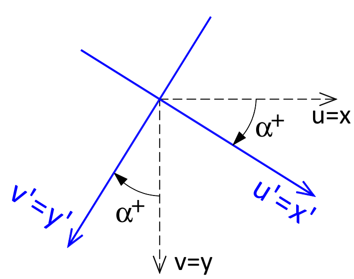
$$\mathbf{I}_{u'} = \frac{\mathbf{I}_u + \mathbf{I}_v}{2} + \frac{\mathbf{I}_u - \mathbf{I}_v}{2}\cos 2\alpha - \mathbf{I}_{uv}\,\mathrm{sen}\,2\alpha \quad \text{ou} \quad \mathbf{I}_{u'} = \mathbf{I}_u \cos^2\alpha + \mathbf{I}_v\,\mathrm{sen}^2\alpha - \mathbf{I}_{uv}\,\mathrm{sen}\,2\alpha$$

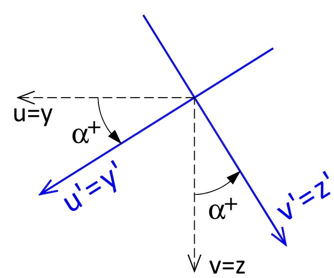
$$\mathbf{I}_{v'} = \frac{\mathbf{I}_u + \mathbf{I}_v}{2} - \frac{\mathbf{I}_u - \mathbf{I}_v}{2}\cos 2\alpha + \mathbf{I}_{uv}\,\mathrm{sen}\,2\alpha \quad \text{ou} \quad \mathbf{I}_{v'} = \mathbf{I}_u\,\mathrm{sen}^2\alpha + \mathbf{I}_v \cos^2\alpha + \mathbf{I}_{uv}\,\mathrm{sen}\,2\alpha$$

$$\mathbf{I}_{u'v'} = \frac{\mathbf{I}_u - \mathbf{I}_v}{2}\,\mathrm{sen}\,2\alpha + \mathbf{I}_{uv}\cos 2\alpha \quad \text{ou} \quad \mathbf{I}_{u'v'} = (\mathbf{I}_u - \mathbf{I}_v)\,\mathrm{sen}\,\alpha.\cos\alpha + \mathbf{I}_{uv}(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha)$$

<u>sentido positivo de α^+</u>: de **u** para **v** (**u** – eixo *menor*; **v** – eixo *maior*)

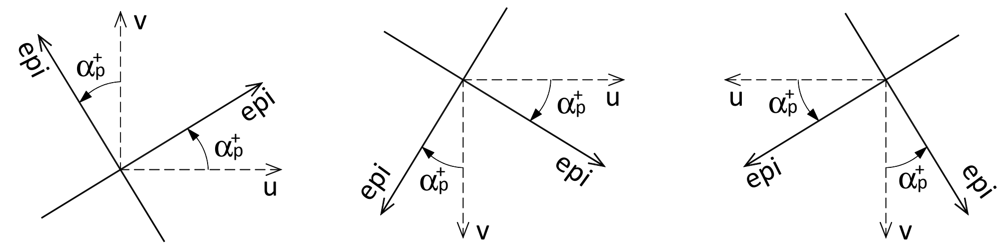






EIXOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA E MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA

$\alpha_p = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{2\,I_{uv}}{I_u - I_v}\right) \pm 90°$ sentido positivo de $\boldsymbol{\alpha_p}$: de **u** para **v** (**u**: eixo *menor*; **v**: eixo *maior*)



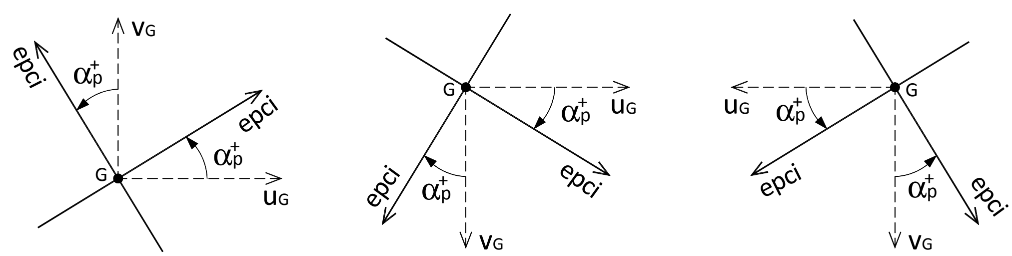
$$\begin{cases} I_{máx} = I_1 = \dfrac{I_u + I_v}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(I_u - I_v)^2 + 4\,I_{uv}^2} \\[2ex] I_{mín} = I_2 = \dfrac{I_u + I_v}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(I_u - I_v)^2 + 4\,I_{uv}^2} \end{cases}$$

Se $I_u > I_v$ $\Rightarrow$ eixo **1** mais próximo de **u**

Se $I_v > I_u$ $\Rightarrow$ eixo **1** mais próximo de **v**

EIXOS PRINCIPAIS CENTRAIS DE INÉRCIA E MOMENTOS PRINCIPAIS CENTRAIS DE INÉRCIA

$\alpha_p = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{2\,I_{u_G v_G}}{I_{u_G} - I_{v_G}}\right) \pm 90°$ <u>sentido positivo</u> de $\boldsymbol{\alpha_p}$: de $\mathbf{u_G}$ para $\mathbf{v_G}$ ($\mathbf{u_G}$: eixo *menor*; $\mathbf{v_G}$: eixo *maior*)



$$\begin{cases} I_{máx} = I_1 = \dfrac{I_{u_G} + I_{v_G}}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(I_{u_G} - I_{v_G})^2 + 4\,I_{u_G v_G}^2} \\[2ex] I_{mín} = I_2 = \dfrac{I_{u_G} + I_{v_G}}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(I_{u_G} - I_{v_G})^2 + 4\,I_{u_G v_G}^2} \end{cases}$$

Se $I_{u_G} > I_{v_G}$ $\Rightarrow$ eixo **1** mais próximo de $\mathbf{u_G}$

Se $I_{u_G} < I_{v_G}$ $\Rightarrow$ eixo **1** mais próximo de $\mathbf{v_G}$