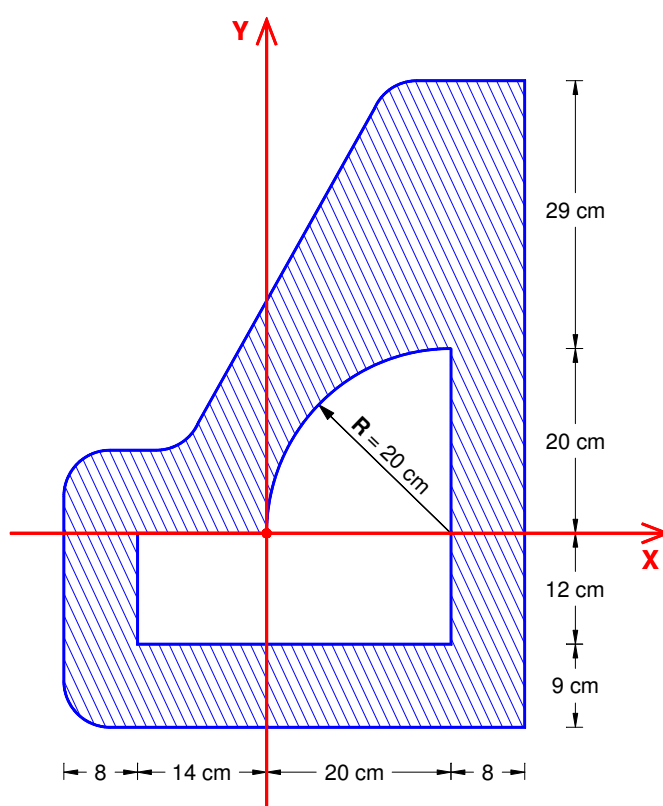


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA



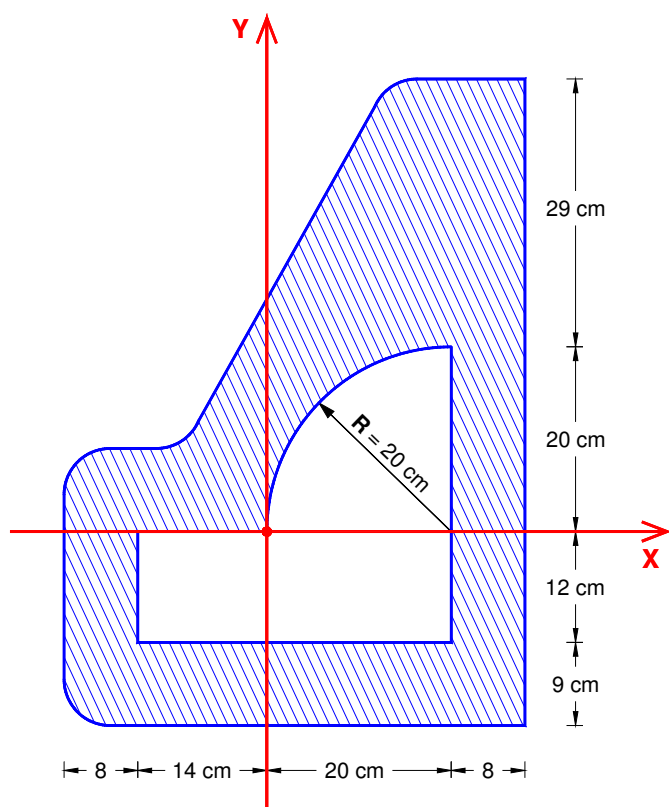
GEOMETRIA DE MASSAS

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO DO EXAME DE RECURSO
ANO LETIVO 2020 - 21

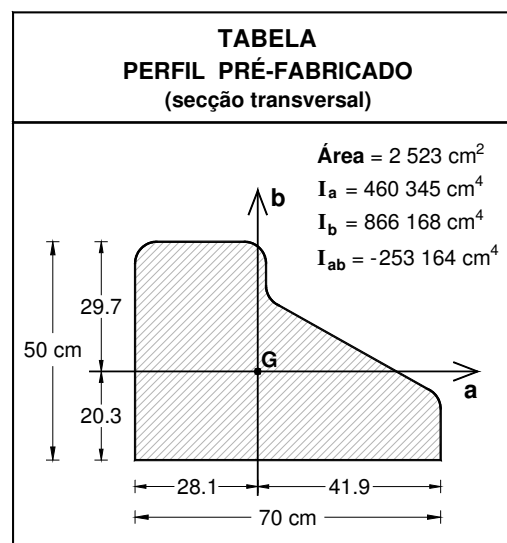
ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

A secção plana da Figura foi obtida introduzindo uma abertura interior no perfil pré-fabricado representado na tabela.



Figura



- a) Considere o sistema de eixos (x,y) representado na Figura.

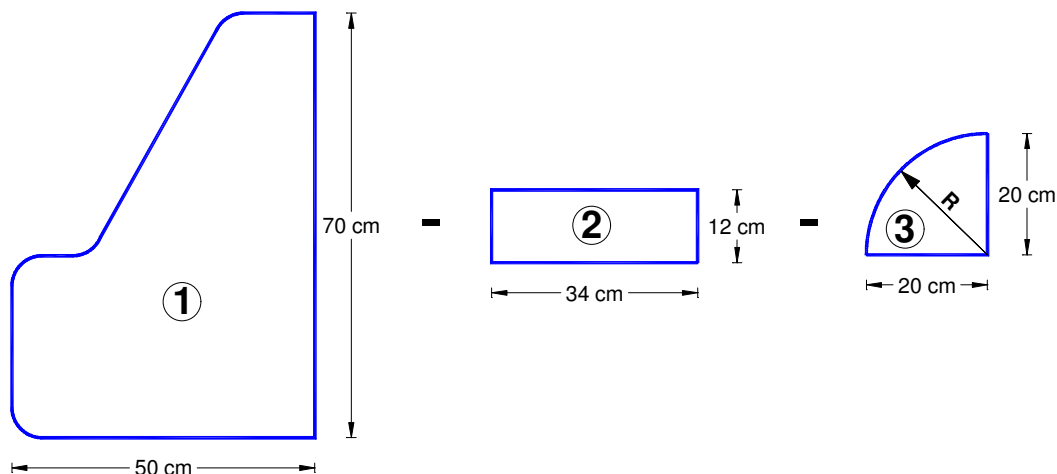
A coordenada x_G do centro de gravidade é $x_G = 8,10\text{ cm}$.

Determine a coordenada y_G do centro de gravidade e represente-o na figura.

- b) Determine e represente na figura a posição do eixo principal de maior inércia relativamente ao sistema de eixos (x,y) e calcule o valor do momento de inércia correspondente.

RESOLUÇÃO

Alínea a)



$$\text{Secção 1: } \begin{cases} A_1 = 2523 \text{ cm}^2 \\ X_{G1} = 28 - 20,3 = 7,7 \text{ cm} \\ Y_{G1} = 28,1 - 21 = 7,1 \text{ cm} \end{cases}$$

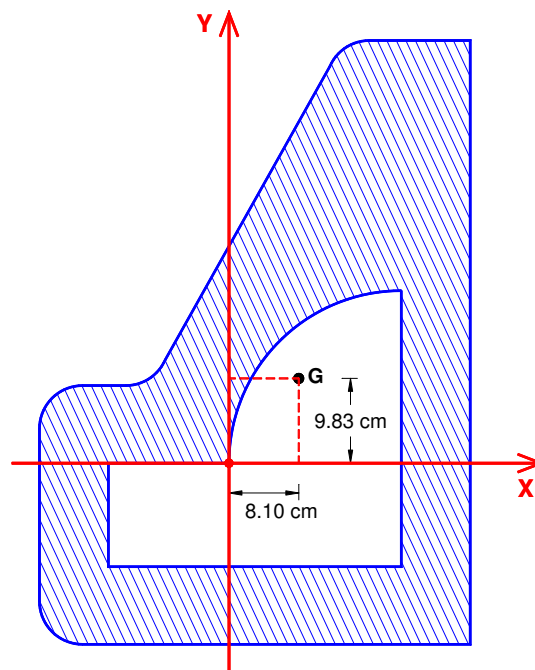
$$\text{Secção 2: } \begin{cases} A_2 = 34 \times 12 = 408 \text{ cm}^2 \\ X_{G2} = 20 - \frac{34}{2} = 3 \text{ cm} \\ Y_{G2} = -\frac{12}{2} = -6 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Secção 3: } \begin{cases} A_3 = \frac{\pi \times 20^2}{4} = 100\pi \text{ cm}^2 \\ X_{G3} = 20 - \frac{4 \times 20}{3\pi} = 20 - \frac{80}{3\pi} \text{ cm} \\ Y_{G3} = \frac{4 \times 20}{3\pi} = \frac{80}{3\pi} \text{ cm} \end{cases}$$

Secção	A_i (cm ²)	Y_{Gi} (cm)	$A_i \times Y_{Gi}$
1	2523	7,1	17 913,30
- 2	- 408	- 6	2 448,00
- 3	- 100 π	$\frac{80}{3\pi}$	- 2 666,67
Σ	1 800,84		17 694,63

$$X_G = 8,10 \text{ cm} \quad (\text{enunciado})$$

$$Y_G = \frac{\sum A_i \cdot Y_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{17 694,63}{1 800,84} = 9,83 \text{ cm}$$



Alínea b)

Determinação dos momentos de inércia I_X e I_Y

Teorema da transferência: $I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + A \cdot d^2$

$$\begin{cases} I_X = I_{X_G} + A \cdot Y_G^2 \\ I_Y = I_{Y_G} + A \cdot X_G^2 \end{cases}$$

Secção 1:
$$\begin{cases} I_X^{(1)} = 866168 + 2523 \times 7,1^2 = 993352,43 \text{ cm}^4 \\ I_Y^{(1)} = 460345 + 2523 \times 7,7^2 = 609933,67 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Secção 2:
$$\begin{cases} I_X^{(2)} = \frac{34 \times 12^3}{3} = 19584 \text{ cm}^4 \\ I_Y^{(2)} = \frac{12 \times 34^3}{12} + 408 \times 3^2 = 42976 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Secção 3:
$$\begin{cases} I_X^{(3)} = \frac{\pi \times 20^4}{16} = 31415,93 \text{ cm}^4 \\ I_Y^{(3)} = 20^4 \times \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + 100\pi \times \left(20 - \frac{80}{3\pi} \right)^2 = 50412,97 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

• **Momentos de Inércia**

$$I_X = I_X^{(1)} - I_X^{(2)} - I_X^{(3)} = 993352,43 - 19584 - 31415,93 = 942652,50 \text{ cm}^4$$

$$I_Y = I_Y^{(1)} - I_Y^{(2)} - I_Y^{(3)} = 609933,67 - 42976 - 50412,97 = 516544,70 \text{ cm}^4$$

Determinação do produto de inércia I_{XY}

Teorema da transferência: $I_{XY} = I_{X_G Y_G} + A \cdot X_G \cdot Y_G$

• **Secção 1**

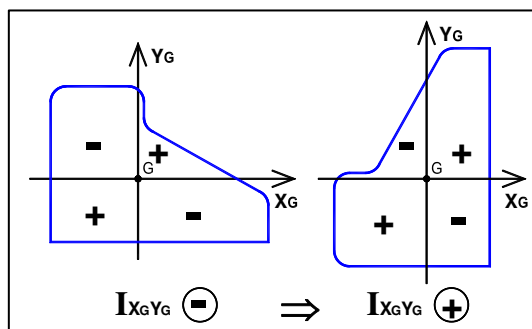
$$I_{XY}^{(1)} = I_{X_{G1} Y_{G1}}^{(1)} + A_1 \cdot X_{G1} \cdot Y_{G1}$$

$$I_{XY}^{(1)} = 253164 + 2523 \times 7,7 \times 7,1 = 391096,41 \text{ cm}^4$$

• **Secção 2**

$$I_{XY}^{(2)} = I_{X_{G2} Y_{G2}}^{(2)} + A_2 \cdot X_{G2} \cdot Y_{G2}$$

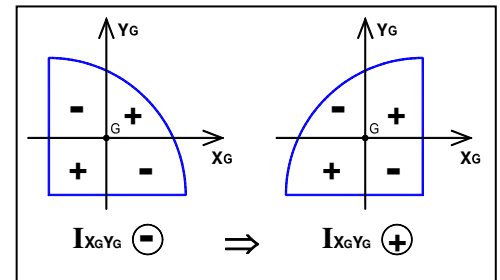
$$I_{XY}^{(2)} = 0 + 408 \times 3 \times (-6) = -7344 \text{ cm}^4$$



• **Secção 3**

$$I_{XY}^{(3)} = I_{X_{G3}Y_{G3}}^{(3)} + A_3 \cdot X_{G3} \cdot Y_{G3}$$

$$I_{XY}^{(3)} = 20^4 \times \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8} \right) + 100\pi \times \left(20 - \frac{80}{3\pi} \right) \times \frac{80}{3\pi} = 33\,333,33 \text{ cm}^4$$



• **Produto de Inércia**

$$I_{XY} = I_{XY}^{(1)} - I_{XY}^{(2)} - I_{XY}^{(3)} = 391096,41 - (-7344) - 33\,333,33 = 365107,08 \text{ cm}^4$$

• **Eixos Principais de Inércia (EPI) a passar em O**

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(- \frac{2 I_{XY}}{I_X - I_Y} \right) \pm 90^\circ$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(- \frac{2 \times 365107,08}{942\,352,50 - 516\,544,70} \right) \pm 90^\circ = -29,88^\circ \pm 90^\circ$$

Eixo em relação ao qual o momento de inércia é máximo $\Rightarrow$ **eixo 1**

$$\text{Como } I_X > I_Y \Rightarrow \begin{cases} \text{eixo 1 mais próximo do eixo X} \\ \text{eixo 2 mais próximo do eixo Y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{p1} = -29,88 \\ \alpha_{p2} = -29,88^\circ + 90^\circ = 60,12^\circ \end{cases}$$

Momento Principal de Inércia máximo $\Rightarrow I_{\text{máx}} = I_1$

$$I_{\text{máx}} = I_1 = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4 I_{XY}^2} =$$

$$= \frac{942\,352,50 + 516\,544,70}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(942\,352,50 - 516\,544,70)^2 + 4 \times 365107,08^2}$$

$$I_{\text{máx}} = I_1 = 1\,152\,096,50 \text{ cm}^4$$

