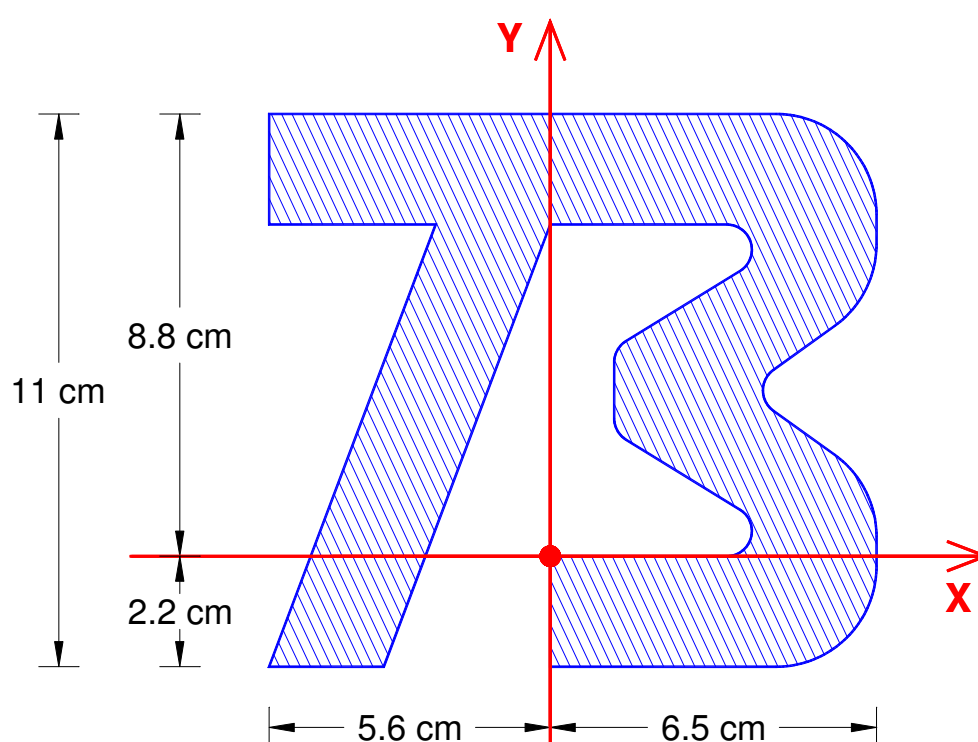


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA



GEOMETRIA DE MASSAS

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO DO EXAME DE RECURSO

ANO LETIVO 2021 / 22

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

A secção plana da *Figura 1* foi obtida unindo as duas secções que constam da tabela abaixo representada.

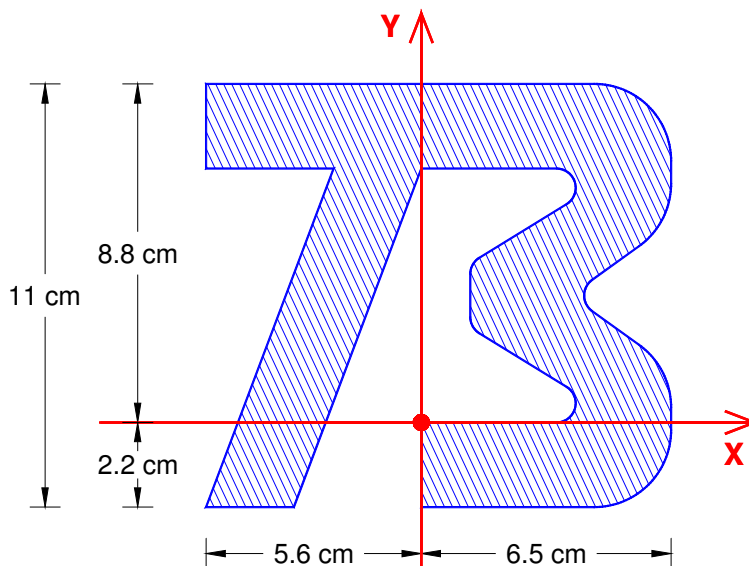


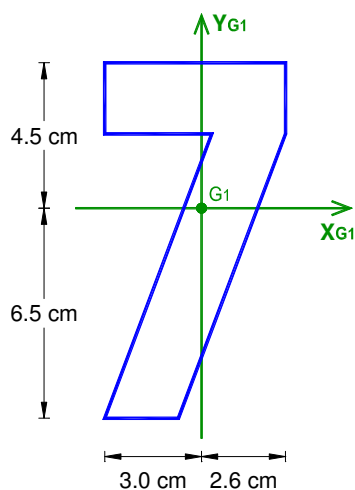
Figura 1

TABELA CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS	
$\text{Área} = 32,8 \text{ cm}^2$ $I_a = 366,10 \text{ cm}^4$ $I_b = 54,65 \text{ cm}^4$ $I_{ab} = -47,0 \text{ cm}^4$	$\text{Área} = 47,5 \text{ cm}^2$ $I_a = 132,30 \text{ cm}^4$ $I_b = 588,60 \text{ cm}^4$ $I_{ab} = 0$

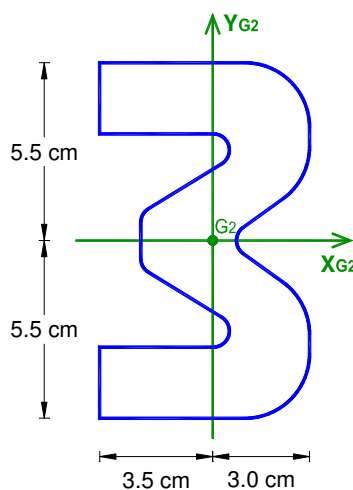
- a)** Considere a secção e o sistema de eixos (x,y) representados na *Figura 1*.
Determine as coordenadas do centro de gravidade e represente-o na figura.
- b)** Determine e represente na figura a posição do eixo principal de maior inércia relativamente ao sistema de eixos (x,y) e calcule o valor do momento de inércia correspondente.

RESOLUÇÃO

Alínea a)



Secção 1



Secção 2

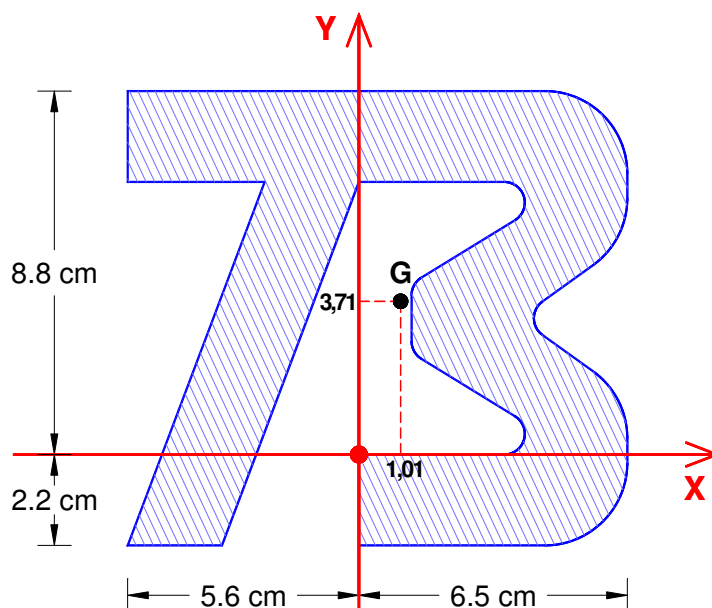
Secção 1: $\begin{cases} A_1 = 32,8 \text{ cm}^2 \\ X_{G1} = -2,6 \text{ cm} \\ Y_{G1} = 6,5 - 2,2 = 4,3 \text{ cm} \end{cases}$

Secção 2: $\begin{cases} A_1 = 47,5 \text{ cm}^2 \\ X_{G1} = 3,5 \text{ cm} \\ Y_{G1} = 5,5 - 2,2 = 3,3 \text{ cm} \end{cases}$

Secção	A_i (cm ²)	X_{Gi} (cm)	Y_{Gi} (cm)	$A_i \times X_{Gi}$	$A_i \times Y_{Gi}$
1	32,8	- 2,6	4,3	- 85,28	141,04
2	47,5	3,5	3,3	166,25	156,75
Σ	80,3			80,97	297,79

$$x_G = \frac{\sum A_i \cdot X_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{80,97}{80,3} = 1,01 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{\sum A_i \cdot Y_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{297,79}{80,3} = 3,71 \text{ cm}$$



Alínea b)

Determinação dos momentos de inércia I_X e I_Y

Teorema da transferência: $I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + A \cdot d^2$

$$\begin{cases} I_X = I_{X_G} + A \cdot Y_G^2 \\ I_Y = I_{Y_G} + A \cdot X_G^2 \end{cases}$$

Secção 1:
$$\begin{cases} I_X^{(1)} = 366,10 + 32,8 \times 4,3^2 = 972,572 \text{ cm}^4 \\ I_Y^{(1)} = 54,65 + 32,8 \times (-2,6)^2 = 276,378 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Secção 2:
$$\begin{cases} I_X^{(2)} = 588,60 + 47,5 \times 3,3^2 = 1105,875 \text{ cm}^4 \\ I_Y^{(2)} = 132,30 + 47,5 \times 3,5^2 = 714,175 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

• **Momentos de Inércia**

$$I_X = I_X^{(1)} + I_X^{(2)} = 972,572 + 1105,875 = 2078,447 \text{ cm}^4$$

$$I_Y = I_Y^{(1)} + I_Y^{(2)} = 276,378 + 714,175 = 990,553 \text{ cm}^4$$

Determinação do produto de inércia I_{XY}

Teorema da transferência: $I_{XY} = I_{X_G Y_G} + A \cdot X_G \cdot Y_G$

• **Secção 1**

$$I_{XY}^{(1)} = I_{X_{G1} Y_{G1}} + A_1 \cdot X_{G1} \cdot Y_{G1}$$

$$I_{XY}^{(1)} = 47,0 + 32,8 \times (-2,6) \times 4,3 = -319,704 \text{ cm}^4$$

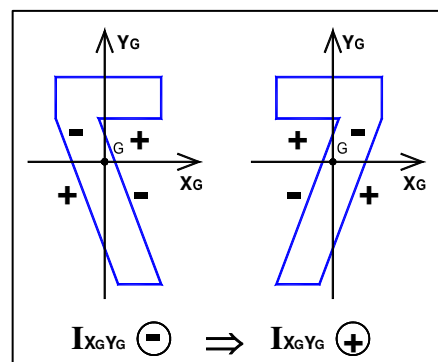
• **Secção 2**

$$I_{XY}^{(2)} = I_{X_{G2} Y_{G2}} + A_2 \cdot X_{G2} \cdot Y_{G2}$$

$$I_{XY}^{(2)} = 0 + 47,5 \times 3,5 \times 3,3 = 548,625 \text{ cm}^4$$

• **Produto de Inércia**

$$I_{XY} = I_{XY}^{(1)} + I_{XY}^{(2)} = -319,704 + 548,625 = 228,921 \text{ cm}^4$$



• Eixos Principais de Inércia (EPI) a passar em O

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(- \frac{2 I_{XY}}{I_X - I_Y} \right) \pm 90^\circ$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(- \frac{2 \times 228,921}{2078,447 - 990,553} \right) \pm 90^\circ = -11,41^\circ \pm 90^\circ$$

Eixo em relação ao qual o momento de inércia é máximo $\Rightarrow$ **eixo 1**

$$\text{Como } I_X > I_Y \Rightarrow \begin{cases} \text{eixo 1 mais próximo do eixo X} \\ \text{eixo 2 mais próximo do eixo Y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{p1} = -11,41^\circ \\ \alpha_{p2} = -11,41^\circ + 90^\circ = 78,59^\circ \end{cases}$$

Momento Principal de Inércia máximo $\Rightarrow I_{\text{máx}} = I_1$

$$\begin{aligned} I_{\text{máx}} = I_1 &= \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4 I_{XY}^2} = \\ &= \frac{2078,447 + 990,553}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(2078,447 - 990,553)^2 + 4 \times 228,921^2} \end{aligned}$$

$$I_{\text{máx}} = I_1 = 2124,655 \text{ cm}^4$$

