

ISABEL ALVIM TELES

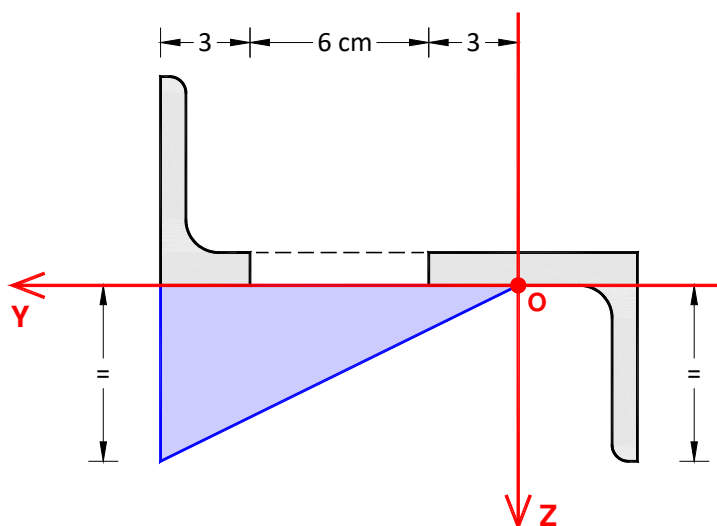
EXERCÍCIO

Considere o sistema de eixos (Y,Z) e a secção plana representada na figura, composta por um triângulo e um perfil Z (ver características expressas na tabela abaixo) a que foi retirada uma secção com 6 cm de largura.

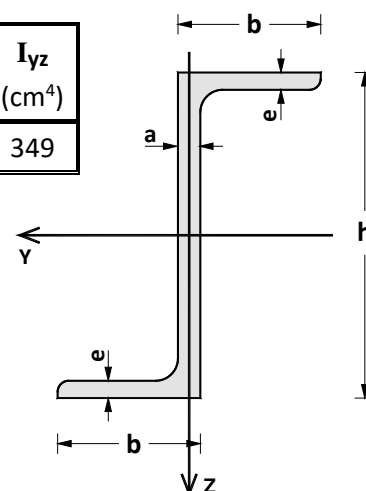
- Determine as coordenadas do centro de gravidade, posicionando-o na figura;
- Determine os momentos de inércia I_Y e I_Z e o produto de inércia I_{YZ} ;
- Posicione na figura o eixo que passa em O e em relação ao qual o momento de inércia é máximo. Determine o valor desse momento de inércia máximo.

Notas importantes:

- Utilize a unidade de comprimento “centímetro” [cm].
- Utilize nos cálculos o mínimo de 2 casas decimais.

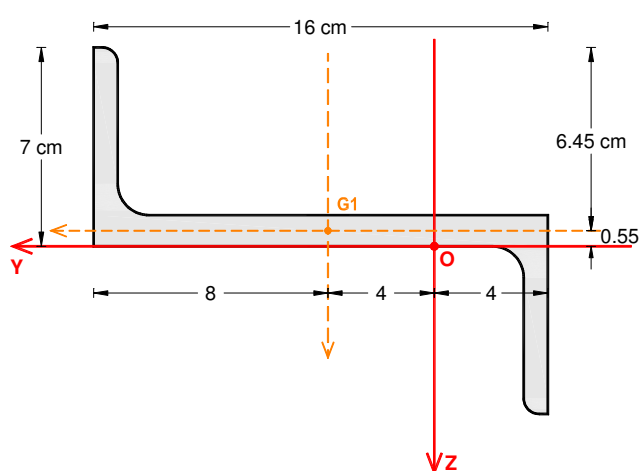
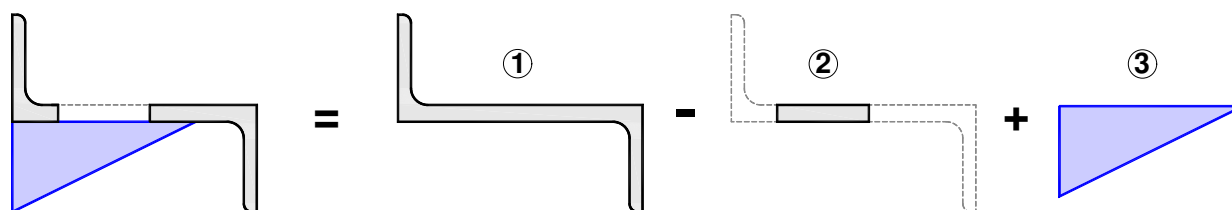


Perfil Z	Massa (kg/m)	Área (cm ²)	h (mm)	b (mm)	e (mm)	a (mm)	I_Y (cm ⁴)	I_Z (cm ⁴)	I_{YZ} (cm ⁴)
	21,6	27,50	160	70	8,5	11	1060	204	349

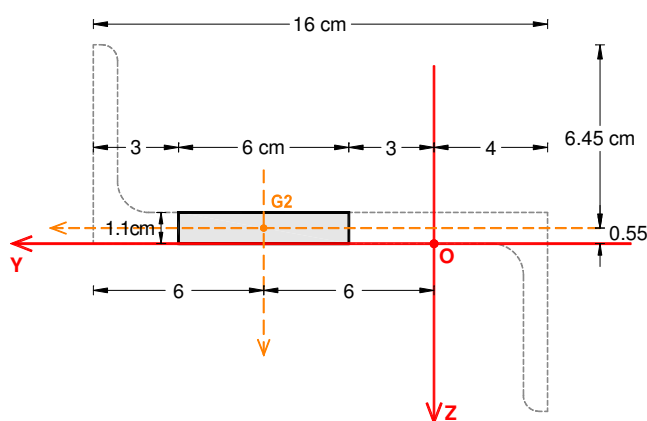


RESOLUÇÃO

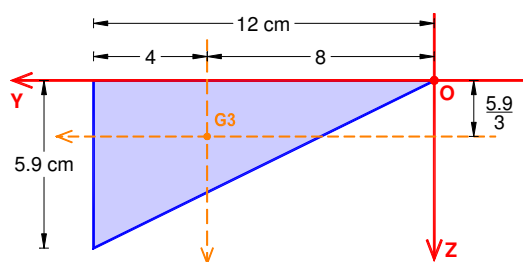
Alínea a)



$$\text{Secção 1: } \begin{cases} A_1 = 27,50 \text{ cm}^2 \\ Y_{G1} = 4 \text{ cm} \\ Z_{G1} = -0,55 \text{ cm} \end{cases}$$



$$\text{Secção 2: } \begin{cases} A_2 = 6 \times 1,1 = 6,6 \text{ cm}^2 \\ Y_{G2} = 6 \text{ cm} \\ Z_{G2} = -0,55 \text{ cm} \end{cases}$$

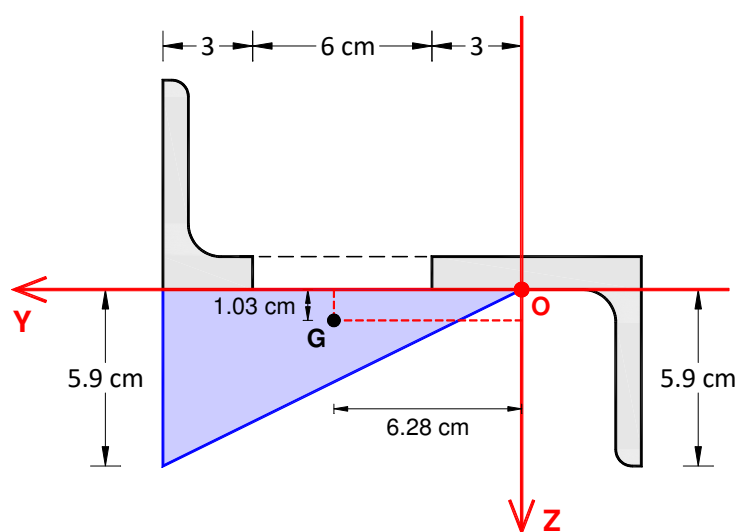


$$\text{Secção 3: } \begin{cases} A_3 = \frac{12 \times 5,9}{2} = 35,4 \text{ cm}^2 \\ Y_{G3} = 8 \text{ cm} \\ Z_{G3} = \frac{5,9}{3} \text{ cm} \end{cases}$$

Secção	A_i (cm ²)	Y_{Gi} (cm)	Z_{Gi} (cm)	$A_i \times Y_{Gi}$	$A_i \times Z_{Gi}$
1	27,50	4	- 0,55	110	- 15,125
-2	6,6	6	- 0,55	39,6	- 3,63
3	35,4	8	$\frac{5,9}{3}$	283,2	69,62
1-2+3	56,3			353,6	58,125

$$Y_G = \frac{\sum A_i \cdot Y_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{353,6}{56,3} = 6,280 \text{ cm}$$

$$Z_G = \frac{\sum A_i \cdot Z_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{58,125}{56,3} = 1,032 \text{ cm}$$



Alínea b)

Determinação dos momentos de inércia I_Y e I_Z

Teorema da transferência: $I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + A \cdot d^2$

$$\begin{cases} I_Y = I_{Y_G} + A \cdot Z_G^2 \\ I_Z = I_{Z_G} + A \cdot Y_G^2 \end{cases}$$

Secção 1:
$$\begin{cases} I_Y^{(1)} = 204 + 27,5 \times (-0,55)^2 = 212,31875 \text{ cm}^4 \\ I_Z^{(1)} = 1060 + 27,5 \times 4^2 = 1500 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Secção 2:
$$\begin{cases} I_Y^{(2)} = \frac{6 \times 1,1^3}{3} = 2,662 \text{ cm}^4 \\ I_Z^{(2)} = \frac{1,1 \times 6^3}{12} + 6,6 \times 6^2 = 257,4 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Secção 3:
$$\begin{cases} I_Y^{(3)} = \frac{12 \times 5,9^3}{36} + 35,4 \times \left(\frac{5,9}{3}\right)^2 = 205,379 \text{ cm}^4 \\ I_Z^{(3)} = \frac{5,9 \times 12^3}{36} + 35,4 \times 8^2 = 2548,8 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

• **Momentos de Inércia**

$$I_Y = I_Y^{(1)} - I_Y^{(2)} + I_Y^{(3)} = 212,31875 - 2,662 + 205,379 = 415,03575 \text{ cm}^4$$

$$I_Z = I_Z^{(1)} - I_Z^{(2)} + I_Z^{(3)} = 1500 - 257,4 + 2548,8 = 3791,4 \text{ cm}^4$$

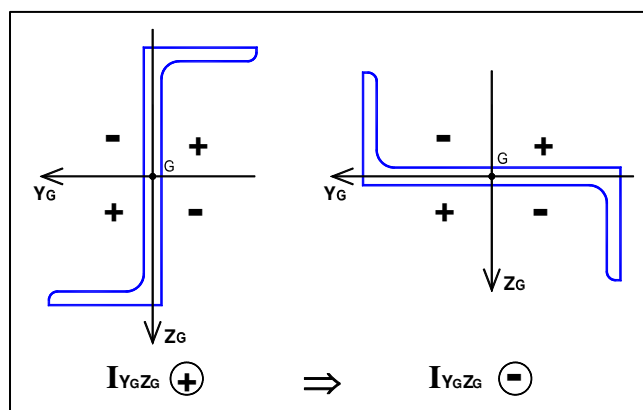
Determinação do produto de inércia I_{YZ}

Teorema da transferência: $I_{YZ} = I_{Y_G Z_G} + A \cdot Y_G \cdot Z_G$

• **Secção 1**

$$I_{YZ}^{(1)} = I_{Y_{G1} Z_{G1}}^{(1)} + A_1 \cdot Y_{G1} \cdot Z_{G1}$$

$$I_{YZ}^{(1)} = -349 + 27,5 \times 4 \times (-0,55) = -409,5 \text{ cm}^4$$



• **Secção 2**

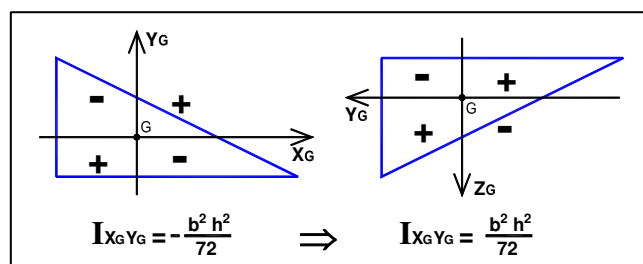
$$I_{YZ}^{(2)} = I_{Y_{G2} Z_{G2}}^{(2)} + A_2 \cdot Y_{G2} \cdot Z_{G2}$$

$$I_{YZ}^{(2)} = 0 + 6,6 \times 6 \times (-0,55) = -21,78 \text{ cm}^4$$

• **Secção 3**

$$I_{YZ}^{(3)} = I_{Y_{G3} Z_{G3}}^{(3)} + A_3 \cdot Y_{G3} \cdot Z_{G3}$$

$$I_{XY}^{(3)} = \frac{12^2 \times 5,9^2}{72} + 35,4 \times 8 \times \frac{5,9}{3} = 626,58 \text{ cm}^4$$



• **Produto de Inércia**

$$I_{YZ} = I_{YZ}^{(1)} - I_{YZ}^{(2)} + I_{YZ}^{(3)} = -409,5 - (-21,78) + 626,58 = 238,86 \text{ cm}^4$$

Alínea c)

Momento de inércia máximo

Eixos Principais de Inércia (EPI) a passar em **O**

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(- \frac{2 I_{YZ}}{I_Y - I_Z} \right) \pm 90^\circ$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(- \frac{2 \times 238,86}{415,03575 - 3791,4} \right) \pm 90^\circ = 4,03^\circ \pm 90^\circ$$

Eixo em relação ao qual o momento de inércia é máximo $\Rightarrow$ **eixo 1**

Como $I_Y < I_Z \Rightarrow \begin{cases} \text{eixo 1 mais próximo do eixo Z} \\ \text{eixo 2 mais próximo do eixo Y} \end{cases}$

Momento Principal de Inércia máximo $\Rightarrow I_{\text{máx}} = I_1$

$$I_{\text{máx}} = I_1 = \frac{I_Y + I_Z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_Y - I_Z)^2 + 4 I_{YZ}^2}$$

$$I_{\text{máx}} = I_1 = \frac{415,03575 + 3791,4}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(415,03575 - 3791,4)^2 + 4 \times 238,86^2}$$

$$I_{\text{máx}} = I_1 = 3808,21 \text{ cm}^4$$

