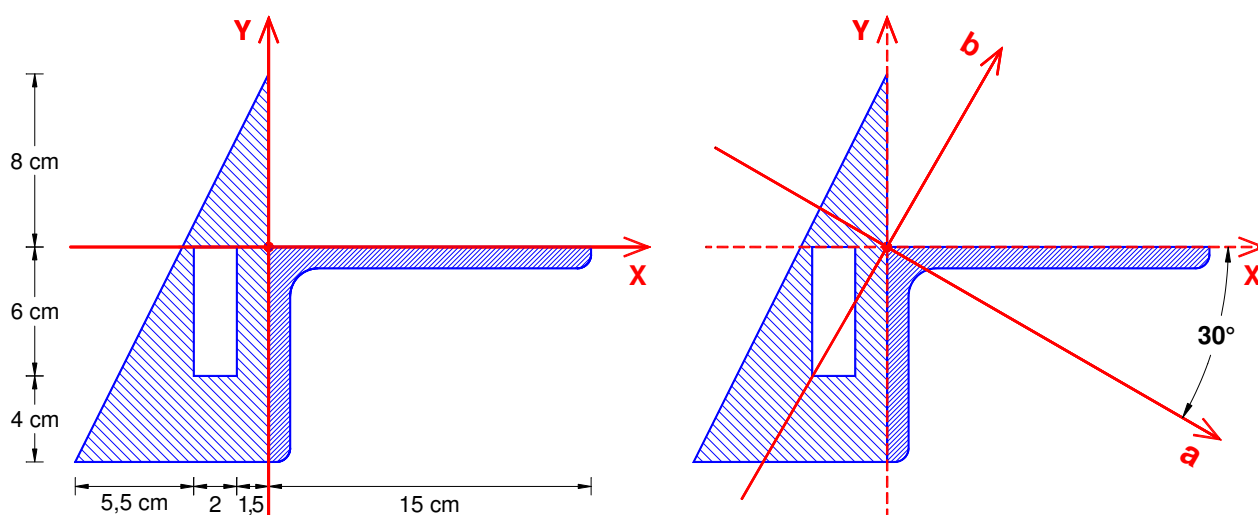


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA



GEOMETRIA DE MASSAS

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO DO EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL (SETEMBRO)
ANO LETIVO 2023 - 24

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

Considere a secção plana representada na Figura 1 constituída por uma cantoneira de abas desiguais 150x100x10 e por um triângulo ao qual foi retirada uma secção retangular.

- a) Determine as coordenadas do centro de gravidade relativamente ao sistema de eixos (x,y) e represente-o na Figura 1, cotando o seu posicionamento.
- b) Determine o produto de inércia I_{ab} relativamente ao sistema de eixos (a,b) representado na Figura 2.

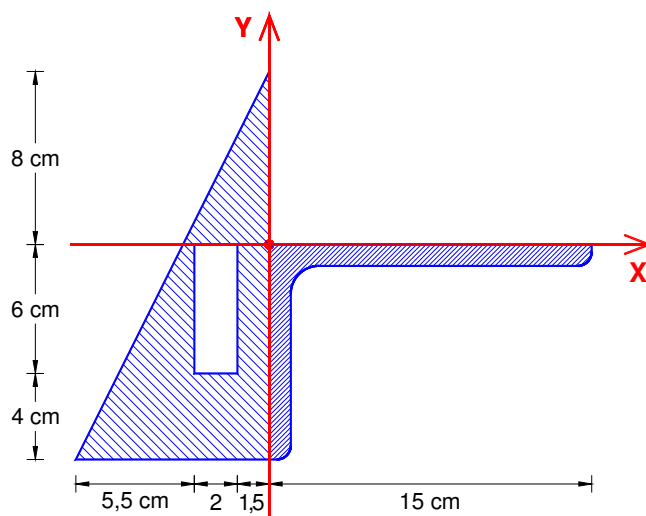


Figura 1

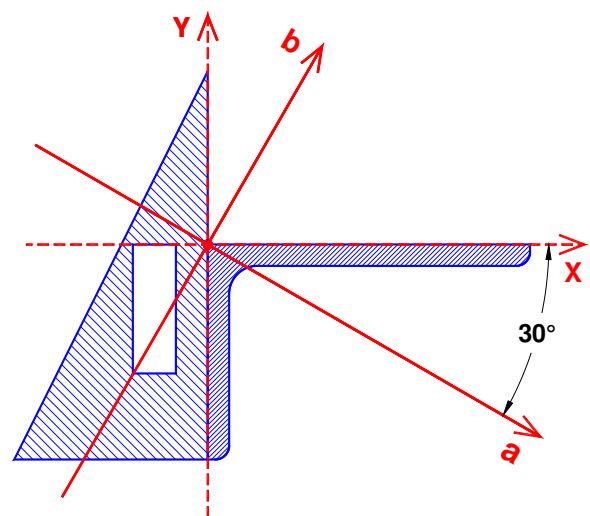
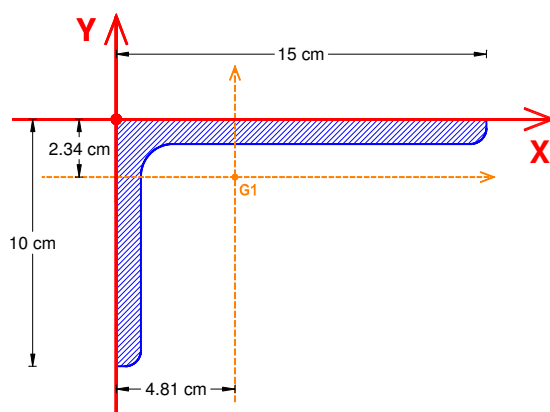
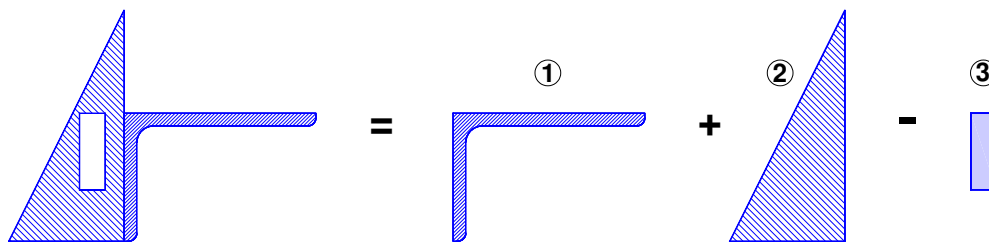


Figura 2

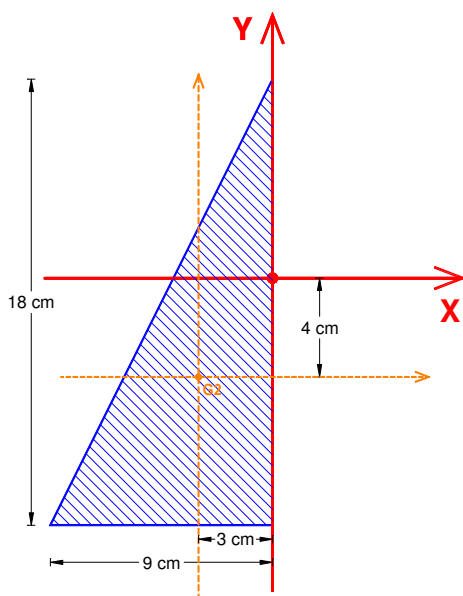
Cantoneira de abas desiguais 150x100x10								
Área (cm ²)	h (mm)	b (mm)	t (mm)	z _s (cm)	y _s (cm)	I _y (cm ⁴)	I _z (cm ⁴)	I _{yz} (cm ⁴)
24,15	150	100	10	4,81	2,34	552,6	198,5	-192,8

RESOLUÇÃO

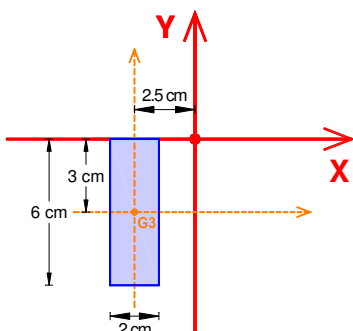
Alínea a)



$$\text{Secção 1: } \begin{cases} A_1 = 24,15 \text{ cm}^2 \\ X_{G1} = 4,81 \text{ cm} \\ Y_{G1} = -2,34 \text{ cm} \end{cases}$$



$$\text{Secção 2: } \begin{cases} A_2 = \frac{9 \times 18}{2} = 81 \text{ cm}^2 \\ X_{G2} = -3 \text{ cm} \\ Y_{G2} = -4 \text{ cm} \end{cases}$$

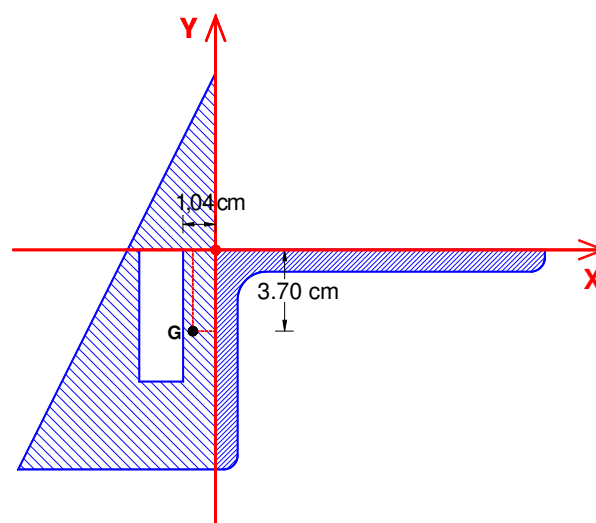


$$\text{Secção 3: } \begin{cases} A_3 = 2 \times 6 = 12 \text{ cm}^2 \\ X_{G3} = -2,5 \text{ cm} \\ Y_{G3} = -3 \text{ cm} \end{cases}$$

Secção	A_i (cm ²)	X_{Gi} (cm)	Y_{Gi} (cm)	$A_i \times X_{Gi}$	$A_i \times Y_{Gi}$
1	24,15	4,81	- 2,34	116.1615	- 56.511
2	81	- 3	- 4	- 243	- 324
-3	12	- 2,5	- 3	- 30	- 36
1+2-3	93,15			- 96.8385	- 344.511

$$x_G = \frac{\sum A_i \cdot X_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{-96,8385}{93,15} = -1,04 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{\sum A_i \cdot Y_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{-344,511}{93,15} = -3,70 \text{ cm}$$



Alínea b)

Determinação dos momentos de inércia I_x e I_y

Teorema da transferência: $I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + A \cdot d^2$

$$\begin{cases} I_x = I_{x_G} + A \cdot y_G^2 \\ I_y = I_{y_G} + A \cdot x_G^2 \end{cases}$$

$$\text{Secção 1: } \begin{cases} I_x^{(1)} = 198,5 + 24,15 \times (-2,34)^2 = 330,73574 \text{ cm}^4 \\ I_y^{(1)} = 552,6 + 24,15 \times 4,81^2 = 1111,336815 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\text{Secção 2: } \begin{cases} I_x^{(2)} = \frac{9 \times 18^3}{36} + 81 \times (-4)^2 = 2754 \text{ cm}^4 \\ I_y^{(2)} = \frac{18 \times 9^3}{12} = 1093,5 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\text{Secção 3: } \begin{cases} I_x^{(3)} = \frac{2 \times 6^3}{3} = 144 \text{ cm}^4 \\ I_y^{(3)} = \frac{6 \times 2^3}{12} + 12 \times (-2,5)^2 = 79 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

• **Momentos de Inércia**

$$I_X = I_X^{(1)} + I_X^{(2)} - I_X^{(3)} = 330,73574 + 2754 - 144 = 2940,73574 \text{ cm}^4$$

$$I_Y = I_Y^{(1)} + I_Y^{(2)} - I_Y^{(3)} = 1111,3368 + 1093,5 - 79 = 2125,8368 \text{ cm}^4$$

Determinação do produto de inércia I_{YZ}

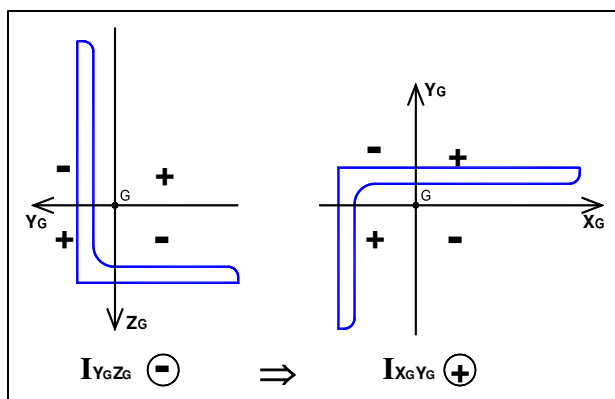
Teorema da transferência: $I_{XY} = I_{X_G Y_G} + A \cdot X_G \cdot Y_G$

• **Secção 1**

$$I_{XY}^{(1)} = I_{X_{G1} Y_{G1}}^{(1)} + A_1 \cdot X_{G1} \cdot Y_{G1}$$

$$I_{XY}^{(1)} = 192,8 + 24,15 \times (-2,34) \times 4,81$$

$$I_{XY}^{(1)} = -79,01791 \text{ cm}^4$$

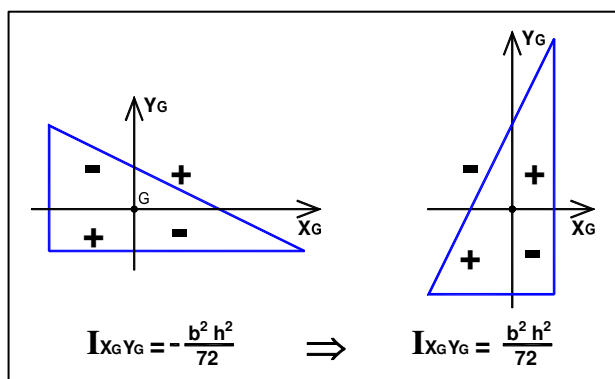


• **Secção 2**

$$I_{XY}^{(2)} = I_{X_{G2} Y_{G2}}^{(2)} + A_2 \cdot X_{G2} \cdot Y_{G2}$$

$$I_{XY}^{(2)} = \frac{9^2 \times 18^2}{72} + 81 \times (-3) \times (-4)$$

$$I_{XY}^{(2)} = 1336,5 \text{ cm}^4$$



• **Secção 3**

$$I_{XY}^{(3)} = I_{X_{G3} Y_{G3}}^{(3)} + A_3 \cdot X_{G3} \cdot Y_{G3}$$

$$I_{XY}^{(3)} = 0 + 12 \times (-2,5) \times (-3) = 90 \text{ cm}^4$$

• **Produto de Inércia**

$$I_{XY} = I_{XY}^{(1)} + I_{XY}^{(2)} - I_{XY}^{(3)} = -79,01791 + 1336,5 - 90 = 1167,48209 \text{ cm}^4$$

Determinação do produto de inércia I_{ab}

$$I_{ab} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin \alpha + I_{xy} \cos \alpha$$

$$\alpha = -30^\circ \Rightarrow 2\alpha = -60^\circ$$

$$I_{ab} = \frac{2940,73574 - 2125,8368}{2} \sin(-60^\circ) + 1167,48209 \cos(-60^\circ) = 230,88 \text{ cm}^4$$

