

LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA

GEOMETRIA DE MASSAS

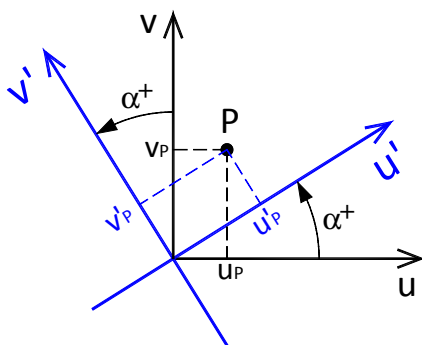
VARIAÇÃO DOS MOMENTOS DE INÉRCIA E PRODUTO DE INÉRCIA
POR ACÇÃO DUMA ROTAÇÃO DOS EIXOS DE REFERÊNCIA

EIXOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA E MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA

AULAS TEÓRICAS

ISABEL ALVIM TELES

1. COORDENADAS DE UM PONTO NUM SISTEMA DE EIXOS RODADO

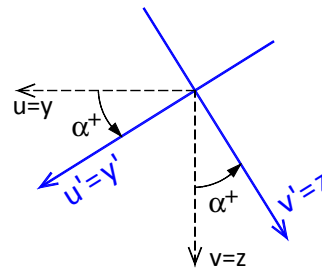
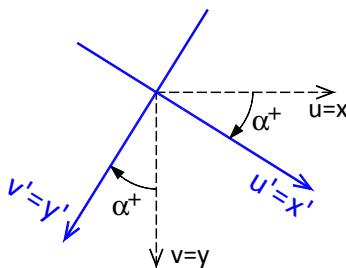
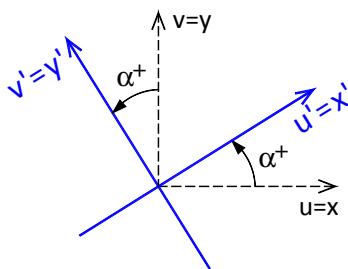


$$\begin{bmatrix} u'_P \\ v'_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_P \\ v_P \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u'_P = u_P \cos \alpha + v_P \sin \alpha \\ v'_P = -u_P \sin \alpha + v_P \cos \alpha \end{cases}$$

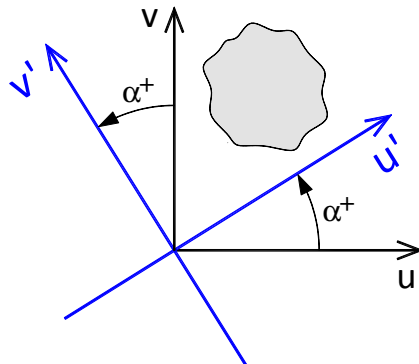
Então para relacionar dois sistemas de eixos com a mesma origem mas rodados de um ângulo α entre si, teremos:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u' = u \cos \alpha + v \sin \alpha \\ v' = -u \sin \alpha + v \cos \alpha \end{cases}$$

sentido positivo de α : de **u** para **v** (**u** – eixo menor; **v** – eixo maior)



2. VARIAÇÃO DOS MOMENTOS DE INÉRCIA E PRODUTO DE INÉRCIA POR ACÇÃO DUMA ROTAÇÃO DOS EIXOS DE REFERÊNCIA



$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u' = u \cos \alpha + v \sin \alpha \\ v' = -u \sin \alpha + v \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_{u'} &= \int v'^2 da = \int (-u \sin \alpha + v \cos \alpha)^2 da = \int (u^2 \sin^2 \alpha + v^2 \cos^2 \alpha - 2uv \cos \alpha \cdot \sin \alpha) da = \\ &= \sin^2 \alpha \int u^2 da + \cos^2 \alpha \int v^2 da - 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha \int uv da = \\ &= I_u \cos^2 \alpha + I_v \sin^2 \alpha - I_{uv} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{v'} &= \int u'^2 da = \int (u \cos \alpha + v \sin \alpha)^2 da = \int (u^2 \cos^2 \alpha + v^2 \sin^2 \alpha + 2uv \cos \alpha \cdot \sin \alpha) da = \\ &= \cos^2 \alpha \int u^2 da + \sin^2 \alpha \int v^2 da + 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha \int uv da = \\ &= I_u \sin^2 \alpha + I_v \cos^2 \alpha + I_{uv} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{u'v'} &= \int u'v' da = \int [(u \cos \alpha + v \sin \alpha) \cdot (-u \sin \alpha + v \cos \alpha)] da = \\ &= \int (-u^2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha + uv \cos^2 \alpha - uv \sin^2 \alpha + v^2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha) da = \\ &= \cos \alpha \cdot \sin \alpha \int v^2 da - \cos \alpha \cdot \sin \alpha \int u^2 da + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int uv da = \\ &= (I_u - I_v) \cos \alpha \cdot \sin \alpha + I_{uv} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

Atendendo a que:

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

poderão escrever-se as expressões anteriores na seguinte forma:

$$I_{u'} = \frac{I_u + I_v}{2} + \frac{I_u - I_v}{2} \cos 2\alpha - I_{uv} \sin 2\alpha$$

$$I_{v'} = \frac{I_u + I_v}{2} - \frac{I_u - I_v}{2} \cos 2\alpha + I_{uv} \sin 2\alpha$$

$$I_{u'v'} = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2\alpha + I_{uv} \cos 2\alpha$$

3. EIXOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA

Qual a posição do eixo que torna máximo $I_{u'}$?

$I_{u'}$ varia em função de α , ou seja: $I_{u'} = I(\alpha) = \frac{I_u + I_v}{2} + \frac{I_u - I_v}{2} \cos 2\alpha - I_{uv} \sin 2\alpha$

Para determinar o máximo e o mínimo da função $I_{u'}$: $\frac{dI_{u'}}{d\alpha} = 0$

$$\frac{dI_{u'}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{dI_{u'}}{d\alpha} = \frac{I_u - I_v}{2} (-\sin 2\alpha) - I_{uv} \cos 2\alpha = 0$$

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{uv}}{I_u - I_v}$$

$$2\alpha = \arctan \left(-\frac{2I_{uv}}{I_u - I_v} \right) \pm 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(-\frac{2I_{uv}}{I_u - I_v} \right) \pm 90^\circ$$

Como $I_{u'} + I_{v'} = \text{constante} \Rightarrow$ quando $\begin{cases} I_{u'} \text{ passa por um máximo} \\ I_{v'} \text{ passa por um mínimo} \end{cases}$

Nota: $I_{u'} + I_{v'} = \text{constante} = I_o$ (momento de inércia polar)

$$\text{Voltando à expressão de } \frac{dI_{u'}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{dI_{u'}}{d\alpha} = \frac{I_u - I_v}{2} (-\sin 2\alpha) - I_{uv} \cos 2\alpha = 0$$

$$\frac{dI_{u'}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow -2 I_{u'v'} = 0$$

$$\text{Então: } \frac{dI_{u'}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow I_{u'v'} = 0$$

Para qualquer sistema de eixos (u' , v') em que: $I_{u'v'} = 0 \Rightarrow (u', v')$ são eixos principais de inércia



$I_{u'}$ e $I_{v'}$ são momentos principais de inércia

4. MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA

Os momentos principais de inércia serão os momentos de inércia correspondentes aos eixos rodados de:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arct \left(-\frac{2I_{uv}}{I_u - I_v} \right) \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{1}{2} \arct \left(-\frac{2I_{uv}}{I_u - I_v} \right) \pm 90^\circ$$

Substituindo os valores de α na expressão:

$$I_{u'} = \frac{I_u + I_v}{2} + \frac{I_u - I_v}{2} \cos 2\alpha - I_{uv} \sin 2\alpha \quad \text{obteremos os momentos principais de inércia.}$$

Atendendo a que:

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{\text{tg } 2\alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\alpha}} \quad \cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\alpha}}$$

poderão escrever-se as expressões dos momentos principais de inércia da seguinte forma:

$$I_{\text{máx}} = I_1 = \frac{I_u + I_v}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_u - I_v)^2 + 4 I_{uv}^2} \quad \text{Momento principal de inércia máximo}$$

$$I_{\text{mín}} = I_2 = \frac{I_u + I_v}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_u - I_v)^2 + 4 I_{uv}^2} \quad \text{Momento principal de inércia mínimo}$$