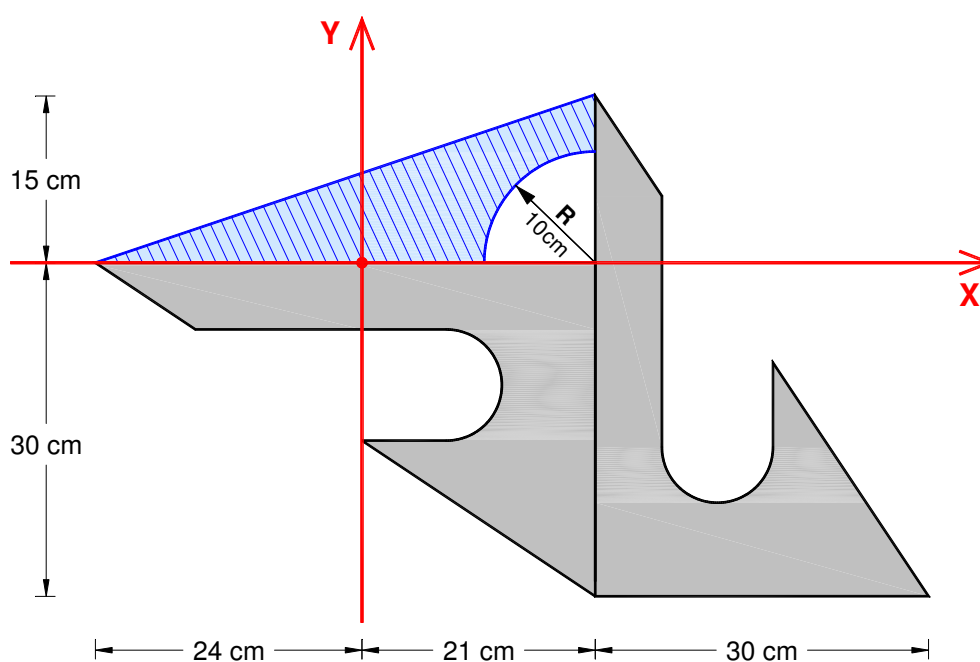


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA



GEOMETRIA DE MASSAS

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO DO EXAME DE 08/JULHO/2019

ISABEL ALVIM TELES

EXAME DE RECURSO (2018-19)

ESTÁTICA

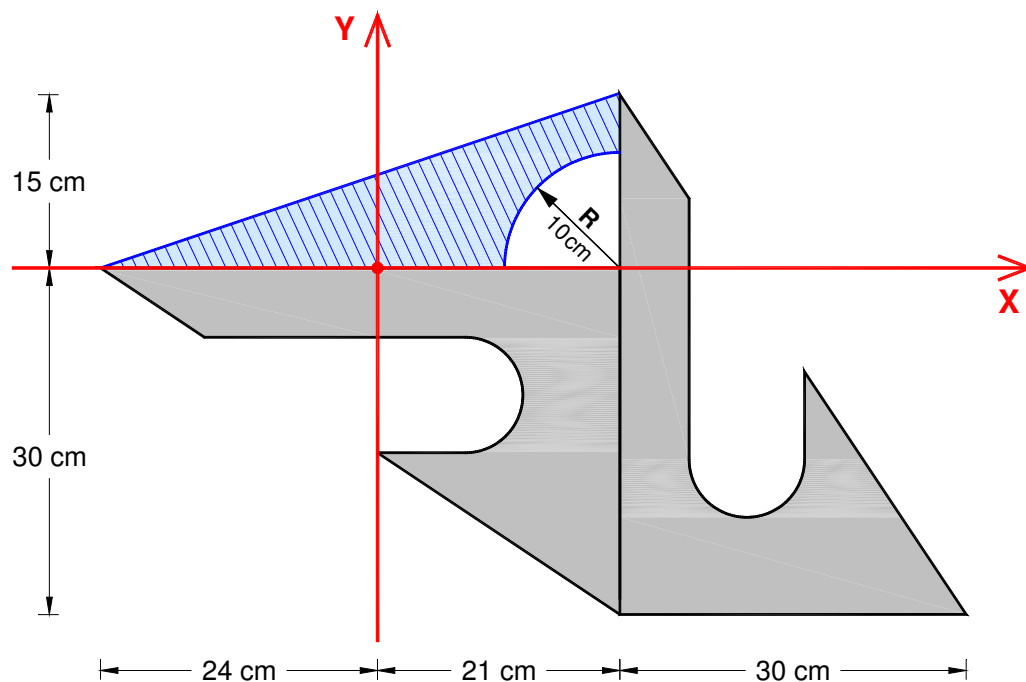
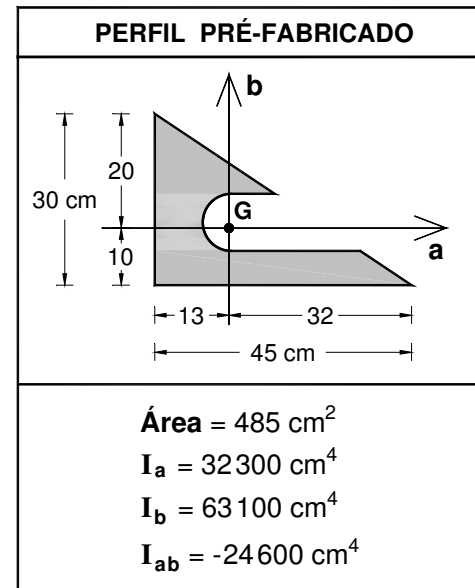
GEOMETRIA DE MASSAS

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

Considere a secção plana representada na figura, onde foram utilizados dois perfis pré-fabricados de que se anexam as características geométricas.

- Para a secção plana representada determine as coordenadas do seu centro de gravidade relativamente ao sistema de eixos (x,y) e represente-o na figura.
- Calcule os momentos de inércia e o produto de inércia relativamente ao sistema de eixos (x,y).
- Determine a posição do eixo principal de maior inércia relativamente ao sistema de eixos (x,y), represente-o na figura e calcule o momento de inércia correspondente.



EXAME DE RECURSO (2018-19)

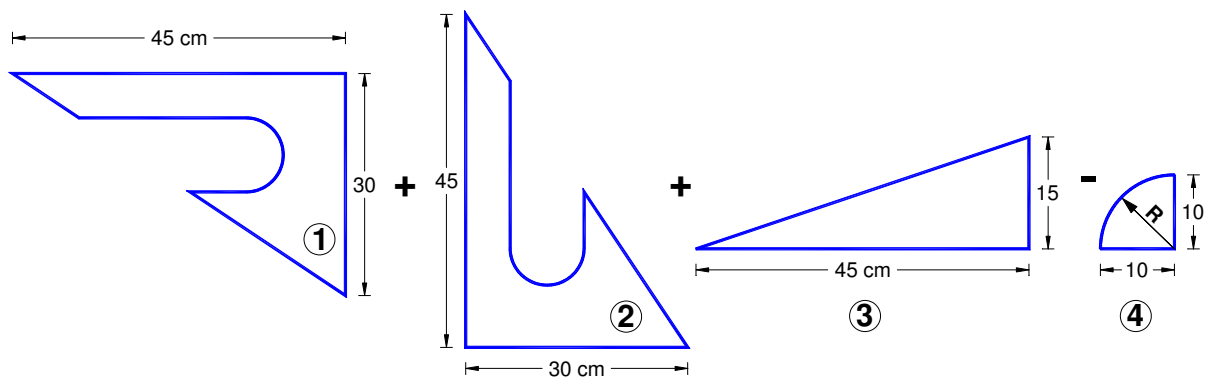
ESTÁTICA

GEOMETRIA DE MASSAS

ISABEL ALVIM TELES

RESOLUÇÃO

Alínea a)



$$\text{Secção 1: } \begin{cases} A_1 = 485 \text{ cm}^2 \\ X_{G1} = 21 - 13 = 8 \text{ cm} \\ Y_{G1} = -10 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Secção 2: } \begin{cases} A_2 = 485 \text{ cm}^2 \\ X_{G2} = 21 + 10 = 31 \text{ cm} \\ Y_{G2} = -(30 - 13) = -17 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Secção 3: } \begin{cases} A_3 = \frac{45 \times 15}{2} = 337,5 \text{ cm}^2 \\ X_{G3} = 21 - \frac{45}{3} = 6 \text{ cm} \\ Y_{G3} = \frac{15}{3} = 5 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Secção 4: } \begin{cases} A_4 = \frac{\pi \times 10^2}{4} = 25\pi \text{ cm}^2 \\ X_{G4} = 21 - \frac{4 \times 10}{3\pi} = 21 - \frac{40}{3\pi} \text{ cm} \\ Y_{G4} = \frac{4 \times 10}{3\pi} = \frac{40}{3\pi} \text{ cm} \end{cases}$$

Secção	A_i (cm ²)	X_{Gi} (cm)	Y_{Gi} (cm)	$A_i \times X_{Gi}$	$A_i \times Y_{Gi}$
1	485	8	-10	3880	- 4850
2	485	31	-17	15035	- 8245
3	337,5	6	5	2025	1687,5
- 4	- 25 π	$21 - \frac{40}{3\pi}$	$\frac{40}{3\pi}$	- 525 $\pi + \frac{1000}{3}$	- $\frac{1000}{3}$
Σ	1228,960			19623,997	- 11740,833

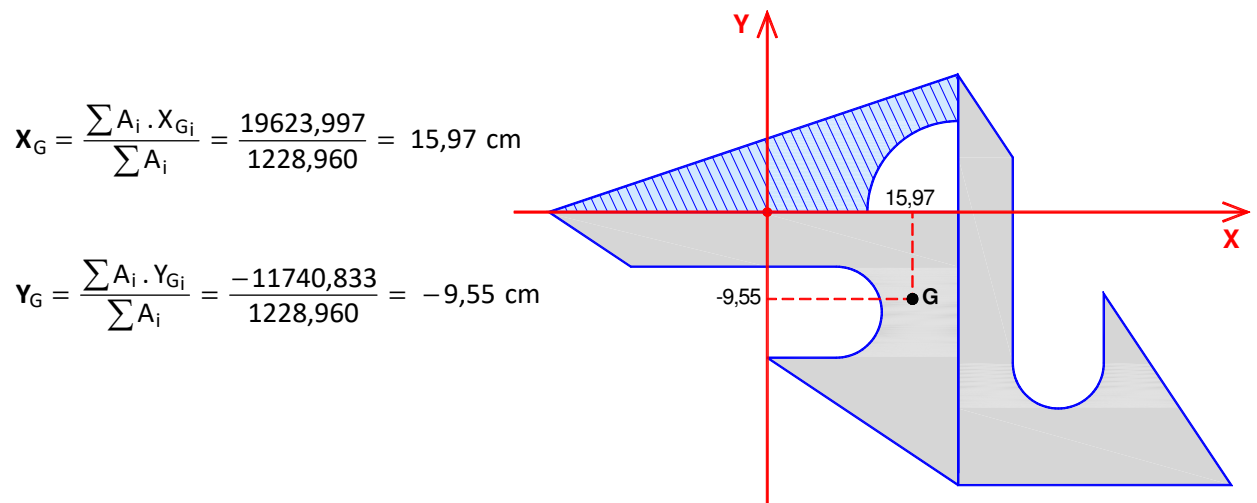
Nota: Como a secção 4 é a subtrair, na tabela atribuiu-se o sinal negativo à respectiva área.

EXAME DE RECURSO (2018-19)

ESTÁTICA

GEOMETRIA DE MASSAS

ISABEL ALVIM TELES



$$X_G = \frac{\sum A_i \cdot X_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{19623,997}{1228,960} = 15,97 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{\sum A_i \cdot Y_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{-11740,833}{1228,960} = -9,55 \text{ cm}$$

Alínea b)

Determinação dos momentos de inércia I_X e I_Y

$$\text{Secção 1: } \begin{cases} I_X^{(1)} = 32300 + 485 \times 10^2 = 80800 \text{ cm}^4 \\ I_Y^{(1)} = 63100 + 485 \times 8^2 = 94140 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\text{Secção 2: } \begin{cases} I_X^{(2)} = 63100 + 485 \times 17^2 = 203265 \text{ cm}^4 \\ I_Y^{(2)} = 32300 + 485 \times 31^2 = 498385 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\text{Secção 3: } \begin{cases} I_X^{(3)} = \frac{45 \times 15^3}{12} = 12656,25 \text{ cm}^4 \\ I_Y^{(3)} = \frac{15 \times 45^3}{36} + 337,5 \times 6^2 = 50118,75 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\text{Secção 4: } \begin{cases} I_X^{(4)} = \frac{\pi \times 10^4}{16} = 1963,495 \text{ cm}^4 \\ I_Y^{(4)} = 10^4 \times \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + 25\pi \times \left(21 - \frac{40}{3\pi} \right)^2 = 22599,55 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

• **Momentos de Inércia**

$$I_X = I_X^{(1)} + I_X^{(2)} + I_X^{(3)} - I_X^{(4)} = 80800 + 203265 + 12656,25 - 1963,50 = 294757,75 \text{ cm}^4$$

$$I_Y = I_Y^{(1)} + I_Y^{(2)} + I_Y^{(3)} - I_Y^{(4)} = 94140 + 498385 + 50118,75 - 22599,55 = 620044,20 \text{ cm}^4$$

EXAME DE RECURSO (2018-19)

ESTÁTICA

GEOMETRIA DE MASSAS

ISABEL ALVIM TELES

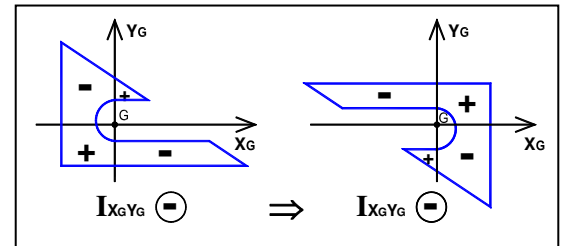
Determinação do produto de inércia I_{XY}

Teorema da transferência: $I_{XY} = I_{X_G Y_G} + X_G \cdot Y_G \cdot A$

• Secção 1

$$I_{XY}^{(1)} = I_{X_{G1} Y_{G1}}^{(1)} + X_{G1} \cdot Y_{G1} \cdot A_1$$

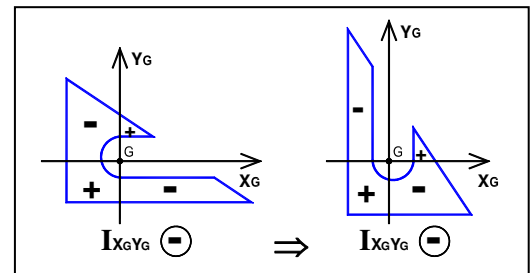
$$I_{XY}^{(1)} = -24600 + 8 \times (-10) \times 485 = -63400 \text{ cm}^4$$



• Secção 2

$$I_{XY}^{(2)} = I_{X_{G2} Y_{G2}}^{(2)} + X_{G2} \cdot Y_{G2} \cdot A_2$$

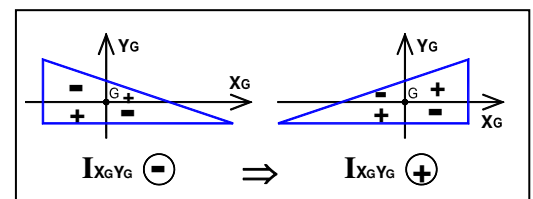
$$I_{XY}^{(2)} = -24600 + 31 \times (-17) \times 485 = -280195 \text{ cm}^4$$



• Secção 3

$$I_{XY}^{(3)} = I_{X_{G3} Y_{G3}}^{(3)} + X_{G3} \cdot Y_{G3} \cdot A_3$$

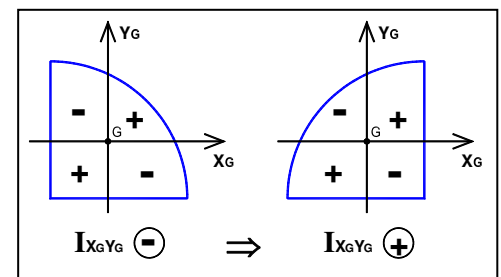
$$I_{XY}^{(3)} = \frac{45^2 \times 15^2}{72} + 6 \times 5 \times 337,5 = 16453,125 \text{ cm}^4$$



• Secção 4

$$I_{XY}^{(4)} = I_{X_{G4} Y_{G4}}^{(4)} + X_{G4} \cdot Y_{G4} \cdot A_4$$

$$I_{XY}^{(4)} = 10^4 \times \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8} \right) + \left(21 - \frac{40}{3\pi} \right) \times \frac{40}{3\pi} \times 25\pi = 5750,00 \text{ cm}^4$$



• Produto de Inércia

$$I_{XY} = I_{XY}^{(1)} + I_{XY}^{(2)} + I_{XY}^{(3)} - I_{XY}^{(4)} = -63400 - 280195 + 16453,125 - 5752,00 = -332893,875 \text{ cm}^4$$

EXAME DE RECURSO (2018-19)

ESTÁTICA

GEOMETRIA DE MASSAS

ISABEL ALVIM TELES

Alínea c)

Eixos Principais de Inércia (EPI) a passar em **O**

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(- \frac{2 I_{XY}}{I_X - I_Y} \right) \pm 90^\circ$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(- \frac{2 \times (-332\,893,875)}{294\,757,75 - 620\,044,20} \right) \pm 90^\circ = -31,98^\circ \pm 90^\circ$$

Eixo em relação ao qual o momento de inércia é máximo $\Rightarrow$ **eixo 1**

$$\text{Como } I_X < I_Y \Rightarrow \begin{cases} \text{eixo 1 mais próximo do eixo Y} \\ \text{eixo 2 mais próximo do eixo X} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{p1} = -31,98^\circ + 90^\circ = 58,02^\circ \\ \alpha_{p2} = -31,98^\circ \end{cases}$$

Momento Principal de Inércia máximo $\Rightarrow I_{\text{máx}} = I_1$

$$I_{\text{máx}} = I_1 = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4 I_{XY}^2}$$

$$I_{\text{máx}} = I_1 = \frac{294\,757,75 + 620\,044,20}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(294\,757,75 - 620\,044,20)^2 + 4 \times (-332\,893,875)^2}$$

$$I_{\text{máx}} = I_1 = 827\,902,2 \text{ cm}^4$$

