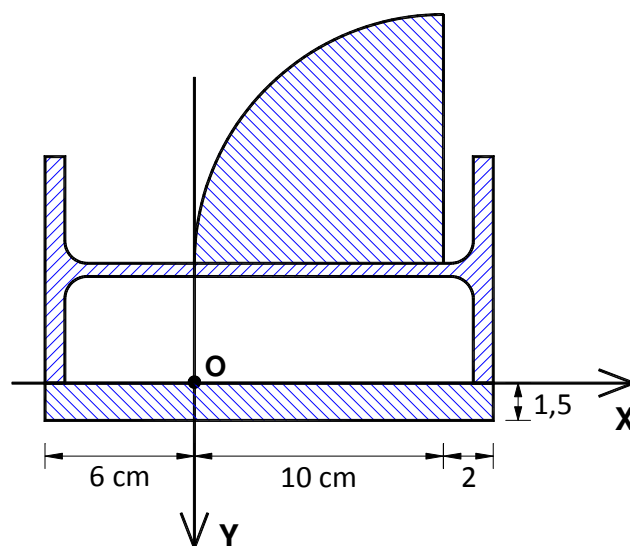


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA



GEOMETRIA DE MASSAS

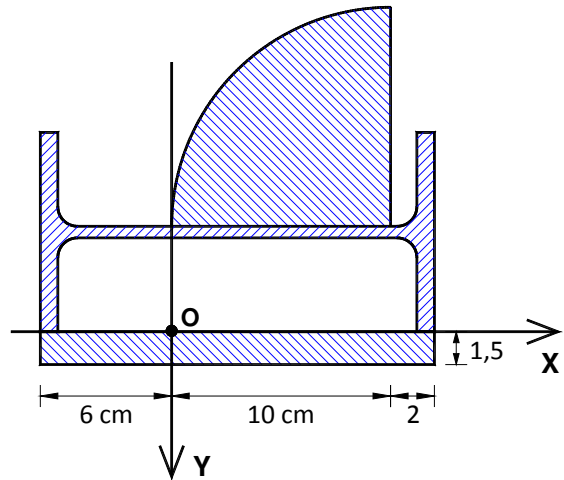
RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO DO EXAME DE 12/SETEMBRO/2012

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO (EXAME 12/SETEMBRO/2012)

Considere o sistema de eixos (X, Y) e a secção plana representada na figura (medidas em “cm”), composta por um perfil **IPE 180**, uma chapa com 1,5 cm de espessura e um quarto de círculo.

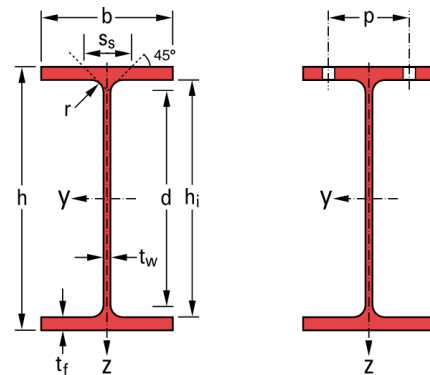
- Determine as coordenadas do centro de gravidade, posicionando-o na figura.
- Determine os raios de giração i_x e i_y e o produto de inércia I_{xy} .
- Posicione na figura o eixo que passa em O e em relação ao qual o momento de inércia é mínimo. Determine o valor desse momento de inércia mínimo.



Notas importantes:

- Utilize a unidade de comprimento “centímetro” [cm].
- Utilize nos cálculos pelo menos 2 casas decimais.

IPE 180

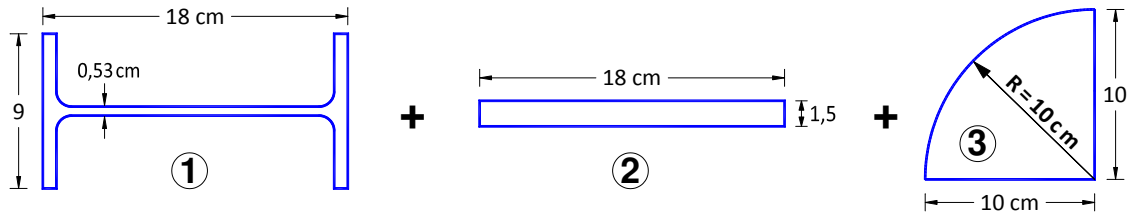


Désignation Designation Bezeichnung	Dimensions Abmessungen						Dimensions de construction Dimensions for detailing Konstruktionsmaße					
G kg/m	h mm	b mm	t _w mm	t _f mm	r mm	A cm ²	h _i mm	d mm	Ø	p _{min} mm	p _{max} mm	
IPE 180	18.8	180	91	5.3	8	9	23.95	164	146	M10	48	48

Désignation Designation Bezeichnung	Valeurs statiques / Section properties / Statische Kennwerte											
	axe fort y-y strong axis y-y starke Achse y-y					axe faible z-z weak axis z-z schwache Achse z-z						
G kg/m	I _y cm ⁴	W _{el,y} cm ³	W _{ply} ↗ cm ³	i _y cm	A _{vz} cm ²	I _z cm ⁴	W _{el,z} cm ³	W _{pl,z} ↗ cm ³	i _z cm	s _s mm	I _t cm ⁴	I _w × 10 ⁻³ cm ⁶
IPE 180 18.8	1317	146.3	166.4	7.42	11.25	100.9	22.16	34.60	2.05	31.84	4.79	7.43

RESOLUÇÃO

Alínea a)



$$\text{Secção 1: } \begin{cases} A_1 = 23,95 \text{ cm}^2 \\ X_{G_1} = \frac{18}{2} - 6 = 3 \text{ cm} \\ Y_{G_1} = -\frac{9,1}{2} = -4,55 \text{ cm} \end{cases}$$

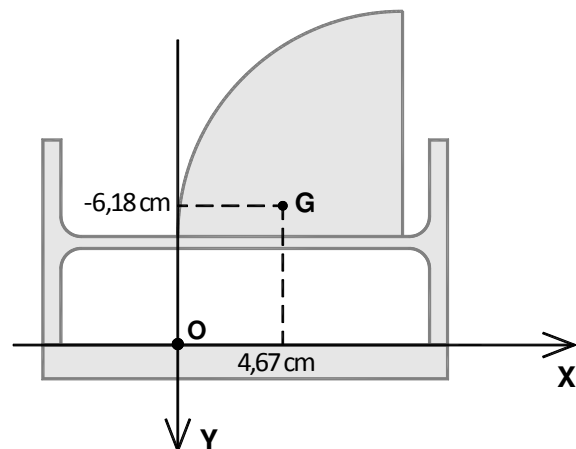
$$\text{Secção 2: } \begin{cases} A_2 = 18 \times 1,5 = 27 \text{ cm}^2 \\ X_{G_2} = \frac{18}{2} - 6 = 3 \text{ cm} \\ Y_{G_2} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Secção 3: } \begin{cases} A_3 = \frac{\pi \times 10^2}{4} = 78,540 \text{ cm}^2 \\ X_{G_3} = 10 - \frac{4 \times 10}{3\pi} = 5,756 \text{ cm} \\ Y_{G_3} = -\left(\frac{9,1}{2} + \frac{0,53}{2} + \frac{4 \times 10}{3\pi}\right) = -9,059 \text{ cm} \end{cases}$$

Secção	A_i (cm ²)	X_{G_i} (cm)	Y_{G_i} (cm)	$A_i \cdot X_{G_i}$	$A_i \cdot Y_{G_i}$
1	23,95	3	- 4,55	71,85	- 108,9725
2	27	3	0,75	81	20,25
3	78,540	5,756	- 9,059	452,076	-711,494
Σ	129,490			604,926	-800,2165

$$x_G = \frac{\sum A_i \cdot X_{G_i}}{\sum A_i} = \frac{604,926}{129,490} = 4,672 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{\sum A_i \cdot Y_{G_i}}{\sum A_i} = \frac{-800,2165}{129,490} = -6,180 \text{ cm}$$



Alínea b)

Raio de giração $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$

Raio de giração $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

• **Momentos de inércia I_x e I_y**

Secção 1:
$$\begin{cases} I_x^{(1)} = I_{x_G}^{(1)} + Y_{G_1}^2 \cdot A_1 = 100,9 + 4,55^2 \times 23,95 = 596,725 \text{ cm}^4 \\ I_y^{(1)} = I_{y_G}^{(1)} + X_{G_1}^2 \cdot A_1 = 1317 + 3^2 \times 23,95 = 1532,55 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Secção 2:
$$\begin{cases} I_x^{(2)} = I_{x_G}^{(2)} + Y_{G_2}^2 \cdot A_2 = \frac{18 \times 1,5^3}{12} + 0,75^2 \times 27 = 20,25 \text{ cm}^4 \\ I_y^{(2)} = I_{y_G}^{(2)} + X_{G_2}^2 \cdot A_2 = \frac{1,5 \times 18^3}{12} + 3^2 \times 27 = 972 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Secção 3:
$$\begin{cases} I_x^{(3)} = I_{x_G}^{(3)} + Y_{G_3}^2 \cdot A_3 = R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + Y_{G_3}^2 \cdot A_3 = 10^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + 9,059^2 \times 25\pi = 6994,193 \text{ cm}^4 \\ I_y^{(3)} = I_{y_G}^{(3)} + X_{G_3}^2 \cdot A_3 = R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + X_{G_3}^2 \cdot A_3 = 10^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + 5,756^2 \times 25\pi = 3150,810 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} = 596,725 + 20,25 + 6994,193 = 7611,168 \text{ cm}^4$

$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} = 1532,55 + 972 + 3150,810 = 5655,360 \text{ cm}^4$

Raio de giração $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{7611,168}{129,490}} = 7,67 \text{ cm}$

Raio de giração $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{5655,360}{129,490}} = 6,61 \text{ cm}$

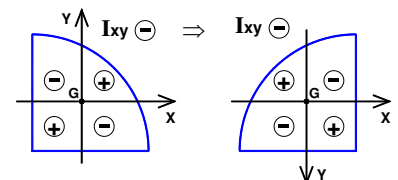
• **Produto de inércia I_{xy}**

Teorema da transferência: $I_{xy} = I_{x_G y_G} + a \cdot b \cdot A = I_{x_G y_G} + X_G \cdot Y_G \cdot A$

Secção 1: $I_{xy}^{(1)} = I_{x_{G_1} y_{G_1}}^{(1)} + X_{G_1} \cdot Y_{G_1} \cdot A_1 = 0 + 3 \times (-4,55) \times 23,95 = -326,9175 \text{ cm}^4$

Secção 2: $I_{xy}^{(2)} = I_{x_{G_2} y_{G_2}}^{(2)} + X_{G_2} \cdot Y_{G_2} \cdot A_2 = 0 + 3 \times 0,75 \times 27 = 60,75 \text{ cm}^4$

Secção 3:
$$\begin{aligned} I_{xy}^{(3)} &= I_{x_{G_3} y_{G_3}}^{(3)} + X_{G_3} \cdot Y_{G_3} \cdot A_3 = -R^4 \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8} \right) + Y_{G_3} \cdot Z_{G_3} \cdot A_3 = \\ &= -10^4 \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8} \right) + 5,756 \times (-9,059) \times 25\pi = -4260,060 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$



$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} = -326,9175 + 60,75 - 4260,060 = -4526,2275 \text{ cm}^4$

Alínea c)

Eixo que passa em **O** e em relação ao qual o momento de inércia é mínimo $\Rightarrow$ **eixo principal de inércia 2**

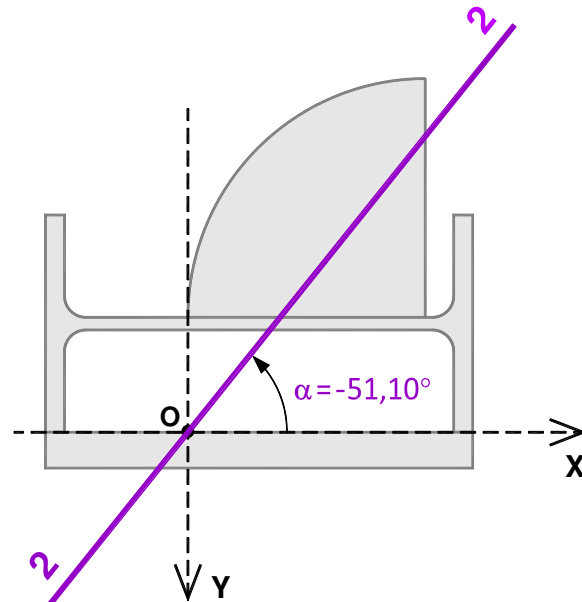
Eixos Principais de Inércia (EPI) e Momentos Principais de Inércia (MPI)

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 I_{XY}}{I_X - I_Y} \right) \pm 90^\circ$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 \times (-4526,2275)}{7611,168 - 5655,360} \right) \pm 90^\circ = 38,90^\circ \pm 90^\circ$$

Como $I_X > I_Y \Rightarrow$ eixo **2** mais próximo do eixo **Y**

$$\begin{cases} \alpha_{p1} = 38,90^\circ \\ \alpha_{p2} = 38,90^\circ - 90 = -51,10^\circ \Leftarrow \text{eixo 2} \end{cases}$$



$$I_{\min} = I_2 = \frac{I_X + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4 I_{XY}^2}$$

$$I_{\min} = I_2 = \frac{7611,168 + 5655,360}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(7611,168 - 5655,360)^2 + 4 (-4526,2275)^2} = 2002,60 \text{ cm}^4$$

Ou:

$$I_{\Delta\alpha} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{I_X - I_Y}{2} \cos 2\alpha - I_{XY} \sin 2\alpha$$

$$I_{\min} = I_{(\alpha=-51,10^\circ)} = \frac{7611,168 + 5655,360}{2} + \frac{7611,168 - 5655,360}{2} \cos(-102,2^\circ) - (-4526,2275) \sin(-102,2^\circ)$$

$$I_{\min} = 2002,60 \text{ cm}^4$$