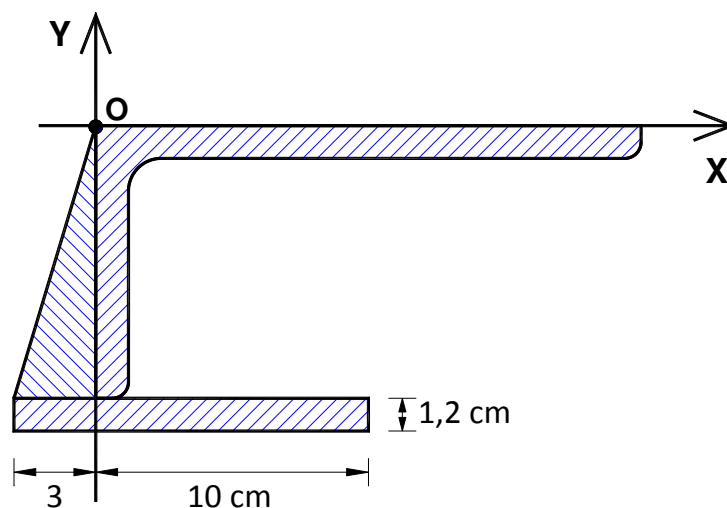


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA



GEOMETRIA DE MASSAS

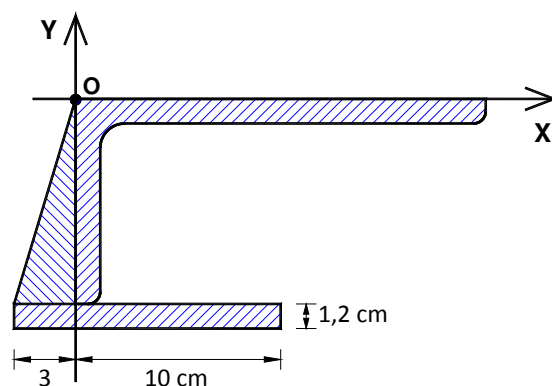
RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO DO EXAME DE 18/JULHO/2012

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO (EXAME 18/JULHO/2012)

Considere o sistema de eixos (X,Y) e a secção plana representada na *Figura*, composta por uma cantoneira de abas desiguais L 200x100x12, uma secção triangular e uma chapa com 1,2 cm de espessura.

- Determine as coordenadas do centro de gravidade, posicionando-o na figura.
- Determine o momento de inércia polar I_o e o produto de inércia I_{xy} .
- Posicione na figura o eixo que passa em O e em relação ao qual o momento de inércia é máximo. Determine o valor desse momento de inércia máximo.

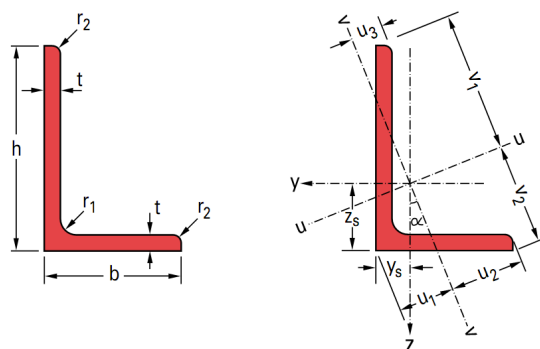


Figura

Notas importantes:

- Utilize a unidade de comprimento “centímetro” [cm].
- Utilize nos cálculos pelo menos 2 casas decimais.

Cantoneiras de abas desiguais

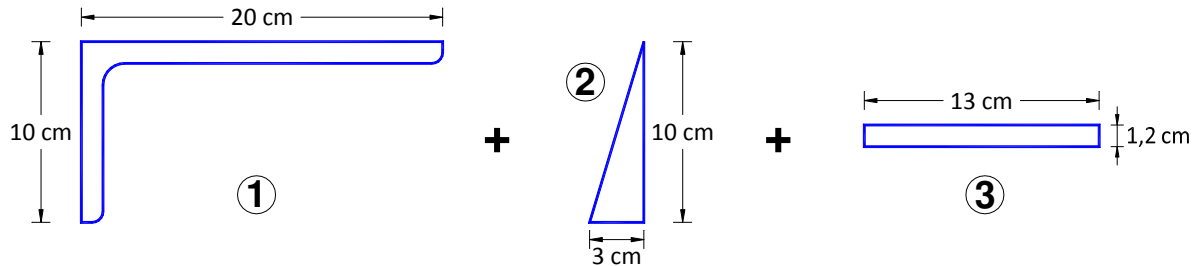


Désignation Designation Bezeichnung		Dimensions Abmessungen						Position des axes Position of axes Lage der Achsen						
G kg/m		h mm	b mm	t mm	r ₁ mm	r ₂ mm	A cm ²	z _s cm	y _s cm	v ₁ cm	v ₂ cm	u ₁ cm	u ₂ cm	u ₃ cm
L 200 x 100 x 10 [*]	23.0	200	100	10	15	7.5	29.24	6.93	2.01	13.15	8.74	3.72	5.94	2.09
L 200 x 100 x 12 [*]	27.3	200	100	12	15	7.5	34.80	7.03	2.10	13.08	8.81	3.82	5.89	2.17
L 200 x 100 x 14	31.6	200	100	14	15	7.5	40.28	7.12	2.18	13.01	8.86	3.91	5.85	2.24

Désignation Designation Bezeichnung		Valeurs statiques / Section properties / Statische Kennwerte											
		axe y-y axis y-y Achse y-y			axe z-z axis z-z Achse z-z			axe u-u axis u-u Achse u-u		axe v-v axis v-v Achse v-v			
		I _y cm ⁴	W _{el,y} cm ³	i _y cm	I _z cm ⁴	W _{el,z} cm ³	i _z cm	I _u cm ⁴	i _u cm	I _v cm ⁴	i _v cm	I _{yz} cm ⁴	α °
G kg/m													
L 200 x 100 x 10	23.0	1219	93.24	6.46	210.3	26.33	2.68	1294	6.65	134.5	2.14	-286.8	14.82
L 200 x 100 x 12	27.3	1440	111.0	6.43	247.2	31.28	2.67	1529	6.63	158.5	2.13	-337.3	14.74
L 200 x 100 x 14	31.6	1654	128.4	6.41	282.2	36.08	2.65	1755	6.60	181.7	2.12	-384.8	14.65

RESOLUÇÃO

Alínea a)



$$\text{Secção 1: } \begin{cases} A_1 = 34,80 \text{ cm}^2 \\ X_{G_1} = 7,03 \text{ cm} \\ Y_{G_1} = -2,10 \text{ cm} \end{cases}$$

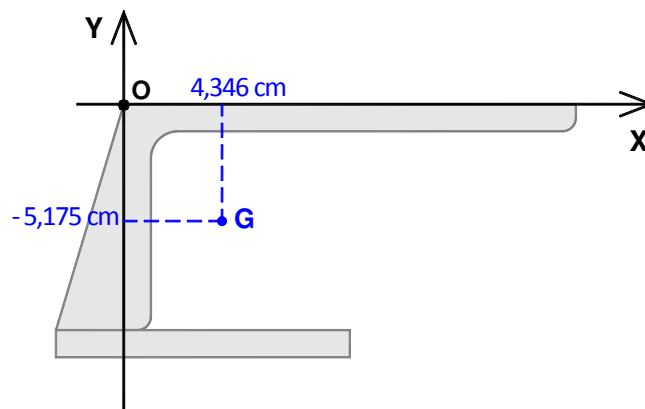
$$\text{Secção 2: } \begin{cases} A_2 = 15 \text{ cm}^2 \\ X_{G_2} = -1 \text{ cm} \\ Y_{G_2} = -\frac{20}{3} = -6,667 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Secção 3: } \begin{cases} A_3 = 15,6 \text{ cm}^2 \\ X_{G_3} = 3,5 \text{ cm} \\ Y_{G_3} = -\left(10 + \frac{1,2}{2}\right) = -10,6 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Área total } A = \sum A_i = 34,80 + 15 + 15,6 = 65,4 \text{ cm}^2$$

$$X_G = \frac{\sum X_{G_i} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{7,03 \times 34,80 - 1 \times 15 + 3,5 \times 15,6}{65,4} = \frac{284,244}{65,4} = 4,346 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{\sum Y_{G_i} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{-2,10 \times 34,80 - \frac{20}{3} \times 15 - 10,6 \times 15,6}{65,4} = \frac{-338,44}{65,4} = -5,175 \text{ cm}$$



Alínea b)

Momento de Inércia Polar $I_O = I_x + I_y$

• **Momentos de inércia I_x e I_y**

Secção 1:
$$\begin{cases} I_x^{(1)} = I_{x_G}^{(1)} + y_{G_1}^2 \cdot A_1 = 247,2 + 2,10^2 \times 34,80 = 400,668 \text{ cm}^4 \\ I_y^{(1)} = I_{y_G}^{(1)} + x_{G_1}^2 \cdot A_1 = 1440 + 7,03^2 \times 34,80 = 3159,847 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Secção 2:
$$\begin{cases} I_x^{(2)} = I_{x_G}^{(2)} + y_{G_2}^2 \cdot A_2 = \frac{3 \times 10^3}{36} + \left(\frac{20}{3}\right)^2 \times 15 = 750 \text{ cm}^4 \\ I_y^{(2)} = I_{y_G}^{(2)} + x_{G_2}^2 \cdot A_2 = \frac{10 \times 3^3}{36} + 1^2 \times 15 = 22,5 \text{ cm}^4 \quad \text{ou} \quad I_y^{(2)} = \frac{10 \times 3^3}{12} = 22,5 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Secção 3:
$$\begin{cases} I_x^{(3)} = I_{x_G}^{(3)} + y_{G_3}^2 \cdot A_3 = \frac{13 \times 1,2^3}{12} + 10,6^2 \times 15,6 = 1754,688 \text{ cm}^4 \\ I_y^{(3)} = I_{y_G}^{(3)} + x_{G_3}^2 \cdot A_3 = \frac{1,2 \times 13^3}{12} + 3,5^2 \times 15,6 = 410,8 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} = 400,668 + 750 + 1754,688 = 2905,356 \text{ cm}^4$

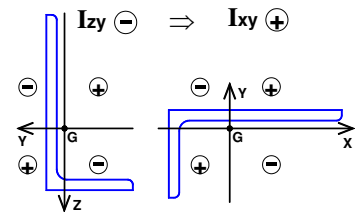
$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} = 3159,847 + 22,5 + 410,8 = 3593,147 \text{ cm}^4$

Momento de Inércia Polar $I_O = I_x + I_y = 2905,356 + 3593,147 = 6498,503 \text{ cm}^4$

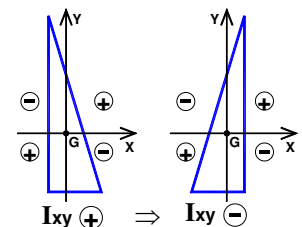
• **Produto de inércia I_{xy}**

Teorema da transferência: $I_{xy} = I_{x_G y_G} + a \cdot b \cdot A = I_{x_G y_G} + x_G \cdot y_G \cdot A$

Secção 1:
$$I_{xy}^{(1)} = I_{x_{G_1} y_{G_1}}^{(1)} + x_{G_1} \cdot y_{G_1} \cdot A_1 = 337,3 + 7,03 \times (-2,10) \times 34,80 = -176,4524 \text{ cm}^4$$



Secção 2:
$$I_{xy}^{(2)} = I_{x_{G_2} y_{G_2}}^{(2)} + x_{G_2} \cdot y_{G_2} \cdot A_2 = \frac{3^2 \times 10^2}{72} + (-1) \times \left(-\frac{20}{3}\right) \times 15 = 112,5 \text{ cm}^4$$



Secção 3:
$$I_{xy}^{(3)} = I_{x_{G_3} y_{G_3}}^{(3)} + x_{G_3} \cdot y_{G_3} \cdot A_3 = 0 + 3,5 \times (-10,6) \times 15,6 = -578,76 \text{ cm}^4$$

$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} = -176,4524 + 112,5 - 578,76 = -642,7124 \text{ cm}^4$

Alínea c)

Eixo que passa em **O** e em relação ao qual o momento de inércia é máximo $\Rightarrow$ **eixo principal de inércia 1**

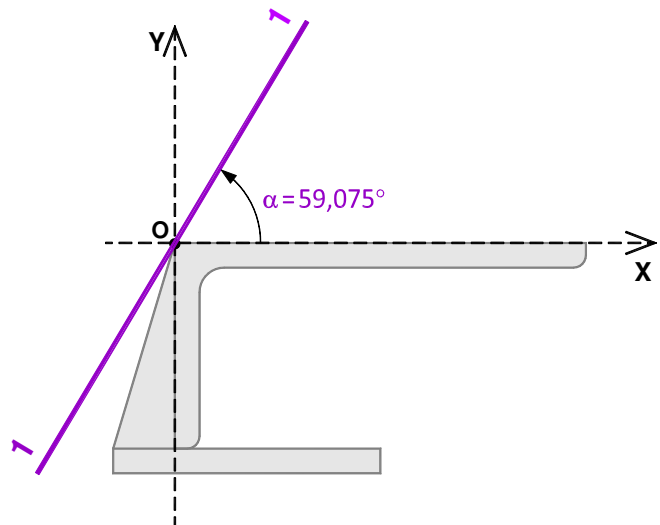
Eixos Principais de Inércia (EPI) e Momentos Principais de Inércia (MPI)

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 I_{XY}}{I_X - I_Y} \right) \pm 90^\circ$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 \times (-642,7124)}{2905,356 - 3593,147} \right) \pm 90^\circ = -30,925^\circ \pm 90^\circ$$

Como $I_Y > I_X \Rightarrow$ eixo **1** mais próximo do eixo **Y**

$$\begin{cases} \alpha_{p1} = -30,925^\circ + 90^\circ = 59,075^\circ \quad \Leftarrow \text{eixo 1} \\ \alpha_{p2} = -30,925^\circ \end{cases}$$



$$I_{\text{máx}} = I_1 = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4 I_{XY}^2}$$

$$I_{\text{máx}} = I_1 = \frac{2905,356 + 3593,147}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(2905,356 - 3593,143)^2 + 4 (-642,7124)^2} = 3978,18 \text{ cm}^4$$

Ou:

$$I_{\Delta\alpha} = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{I_X - I_Y}{2} \cos 2\alpha - I_{XY} \sin 2\alpha$$

$$I_{\text{máx}} = I_{(\alpha=59,075^\circ)} = \frac{2905,356 + 3593,147}{2} + \frac{2905,356 - 3593,147}{2} \cos 118,15^\circ - (-642,7124) \sin 118,15^\circ$$

$$I_{\text{máx}} = 3978,18 \text{ cm}^4$$