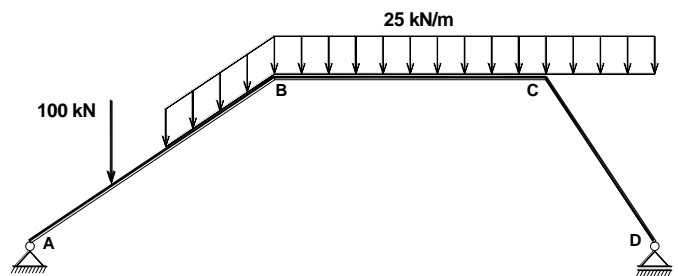
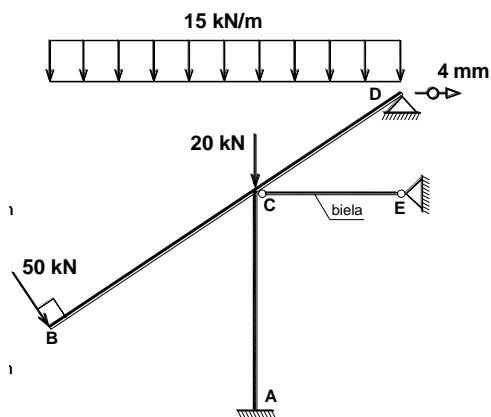
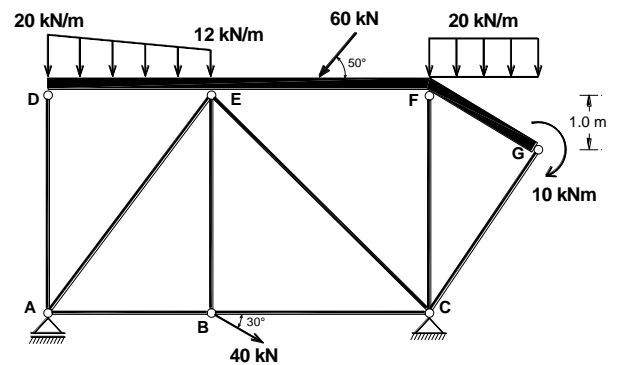
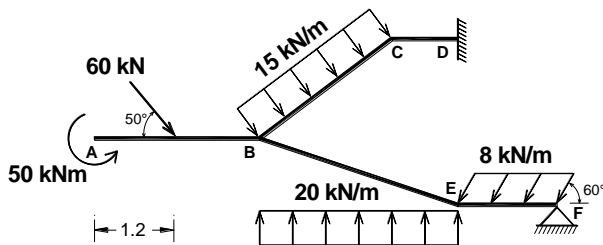
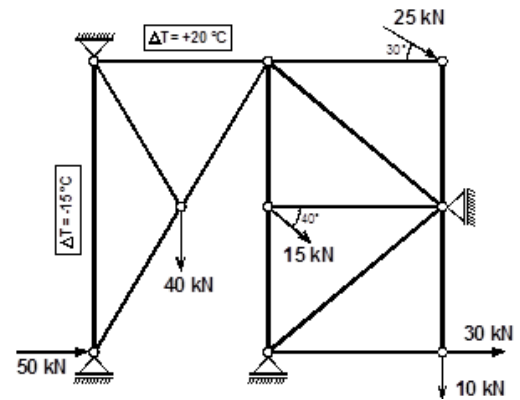
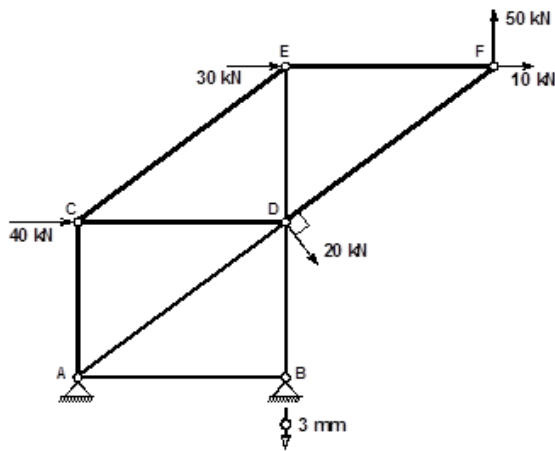


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

# TEORIA DE ESTRUTURAS

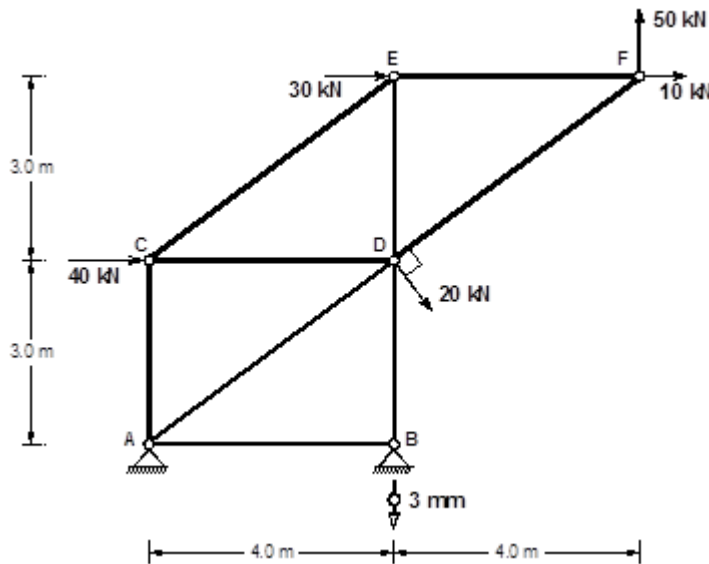
## PROGRAMA *FTOOL* - EXEMPLOS



**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

Recorrendo ao programa de cálculo automático *FTOOL*, determine as reacções nos apoios, os deslocamentos dos nós e os diagramas de esforços instalados nas barras das estruturas abaixo definidas.

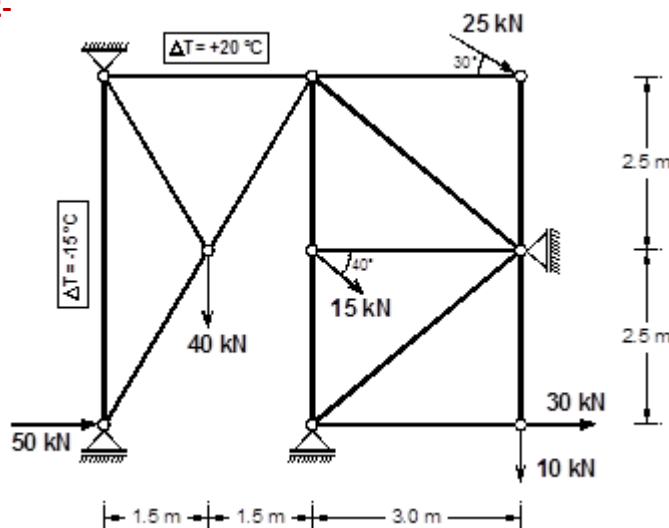
1-



Secção de todas as barras:  $\varnothing$  10cm

Material: Aço ( $E = 200$  GPa)

2-



**Secção das barras do corpo da esquerda:**

tubular  $\varnothing$  20cm, esp.= 5 mm

**Secção das barras do corpo da direita:**

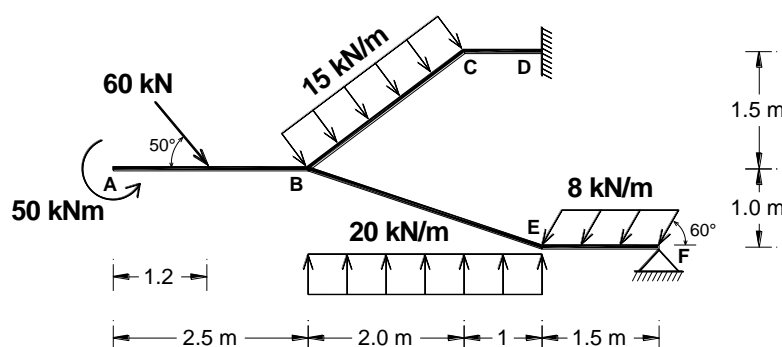
tubular  $\square$  18cm, esp.= 4 mm

**Material**

Aço:  $E = 205$  GPa

$\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

3-



**Secções**

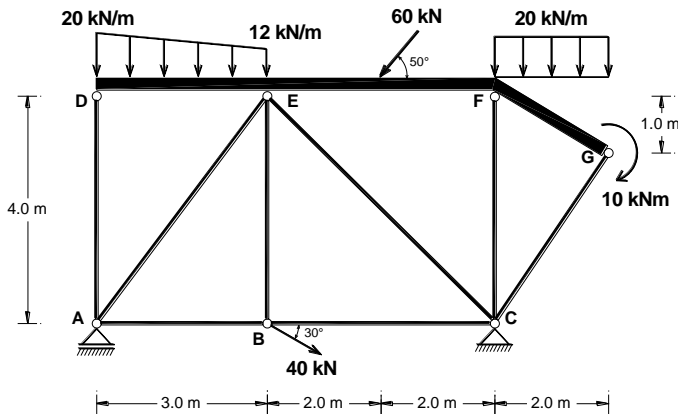
ABCD:  $0,30 \times 0,50$  m<sup>2</sup>

BEF:  $0,30 \times 0,40$  m<sup>2</sup>

**Material**

Betão:  $E = 30$  GPa

4-



**Características das barras**

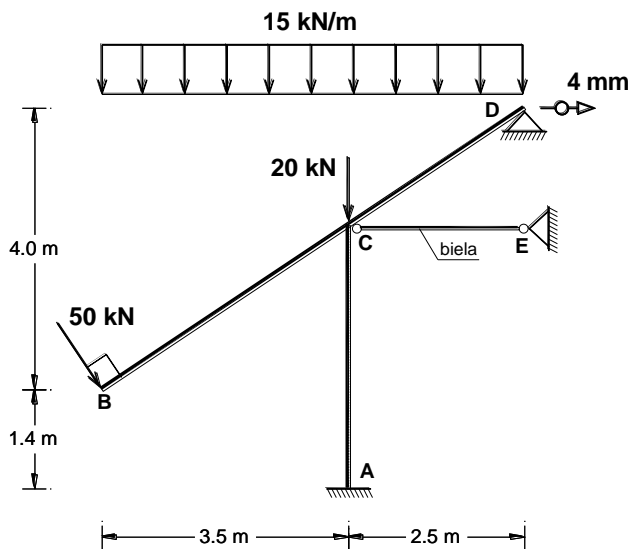
Barras bi-articuladas: Área = 50 cm<sup>2</sup>  
I = 417 cm<sup>4</sup>  
E = 200 GPa

a) Barra DEFG: barra rígida, indeformável

b) Barra DEFG: secção 0,25m x 0,40m  
Betão: E = 30 GPa

Nota: I – momento de inércia

5-



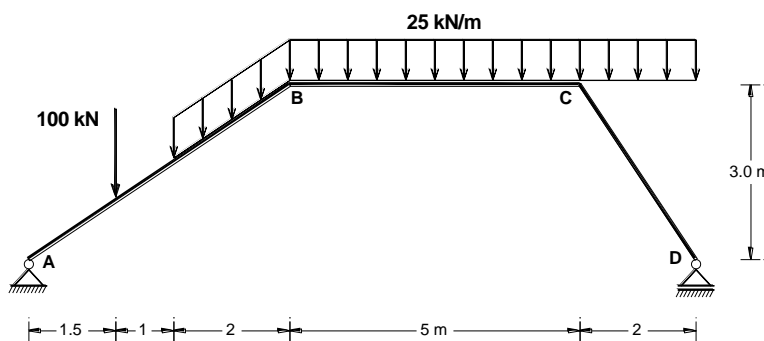
**Características das barras**

Barra AC: secção 0,30 x 0,30 m<sup>2</sup>  
Betão: E = 29 GPa

Barra BCD: secção 0,30 x 0,55 m<sup>2</sup>  
Betão: E = 29 GPa

Barra CE: Área = 50 cm<sup>2</sup>  
Aço: E = 210 GPa

6-



**Características das barras**

Secção perfil I:

Altura = 60 cm

Lagura do banço = 40 cm

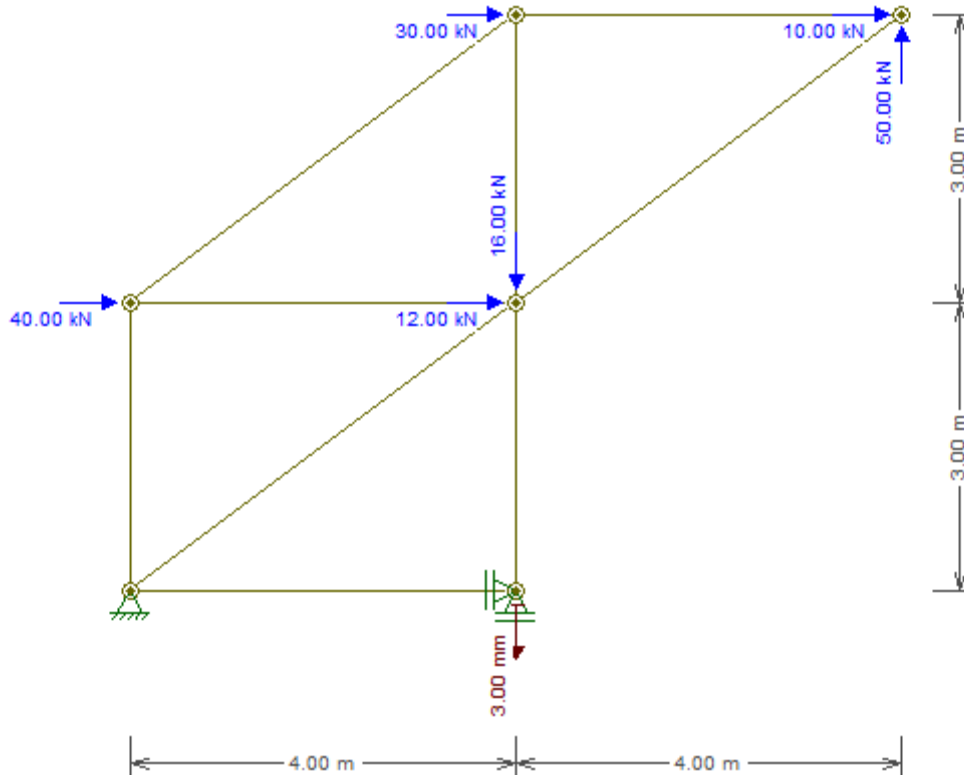
Espessura do banço = 12 mm

Espessura da alma = 10 mm

Aço: E = 200 GPa

**RESOLUÇÃO – EXERCÍCIO 1**

• Geometria do exercício



• Material e secção transversal das barras

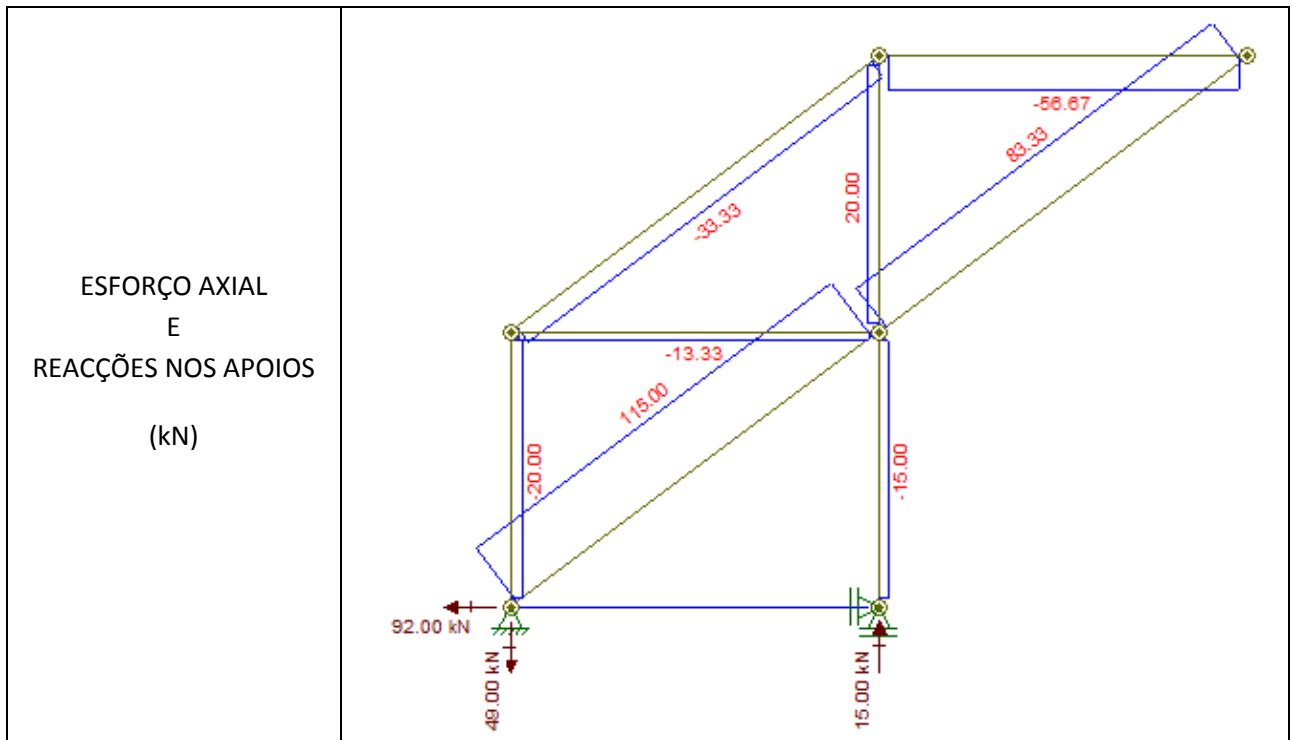
**Material Parameters**

Material: Material

**Section Properties**

Secção: Secção

• **Reacções nos apoios e esforços nas barras**



Nota: Esforço axial negativo  $\Rightarrow$  compressão  
 Esforço axial positivo  $\Rightarrow$  tracção

Sentidos positivos dos deslocamentos e rotação:

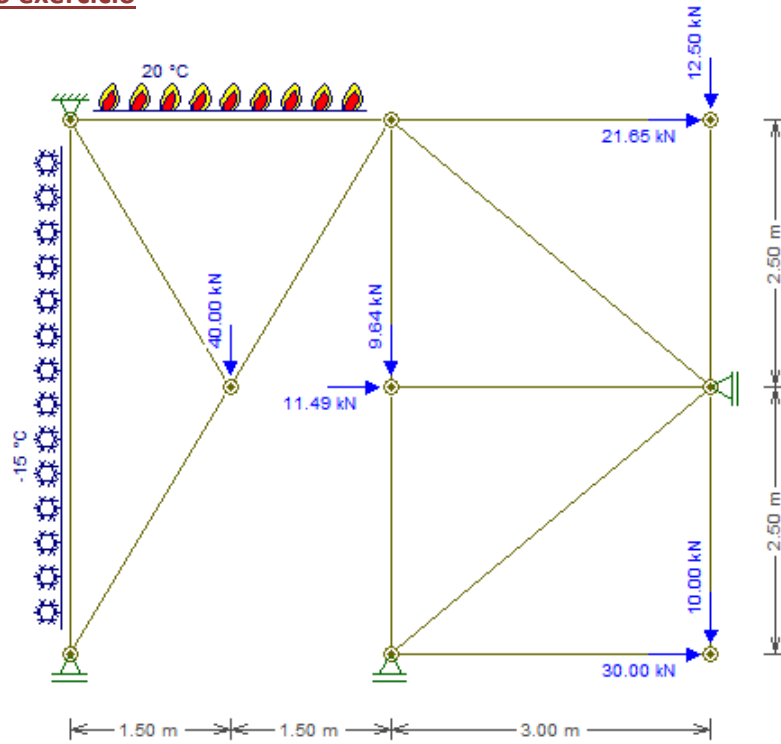


• **Deformada da estrutura**

DEFORMADA DA ESTRUTURA	DESLOCAMENTOS E ROTAÇÃO DOS NÓS	
	Nó 1	Dx = 0.00 mm Dy = 0.00 mm Rz = 0.00 rad
	Nó 2	Dx = 0.00 mm Dy = -3.00 mm Rz = 0.00 rad
	Nó 3	Dx = 2.76 mm Dy = -0.04 mm Rz = 0.00 rad
	Nó 4	Dx = 2.73 mm Dy = -3.03 mm Rz = 0.00 rad
	Nó 5	Dx = 4.84 mm Dy = -2.99 mm Rz = 0.00 rad
	Nó 6	Dx = 4.70 mm Dy = -5.21 mm Rz = 0.00 rad

**RESOLUÇÃO – EXERCÍCIO 2**

• **Geometria do exercício**



• **Material e secção transversal das barras**

**Material Parameters**

Material: Material

E: 205.000 GPa

$\nu$ : 0.30

$\alpha$ : 0.000010 /°C

**Section Properties**

Sec-esq: Sec-esq

d: 20.0 cm

t: 0.5 cm

$\bar{y}$ : 10.0 cm

A: 30.63 cm<sup>2</sup>

As: 27.57 cm<sup>2</sup>

I: 1.4569e+03 cm<sup>4</sup>

**Section Properties**

Sec-dir: Sec-dir

d: 18.0 cm

b: 18.0 cm

tw: 0.4 cm

tf: 0.4 cm

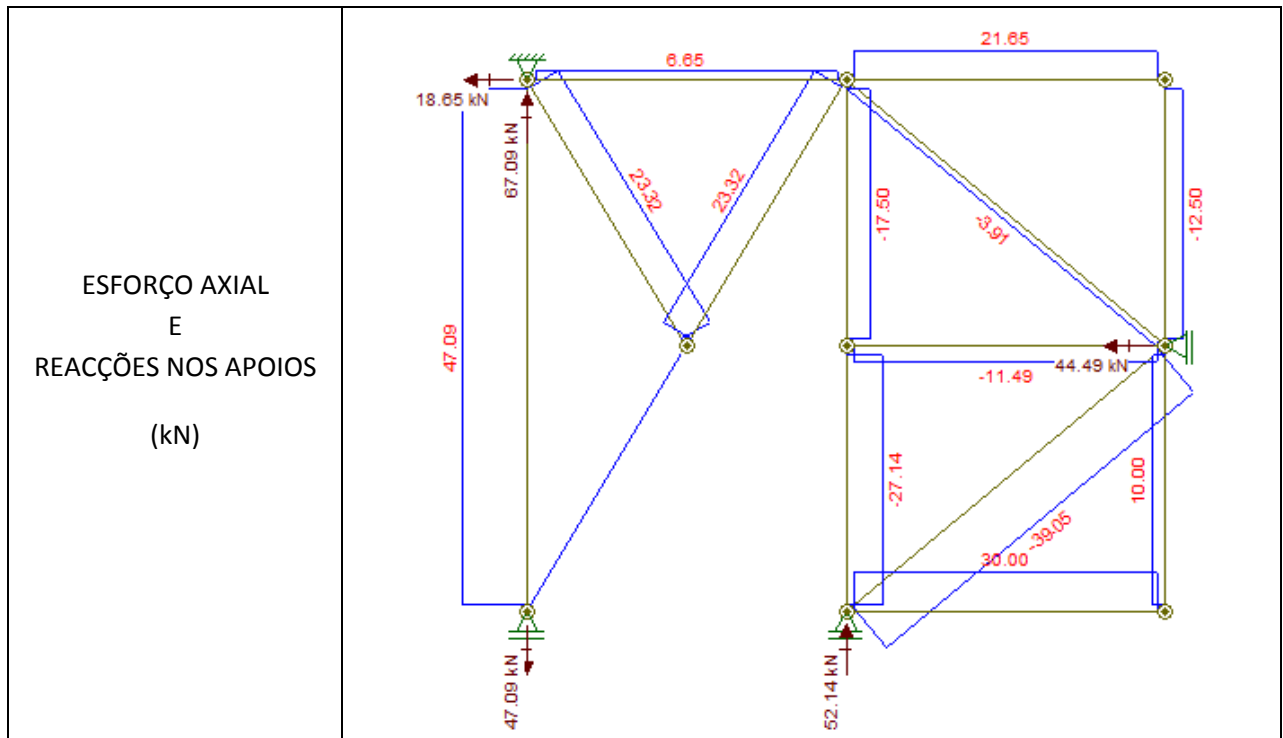
$\bar{y}$ : 9.0 cm

A: 28.16 cm<sup>2</sup>

As: 14.40 cm<sup>2</sup>

I: 1.4546e+03 cm<sup>4</sup>

• Reacções nos apoios e esforços nas barras

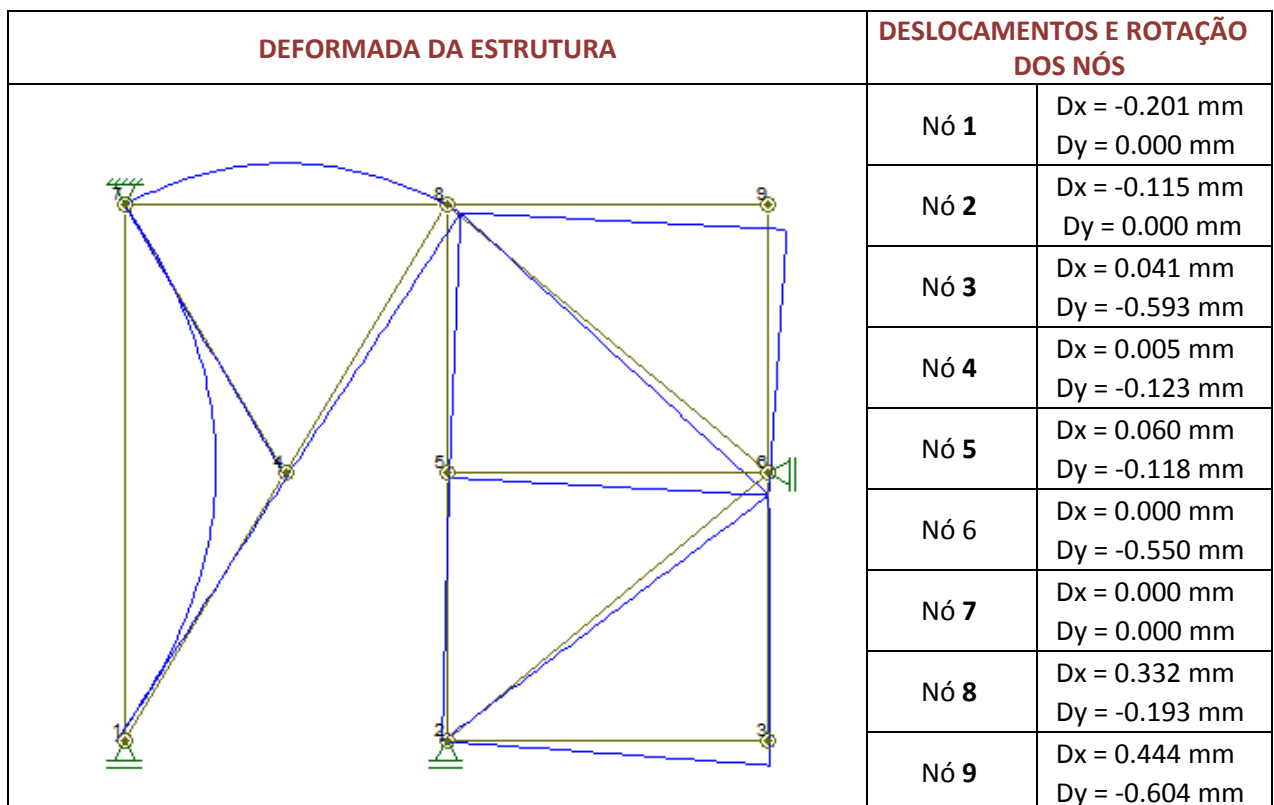


Nota: Esforço axial negativo  $\Rightarrow$  compressão  
 Esforço axial positivo  $\Rightarrow$  tracção

Sentidos positivos dos deslocamentos e rotação:

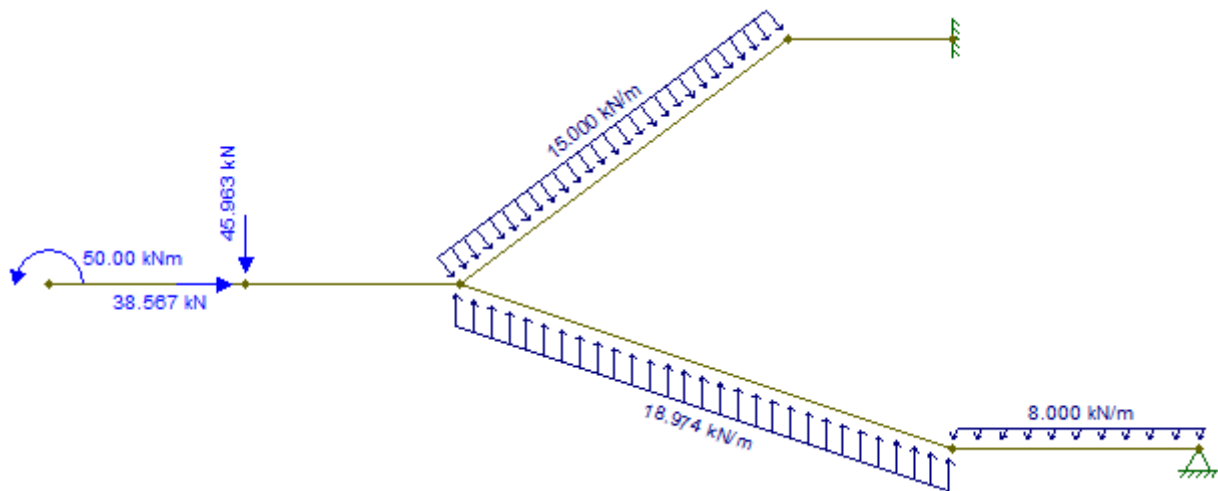


• Deformada da estrutura



**RESOLUÇÃO – EXERCÍCIO 3**

• **Geometria do exercício**



• **Material e secção transversal das barras**

**Material Parameters**

MATERIAL

E: 30.000 GPa  
 ν: 0.20  
 α: 0.000010 /°C

**Section Properties**

Sec ABCD

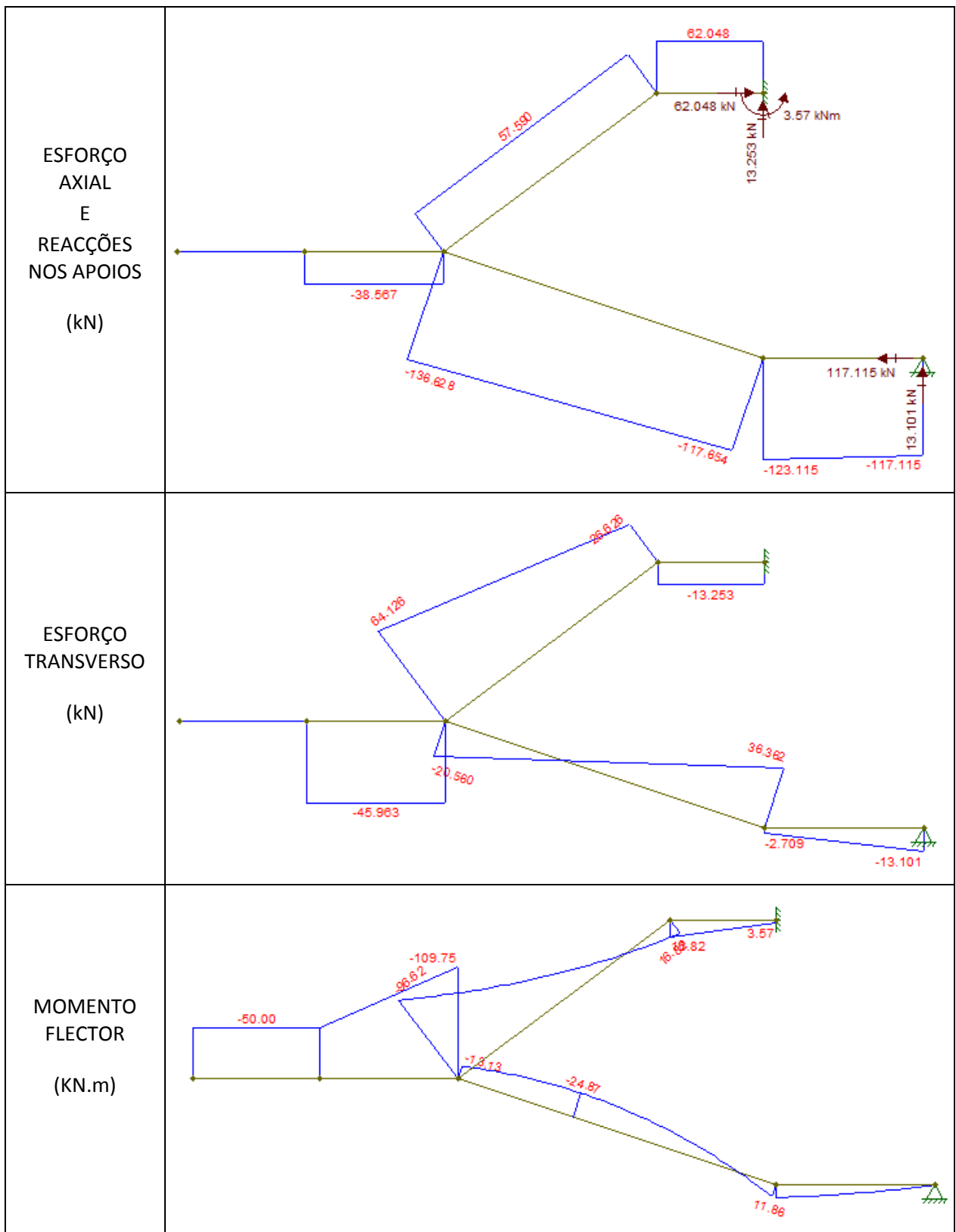
d: 0.50 m  
 b: 0.30 m  
 $\bar{y}$ : 0.25 m  
 A: 0.1500 m<sup>2</sup>  
 A<sub>s</sub>: 0.1250 m<sup>2</sup>  
 I: 0.003125 m<sup>4</sup>

**Section Properties**

Sec BEF

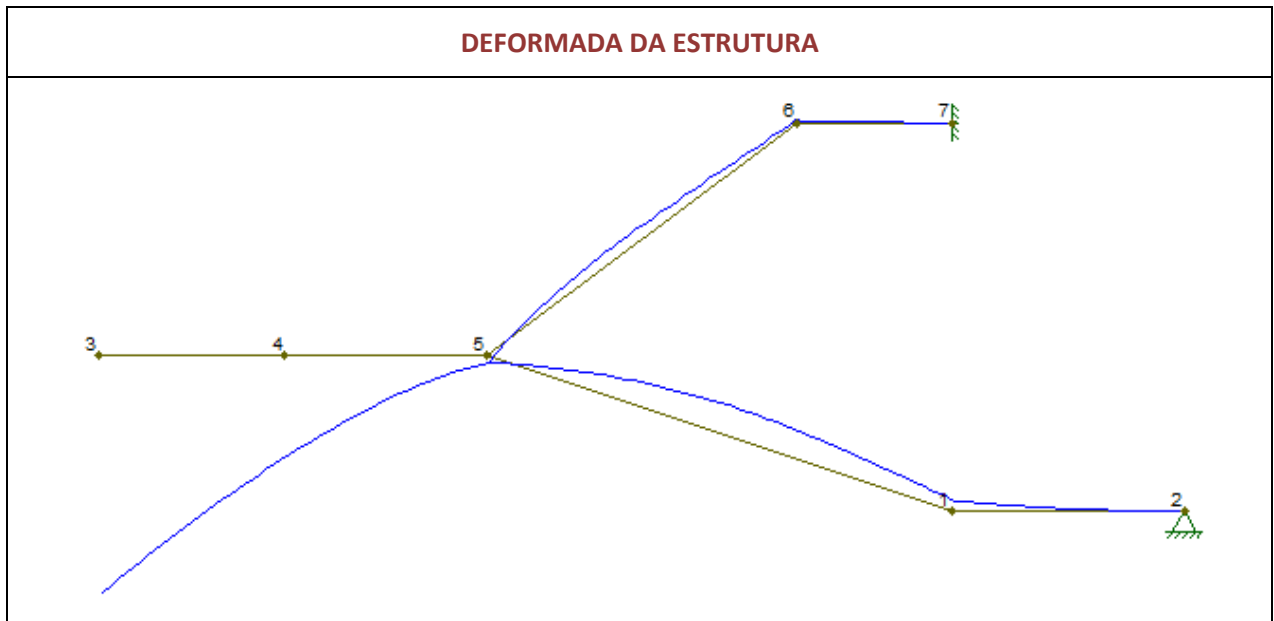
d: 0.40 m  
 b: 0.30 m  
 $\bar{y}$ : 0.20 m  
 A: 0.1200 m<sup>2</sup>  
 A<sub>s</sub>: 0.1000 m<sup>2</sup>  
 I: 0.001600 m<sup>4</sup>


• Reacções nos apoios e esforços nas barras



Nota: Esforço axial negativo ⇒ compressão  
 Esforço axial positivo ⇒ tracção

• Deformada da estrutura



Sentidos positivos dos deslocamentos e rotação: 

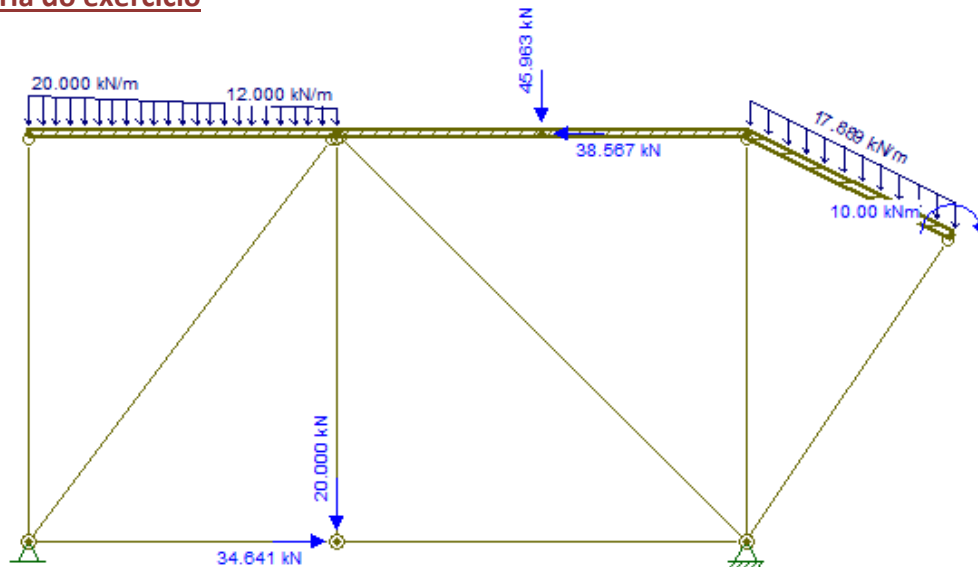
DESLOCAMENTOS E ROTAÇÕES DOS NÓS	
Nó 1	Dx = 0.050 mm Dy = 0.209 mm Rz = -2.831e-004 rad
Nó 2	Dx = 0.000 mm Dy = 0.000 mm Rz = -5.723e-005 rad
Nó 3	Dx = 0.072 mm Dy = -4.501 mm Rz = 2.495e-003 rad
Nó 4	Dx = 0.072 mm Dy = -1.892 mm Rz = 1.855e-003 rad
Nó 5	Dx = 0.061 mm Dy = -0.111 mm Rz = 7.470e-004 rad
Nó 6	Dx = -0.014 mm Dy = 0.043 mm Rz = -1.087e-004 rad
Nó 7	Dx = 0.000 mm Dy = 0.000 mm Rz = 0.000e+000 rad

Máximo deslocamento transversal (flecha máx.) da barra 5 - 6: 0.215 mm (numa secção a 1.06 m do nó 5)

Máximo deslocamento transversal (flecha máx.) da barra 5 - 1: 0.570 mm (numa secção a 1.65 m do nó 5)

**RESOLUÇÃO – EXERCÍCIO 4**

• **Geometria do exercício**



• **Material e secção transversal das barras**

**Material Parameters**

Mat bi-articuladas

E: 200.000 GPa  
 ν: 0.30  
 α: 0.000010 /°C

**Section Properties**

Sec bi-articuladas

A: 50.00 cm<sup>2</sup>  
 A<sub>s</sub>: 42.00 cm<sup>2</sup>  
 I: 417.00 cm<sup>4</sup>  
 d: 10.0 cm  
 $\bar{y}$ : 5.0 cm

**Section Properties**

Sec DEFG

d: 40.0 cm  
 b: 25.0 cm  
 $\bar{y}$ : 20.0 cm  
 A: 1000.00 cm<sup>2</sup>  
 A<sub>s</sub>: 833.33 cm<sup>2</sup>  
 I: 133333.33 cm<sup>4</sup>

**Material Parameters**

Mat DEFG

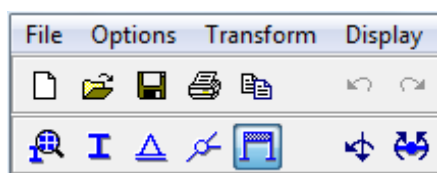
E: 30.000 GPa  
 ν: 0.20  
 α: 0.000010 /°C

**Deformation Constraints**

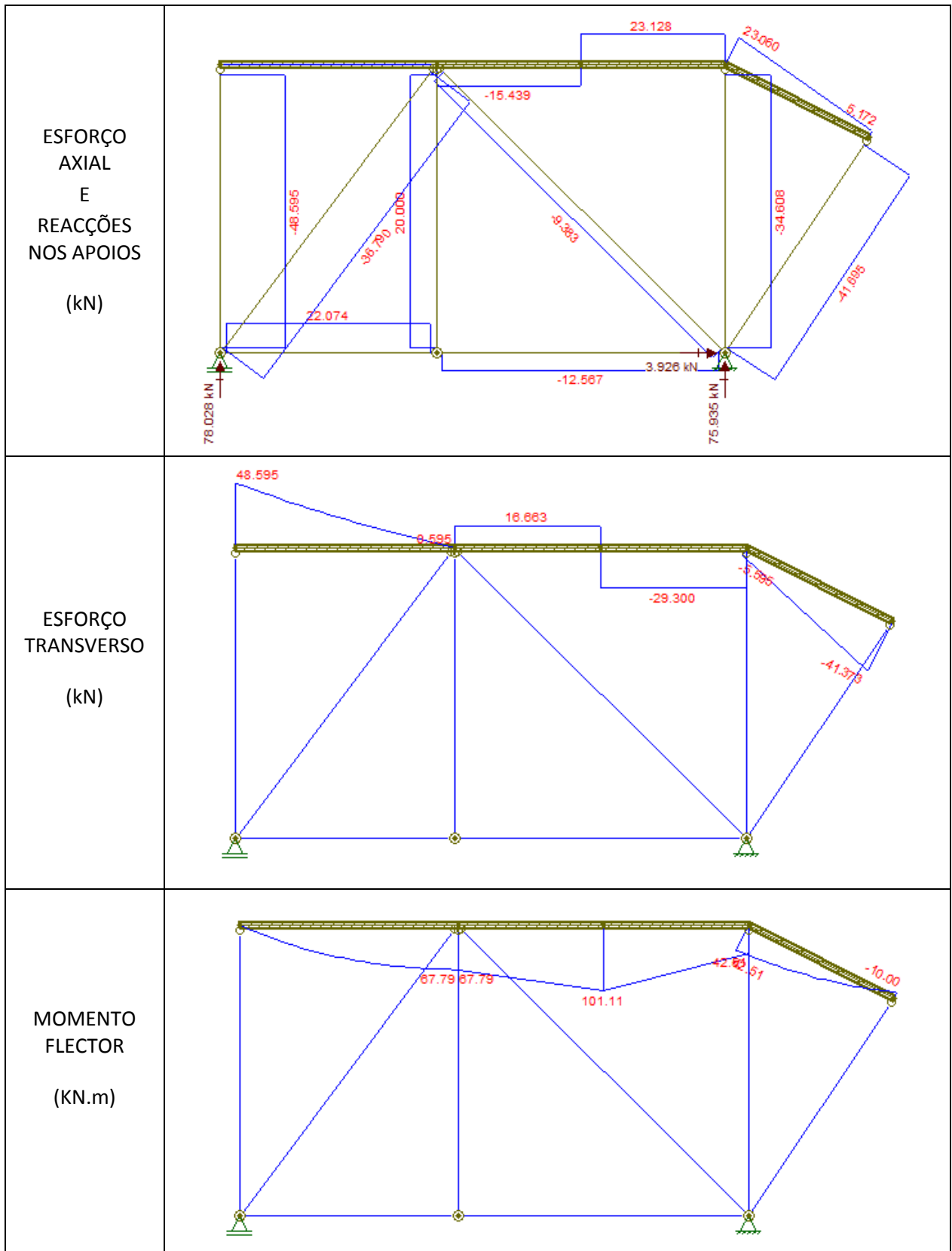
Flexible Member  
 Axial Deformation  
 Shear Deformation

Rigid Member

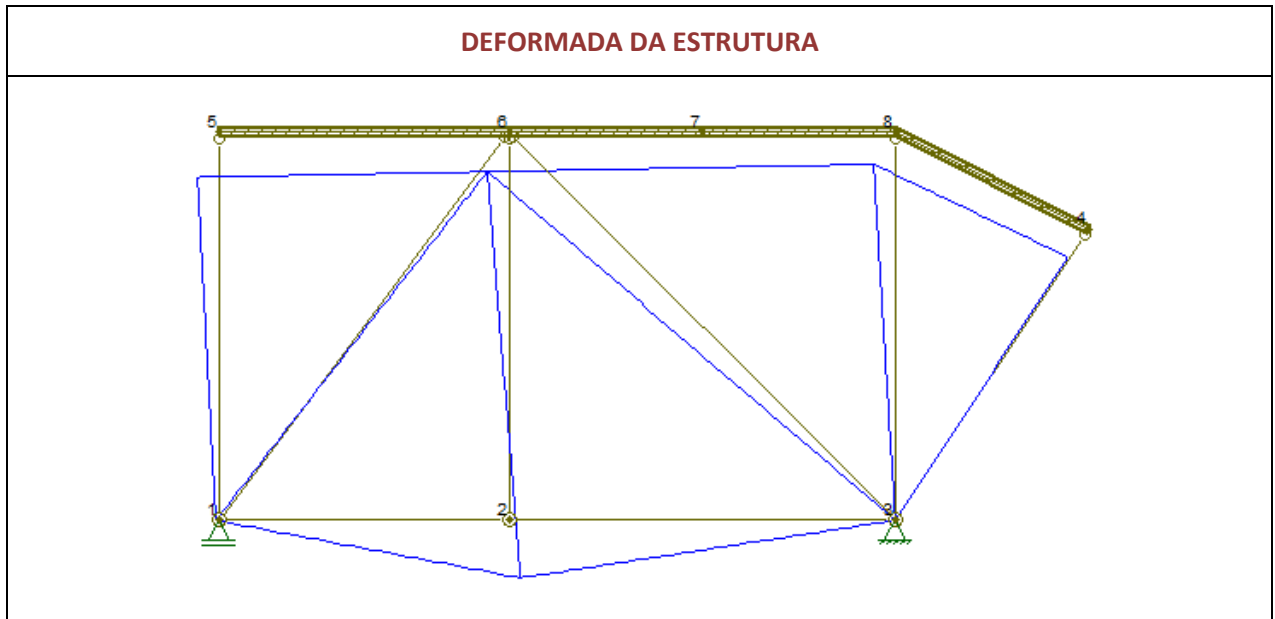
Barra **DEFG**: barra rígida indeformável:



• Reacções nos apoios e esforços nas barras



Nota: Esforço axial negativo ⇒ compressão  
Esforço axial positivo ⇒ tracção

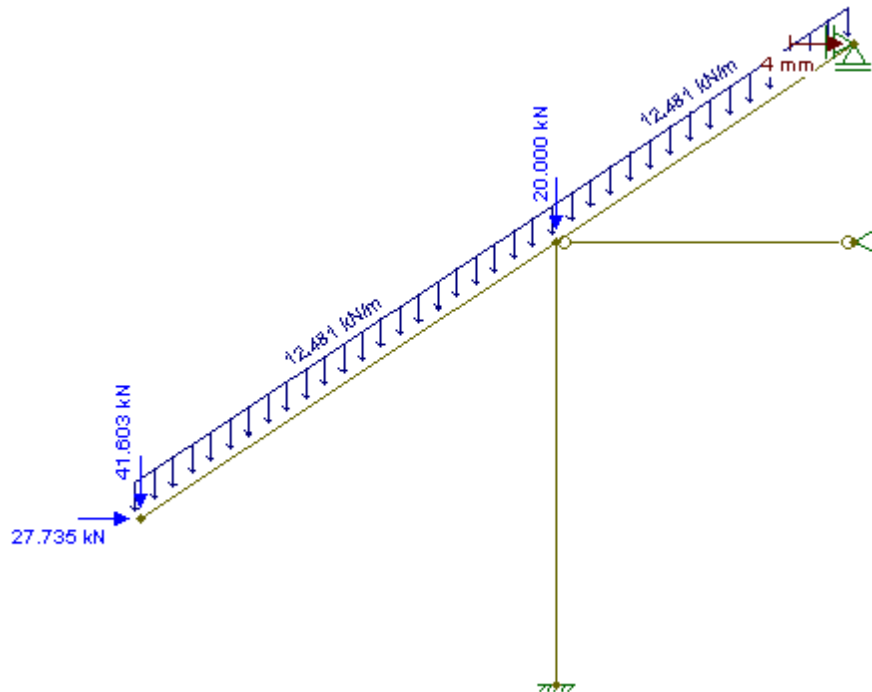


Sentidos positivos dos deslocamentos e rotação:

DESLOCAMENTOS E ROTAÇÕES DOS NÓS	
Nó 1	Dx = -0.016 mm Dy = 0.000 mm Rz = 0.000e+000 rad
Nó 2	Dx = 0.050 mm Dy = -0.250 mm Rz = 0.000e+000 rad
Nó 3	Dx = 0.000 mm Dy = 0.000 mm Rz = 0.000e+000 rad
Nó 4	Dx = -0.087 mm Dy = -0.122 mm Rz = 7.993e-006 rad
Nó 5	Dx = -0.095 mm Dy = -0.194 mm Rz = 7.993e-006 rad
Nó 6	Dx = -0.095 mm Dy = -0.170 mm Rz = 7.993e-006 rad
Nó 7	Dx = -0.095 mm Dy = -0.154 mm Rz = 7.993e-006 rad
Nó 8	Dx = -0.095 mm Dy = -0.138 mm Rz = 7.993e-006 rad

**RESOLUÇÃO – EXERCÍCIO 5**

• **Geometria do exercício**



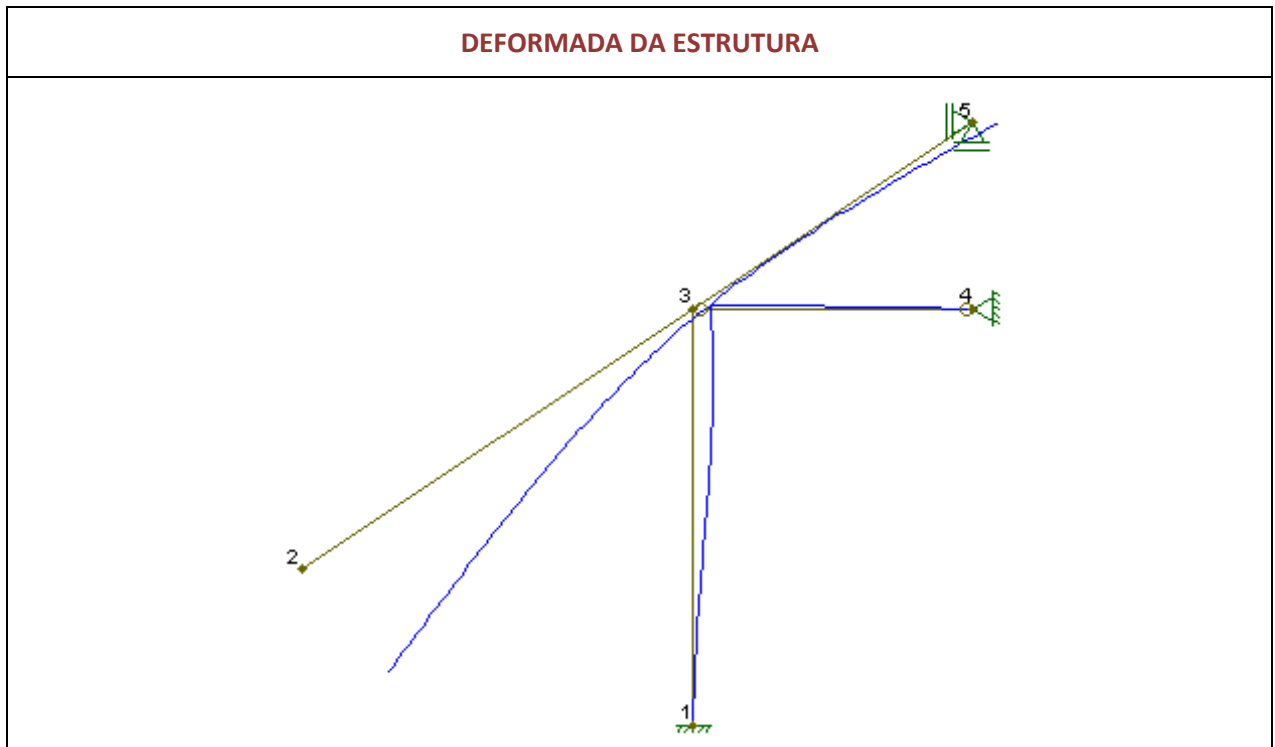
• **Material e secção transversal das barras**

Material Parameters	Section Properties	Section Properties	Section Properties
<p>Mat ABCD</p> <p>E: 29.000 GPa                      ν: 0.20                      α: 0.000010 /°C</p>	<p>Sec AC</p> <p>d: 30.0 cm                      b: 30.0 cm  <math>\bar{y}</math>: 15.0 cm                      A: 900.00 cm<sup>2</sup>                      As: 750.00 cm<sup>2</sup>                      I: 67500.00 cm<sup>4</sup></p>	<p>Sec BCD</p> <p>d: 55.0 cm                      b: 30.0 cm  <math>\bar{y}</math>: 27.5 cm                      A: 1650.00 cm<sup>2</sup>                      As: 1375.00 cm<sup>2</sup>                      I: 415937.50 cm<sup>4</sup></p>	<p>Sec CE</p> <p>A: 50.00 cm<sup>2</sup>                      As: 42.00 cm<sup>2</sup>                      I: 417.00 cm<sup>4</sup>                      d: 10.0 cm  <math>\bar{y}</math>: 5.0 cm</p>
<p>Mat CE</p> <p>E: 210.000 GPa                      ν: 0.30                      α: 0.000010 /°C</p>			

• Reacções nos apoios e esforços nas barras

<p>ESFORÇO AXIAL E REACÇÕES NOS APOIOS (kN)</p>	
<p>ESFORÇO TRANSVERSO (kN)</p>	
<p>MOMENTO FLECTOR (KN.m)</p>	

• Deformada da estrutura



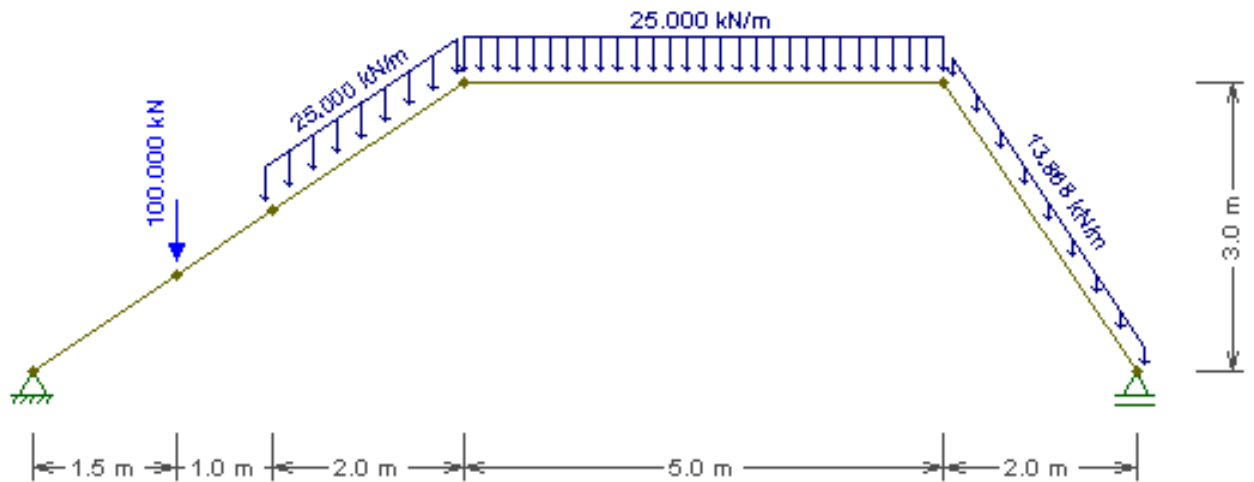
Sentidos positivos dos deslocamentos e rotação:

<b>DESLOCAMENTOS E ROTAÇÕES DOS NÓS</b>	
<b>Nó 1</b>	Dx = 0.000 mm Dy = 0.000 mm Rz = 0.000e+000 rad
<b>Nó 2</b>	Dx = 13.683 mm Dy = -15.960 mm Rz = 6.248e-003 rad
<b>Nó 3</b>	Dx = 2.590 mm Dy = 0.702 mm Rz = 1.513e-003 rad
<b>Nó 4</b>	Dx = 0.000 mm Dy = 0.000 mm Rz = 0.000e+000 rad
<b>Nó 5</b>	Dx = 4.000 mm Dy = 0.000 mm Rz = -1.390e-003 rad

Máximo deslocamento transversal (flecha máx.) da barra **1 - 3**: 3.052 mm (numa secção a 3.07 m do nó **1**)

**RESOLUÇÃO – EXERCÍCIO 6**

• **Geometria do exercício**



• **Material e secção transversal das barras**

**Material Parameters**

MATERIAL

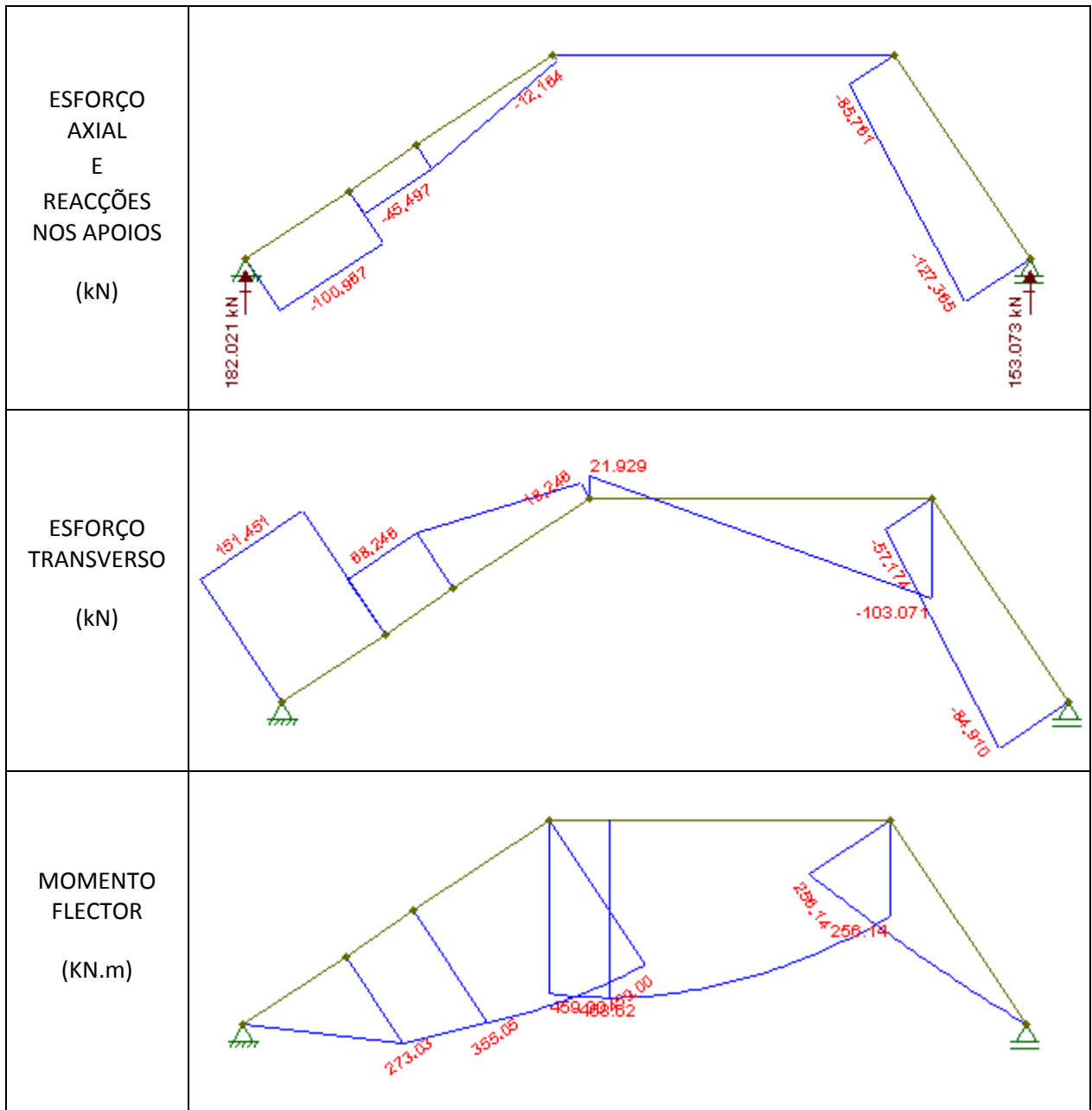
E: 200.000 GPa  
 ν: 0.30  
 α: 0.000012 /°C

**Section Properties**

Sec I

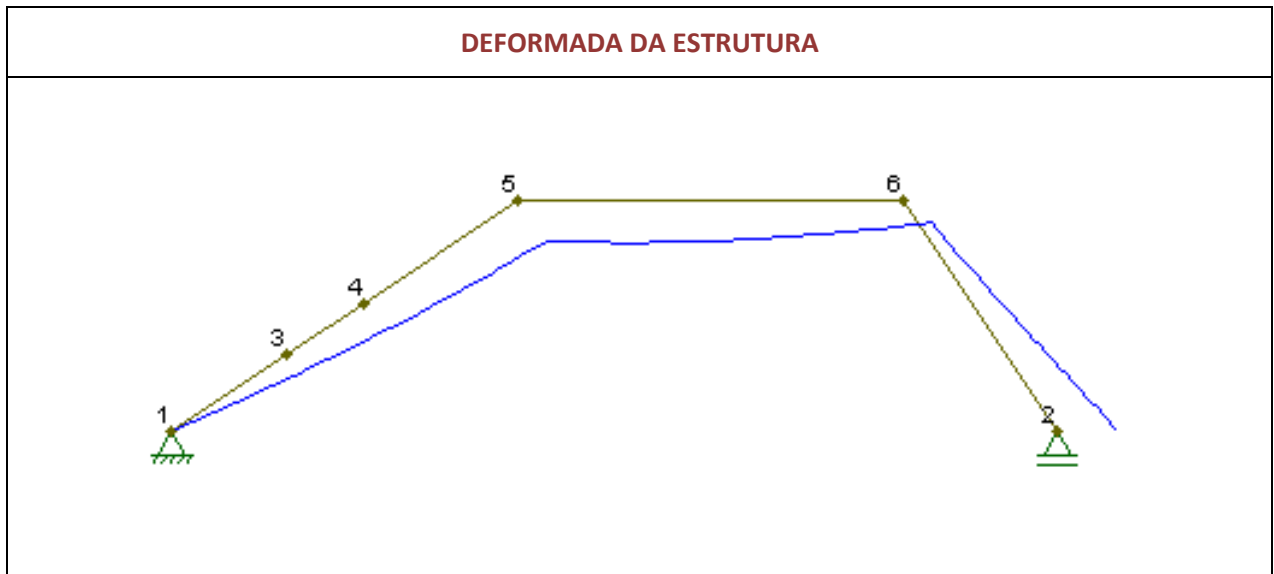
d: 60.0 cm  
 b: 40.0 cm  
 tw: 1.0 cm  
 tf: 1.2 cm  
 h: 57.6 cm  
 $\bar{y}$ : 30.0 cm  
 A: 153.60 cm<sup>2</sup>  
 As: 60.00 cm<sup>2</sup>  
 I: 98915.33 cm<sup>4</sup>

• Reacções nos apoios e esforços nas barras



Momento máximo na barra **BC**: 468.62 kNm, numa secção a 0.877 m do nó B.

• Deformada da estrutura



Sentidos positivos dos deslocamentos e rotação:



DESLOCAMENTOS E ROTAÇÕES DOS NÓS	
Nó 1	Dx = 0.000 mm Dy = 0.000 mm Rz = -1.074e-002 rad
Nó 2	Dx = 51.170 mm Dy = 0.000 mm Rz = 1.032e-002 rad
Nó 3	Dx = 10.276 mm Dy = -15.521 mm Rz = -9.496e-003 rad
Nó 4	Dx = 15.984 mm Dy = -24.115 mm Rz = -7.588e-003 rad
Nó 5	Dx = 22.845 mm Dy = -34.448 mm Rz = -2.521e-003 rad
Nó 6	Dx = 22.845 mm Dy = -19.033 mm Rz = 7.833e-003 rad

Máximo deslocamento transversal (flecha máx.) da barra 5 - 6: 35.80 mm (numa secção a 1.10 m do nó 5).