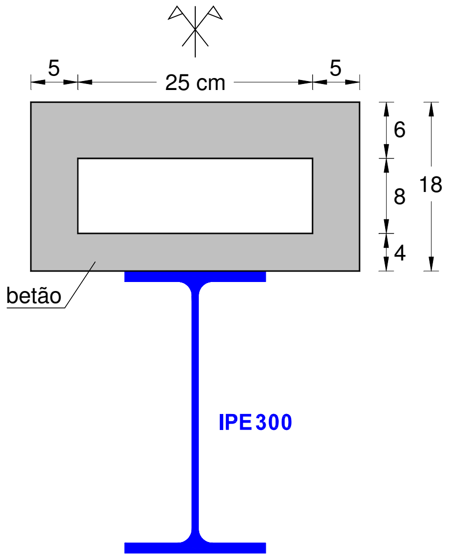
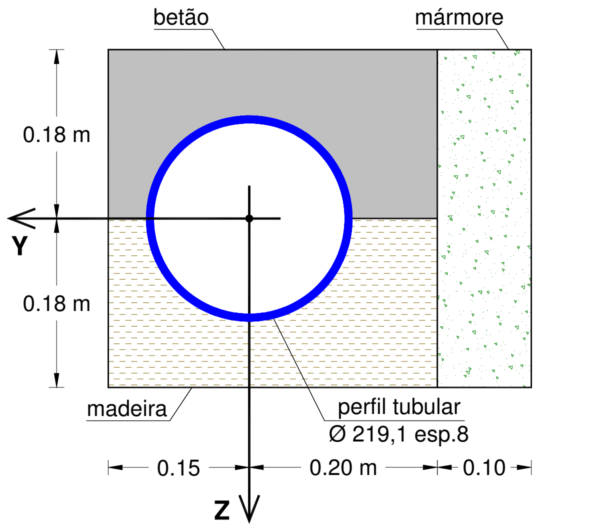
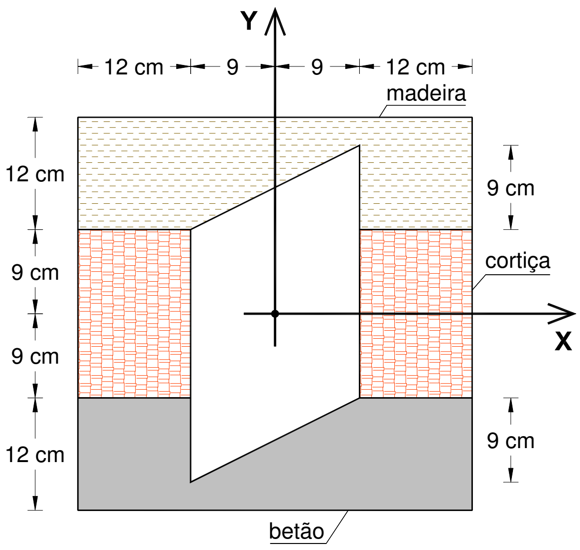
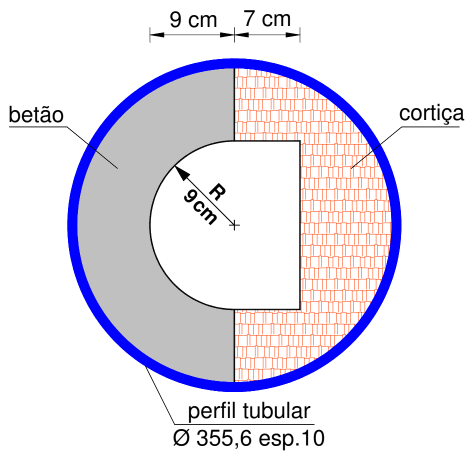
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA









GEOMETRIA DE MASSAS

CENTROS DE GRAVIDADE

FICHA 11 - EXERCÍCIO 3 - RESOLUÇÃO

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO 3 - FIGURA 1

Considere a secção transversal representada na Figura 1.
Calcule as coordenadas do centro de gravidade.
Represente o centro de gravidade na figura.

PESO VOLÚMICO DOS MATERIAIS	
AÇO	**BETÃO**
77 kN/m^3	25 kN/m^3

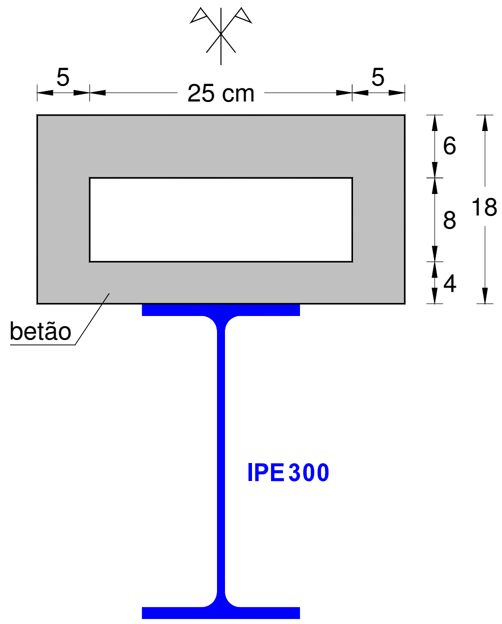
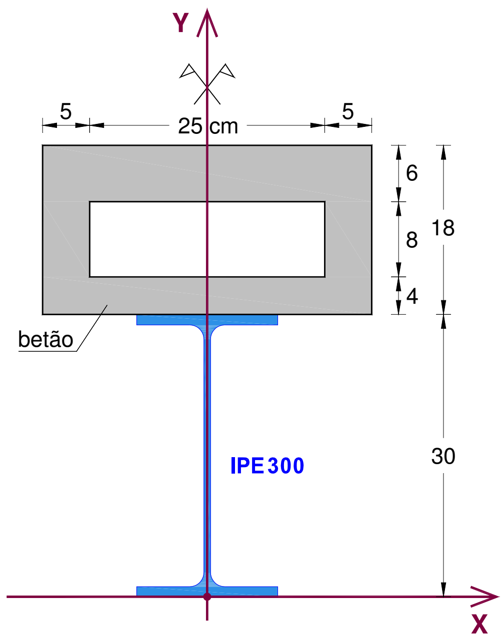


Figura 1

RESOLUÇÃO

Na resolução deste exercício serão utilizados os eixos representados na figura abaixo.

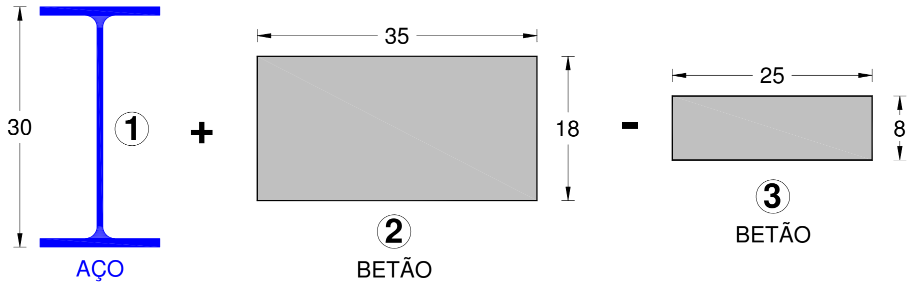
Como o **eixo Y** é um eixo de simetria da figura, o centro de gravidade terá que estar sobre esse eixo, pelo que: $\mathbf{X_G} = 0$.



FICHA 11 – GEOMETRIA DE MASSAS – CENTROS DE GRAVIDADE

ESTÁTICA

EXERCÍCIO 3 - Figura 1 **ISABEL ALVIM TELES**



Secção **1**: $\begin{cases} A_1 = 53{,}81\,cm^2 \text{ (tabela IPE's)} \\ \text{aço} \Rightarrow \gamma_1 = 77\,kN/m^3 \\ Y_{G1} = 15\,cm \end{cases}$

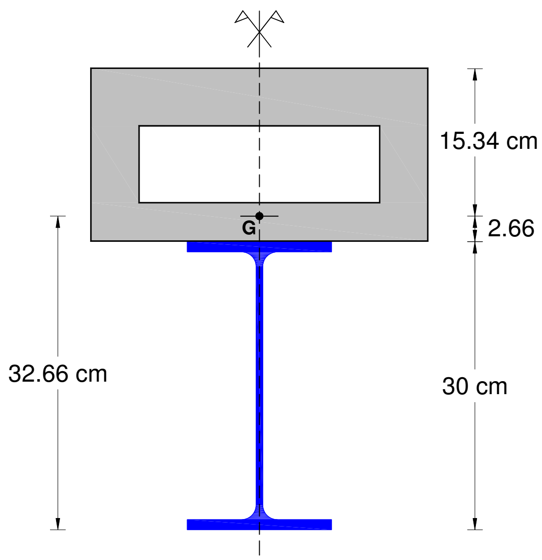
Secção **2**: $\begin{cases} A_2 = 35 \times 18 = 630\,cm^2 \\ \text{aço} \Rightarrow \gamma_2 = 25\,kN/m^3 \\ Y_{G2} = 30 + 9 = 39\,cm \end{cases}$

Secção **3**: $\begin{cases} A_3 = 25 \times 8 = 200\,cm^2 \\ \text{aço} \Rightarrow \gamma_3 = 25\,kN/m^3 \\ Y_{G3} = 30 + 4 + 4 = 38\,cm \end{cases}$

Secção	**A_i** (cm^2)	**γ_i** (kN/m^3)	**$A_i \cdot \gamma_i$**	**Y_{Gi}** (cm)	**$A_i \cdot \gamma_i \cdot Y_{Gi}$**
1	53,81	77	4143,37	15	62150,55
2	630	25	15750	39	614250
- 3	- 200	25	- 5000	38	- 190000
$\sum$			14893,37		486400,55

Nota: Como a secção 3 é a subtrair, na tabela atribuiu-se o sinal negativo à respectiva área.

$$Y_G = \frac{\sum A_i \cdot \gamma_i \cdot Y_{Gi}}{\sum A_i \cdot \gamma_i} = \frac{486400{,}55}{14893{,}37} = 32{,}66\,cm$$



EXERCÍCIO 3 - FIGURA 2

Considere a secção transversal representada na Figura 2.

Calcule as coordenadas do centro de gravidade referidas ao respectivo sistema de eixos.

Represente o centro de gravidade na figura.

PESO VOLÚMICO DOS MATERIAIS			
AÇO	BETÃO	MADEIRA	MÁRMORE
77 kN/m^3	25 kN/m^3	6 kN/m^3	30 kN/m^3

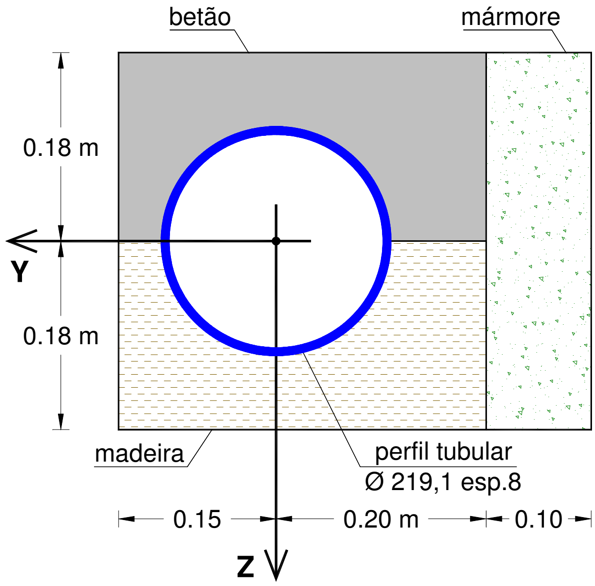
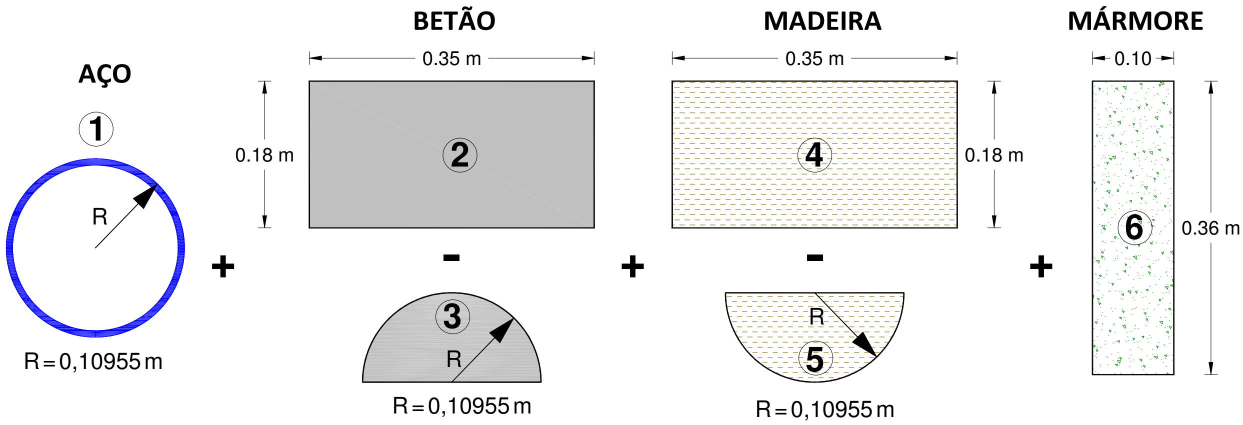


Figura 2

RESOLUÇÃO



$$\text{Secção } \mathbf{1}: \begin{cases} A_1 = 53{,}1\,\text{cm}^2 = 53{,}1 \times 10^{-4}\,\text{m}^2 \ \ \text{(tabela perfis tubulares)} \\ \text{aço} \ \Rightarrow \ \gamma_1 = 77\,\text{kN/m}^3 \\ Y_{G1} = 0 \\ Z_{G1} = 0 \end{cases}$$

FICHA 11 – GEOMETRIA DE MASSAS – CENTROS DE GRAVIDADE

ESTÁTICA

EXERCÍCIO 3 - Figura 2 **ISABEL ALVIM TELES**

Secção **2**:
$$\begin{cases} A_2 = 0{,}35 \times 0{,}18 = 630 \times 10^{-4}\ m^2 \\ \text{betão} \Rightarrow \gamma_2 = 25\,kN/m^3 \\ Y_{G2} = -(\frac{0{,}35}{2} - 0{,}15) = -0{,}025\,m \\ Z_{G2} = -\frac{0{,}18}{2} = -0{,}09\,m \end{cases}$$

Secção **3**:
$$\begin{cases} A_3 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \times 0{,}10955^2}{2} m^2 \\ \text{betão} \Rightarrow \gamma_3 = 25\,kN/m^3 \\ Y_{G3} = 0 \\ Z_{G3} = -\frac{4 \times R}{3\pi} = -\frac{4 \times 0{,}10955}{3\pi} m \end{cases}$$

Secção **4**:
$$\begin{cases} A_4 = 0{,}35 \times 0{,}18 = 630 \times 10^{-4}\ m^2 \\ \text{madeira} \Rightarrow \gamma_4 = 6\,kN/m^3 \\ Y_{G4} = -(\frac{0{,}35}{2} - 0{,}15) = -0{,}025\,m \\ Z_{G4} = \frac{0{,}18}{2} = 0{,}09\,m \end{cases}$$

Secção **5**:
$$\begin{cases} A_5 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \times 0{,}10955^2}{2} m^2 \\ \text{betão} \Rightarrow \gamma_5 = 6\,kN/m^3 \\ Y_{G5} = 0 \\ Z_{G5} = \frac{4 \times R}{3\pi} = \frac{4 \times 0{,}10955}{3\pi} m \end{cases}$$

Secção **6**:
$$\begin{cases} A_6 = 0{,}10 \times 0{,}36 = 360 \times 10^{-4}\ m^2 \\ \text{mármore} \Rightarrow \gamma_6 = 30\,kN/m^3 \\ Y_{G6} = -(0{,}20 + \frac{0{,}10}{2}) = -0{,}25\,m \\ Z_{G6} = 0 \end{cases}$$

Secção	**A_i** (m^2)	**γ_i** (kN/m^3)	**$A_i \cdot \gamma_i$**	**Y_{Gi}** (m)	**Z_{Gi}** (m)	**$A_i \cdot \gamma_i \cdot Y_{Gi}$**	**$A_i \cdot \gamma_i \cdot Z_{Gi}$**
1	$53{,}1\text{x}10^{-4}$	77	0,40887	0	0	0	0
2	$630\ \text{x}10^{-4}$	25	1,575	- 0,025	- 0,09	- 0,039375	- 0,14175
- 3	$-\frac{\pi \times 0{,}10955^2}{2}$	25	- 0,471286	0	$-\frac{4 \times 0{,}10955}{3\ \pi}$	0	0,021912
4	$630\ \text{x}10^{-4}$	6	0,378	- 0,025	0,09	- 0,00945	0,03402
- 5	$-\frac{\pi \times 0{,}10955^2}{2}$	6	- 0,113109	0	$\frac{4 \times 0{,}10955}{3\ \pi}$	0	- 0,005259
6	$360\ \text{x}10^{-4}$	30	1,08	- 0,25	0	- 0,27	0
$\sum$			**2,8575**			**- 0,318825**	**- 0,091077**

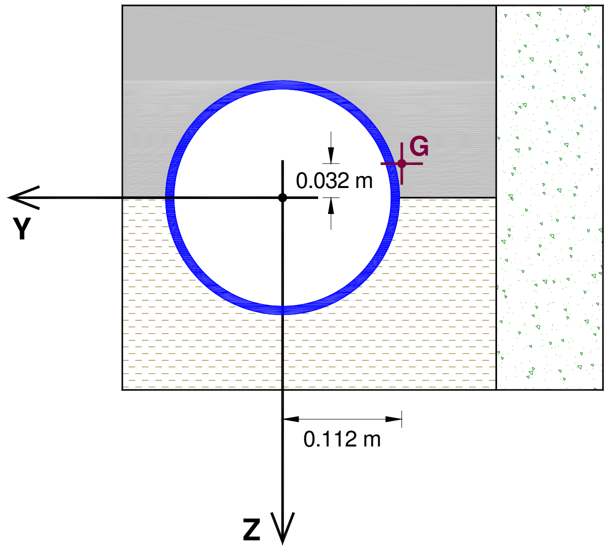
Nota: Como as secções 3 e 5 são a subtrair, na tabela atribuiu-se o sinal negativo às respectivas áreas.

$$Y_G = \frac{\sum A_i \cdot \gamma_i \cdot Y_{Gi}}{\sum A_i \cdot \gamma_i} = \frac{-0{,}318825}{2{,}8575} = -0{,}1116\ m$$

$$Z_G = \frac{\sum A_i \cdot \gamma_i \cdot Z_{Gi}}{\sum A_i \cdot \gamma_i} = \frac{-0{,}091077}{2{,}8575} = -0{,}0319\ m$$

FICHA 11 – GEOMETRIA DE MASSAS – CENTROS DE GRAVIDADE

ESTÁTICA **EXERCÍCIO 3 - Figura 2** **ISABEL ALVIM TELES**



EXERCÍCIO 3 - FIGURA 3

Considere a secção transversal representada na Figura 3.

Calcule as coordenadas do centro de gravidade referidas ao respectivo sistema de eixos.

Represente o centro de gravidade na figura.

PESO VOLÚMICO DOS MATERIAIS		
BETÃO	**MADEIRA**	**CORTIÇA**
25 kN/m^3	6 kN/m^3	3 kN/m^3

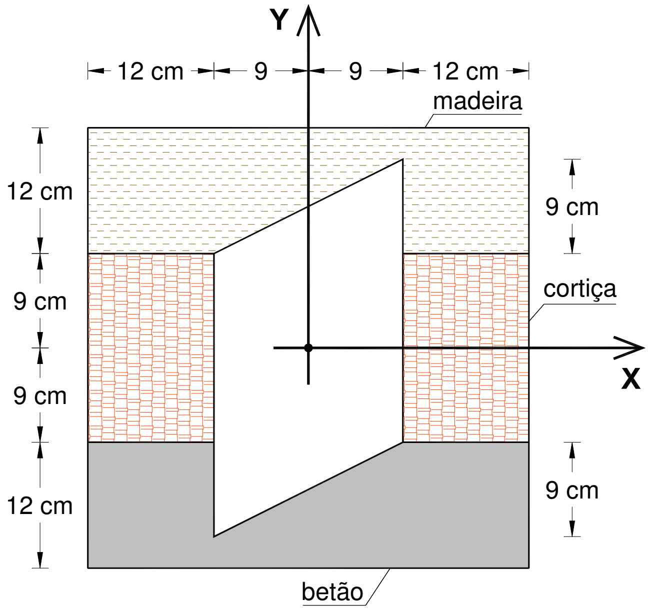
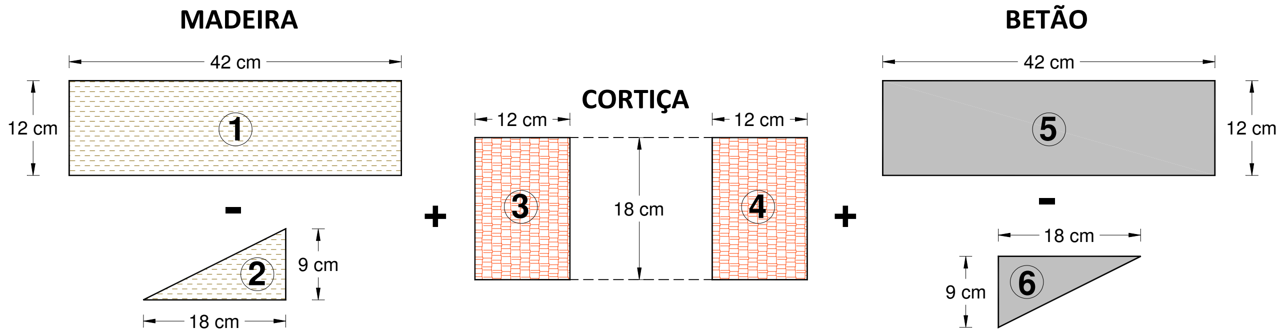


Figura 3

RESOLUÇÃO



Secção **1**:
$$\begin{cases} A_1 = 42\times 12 = 504\,\text{cm}^2 \\ \text{madeira} \Rightarrow \gamma_1 = 6\,\text{kN/m}^3 \\ X_{G1} = 0 \\ Y_{G1} = 9+\dfrac{12}{2} = 15\,\text{cm} \end{cases}$$

Secção **2**:
$$\begin{cases} A_2 = \dfrac{18\times 9}{2} = 81\,\text{cm}^2 \\ \text{madeira} \Rightarrow \gamma_2 = 6\,\text{kN/m}^3 \\ X_{G2} = 9-\dfrac{18}{3} = 3\,\text{cm} \\ Y_{G2} = 9+\dfrac{9}{3} = 12\,\text{cm} \end{cases}$$

Secção **3**:
$$\begin{cases} A_3 = 12\times 18 = 216\,\text{cm}^2 \\ \text{cortiça} \Rightarrow \gamma_3 = 3\,\text{kN/m}^3 \\ X_{G3} = -(9+\dfrac{12}{2}) = -15\,\text{cm} \\ Y_{G3} = 0 \end{cases}$$

Secção **4**:
$$\begin{cases} A_4 = 12\times 18 = 216\,\text{cm}^2 \\ \text{cortiça} \Rightarrow \gamma_3 = 3\,\text{kN/m}^3 \\ X_{G4} = 9+\dfrac{12}{2} = 15\,\text{cm} \\ Y_{G4} = 0 \end{cases}$$

Secção **5**:
$$\begin{cases} A_5 = 42 \times 12 = 504\,cm^2 \\ \text{betão} \Rightarrow \gamma_5 = 25\,kN/m^3 \\ X_{G5} = 0 \\ Y_{G5} = -(9+\frac{12}{2}) = -15\,cm \end{cases}$$

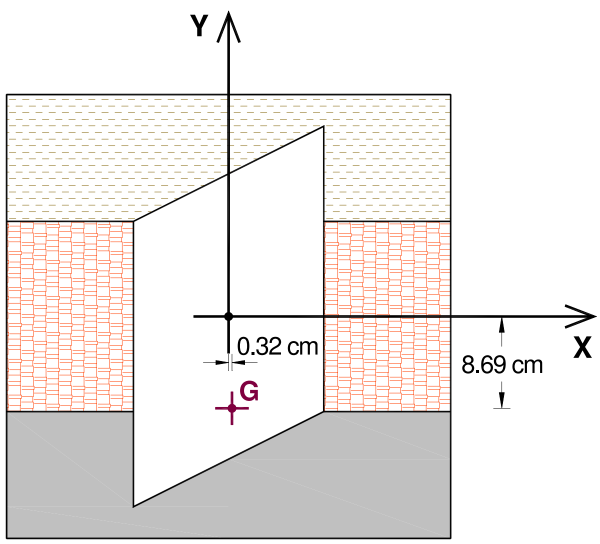
Secção **6**:
$$\begin{cases} A_6 = \frac{18 \times 9}{2} = 81\,cm^2 \\ \text{betão} \Rightarrow \gamma_6 = 25\,kN/m^3 \\ X_{G6} = -(9-\frac{18}{3}) = -3\,cm \\ Y_{G6} = -(9+\frac{9}{3}) = -12\,cm \end{cases}$$

Secção	**A_i** (cm^2)	**γ_i** (kN/m^3)	**$A_i \cdot \gamma_i$**	**X_{Gi}** (cm)	**Y_{Gi}** (cm)	**$A_i \cdot \gamma_i \cdot X_{Gi}$**	**$A_i \cdot \gamma_i \cdot Y_{Gi}$**
1	504	6	3024	0	15	0	45360
- 2	- 81	6	- 486	3	12	- 1458	- 5832
3	216	3	648	-15	0	- 9720	0
4	216	3	648	15	0	9720	0
5	504	25	12600	0	- 15	0	- 189000
- 6	- 81	25	- 2025	- 3	- 12	6075	24300
$\sum$			**14409**			**4617**	**- 125172**

Nota: Como as secções 2 e 6 são a subtrair, na tabela atribuiu-se o sinal negativo às respectivas áreas.

$$X_G = \frac{\sum A_i \cdot \gamma_i \cdot X_{Gi}}{\sum A_i \cdot \gamma_i} = \frac{4617}{14409} = 0{,}32\,cm$$

$$Y_G = \frac{\sum A_i \cdot \gamma_i \cdot Y_{Gi}}{\sum A_i \cdot \gamma_i} = \frac{-125172}{14409} = -8{,}69\,cm$$



EXERCÍCIO 3 - FIGURA 4

Considere a secção transversal representada na Figura 4.

Arbitre um sistema de eixos e calcule as coordenadas do centro de gravidade.

Represente o centro de gravidade na figura.

PESO VOLÚMICO DOS MATERIAIS		
AÇO	BETÃO	CORTIÇA
77 kN/m³	25 kN/m³	3 kN/m³

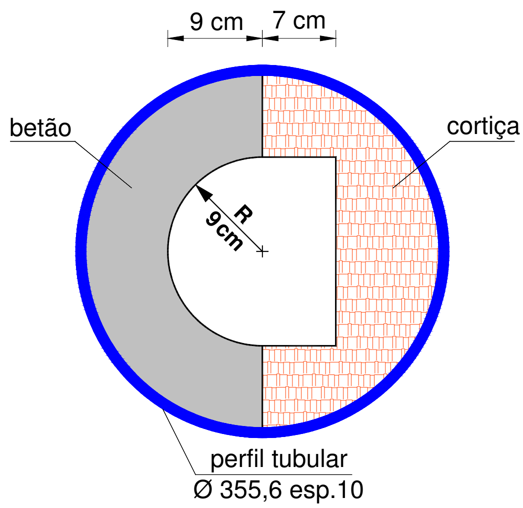
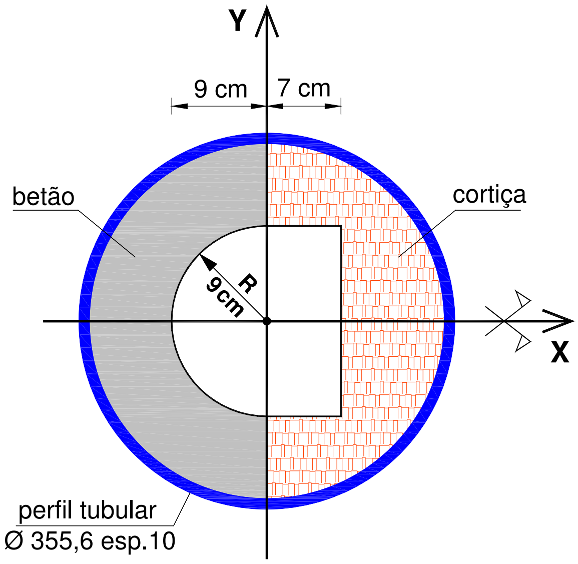


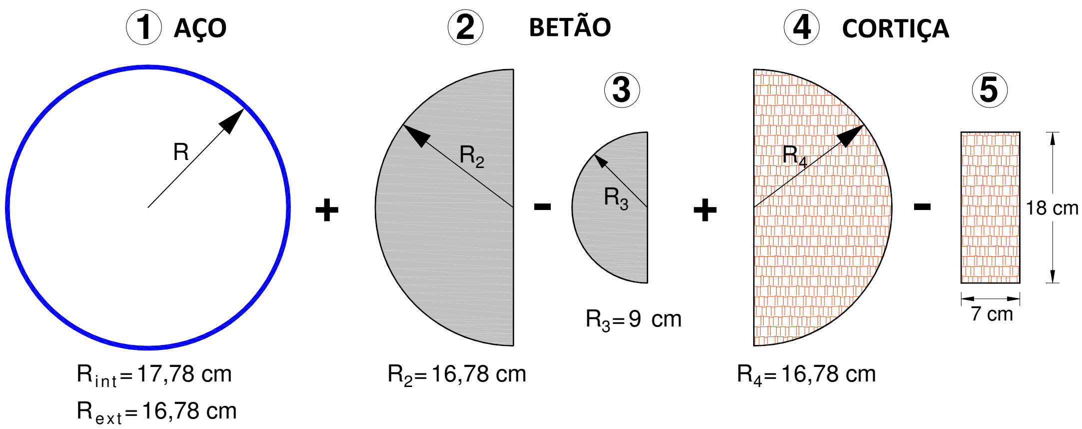
Figura 4

RESOLUÇÃO

Na resolução deste exercício foi arbitrado o sistema de eixos representado na figura.

Como o **eixo X** é um eixo de simetria da figura, o centro de gravidade terá que estar sobre esse eixo, pelo que: $\mathbf{Y_G} = 0$.





Secção **1**:
$$\begin{cases} A_1 = 109\,\text{cm}^2 \ \ \text{(tabela perfis tubulares)} \\ \text{aço} \ \Rightarrow \ \gamma_1 = 77\,\text{kN/m}^3 \\ X_{G1} = 0 \end{cases}$$

Secção **2**:
$$\begin{cases} A_2 = \dfrac{\pi \times 16{,}78^2}{2} = 140{,}7842\,\pi \ \text{cm}^2 \\ \text{betão} \ \Rightarrow \ \gamma_2 = 25\,\text{kN/m}^3 \\ X_{G2} = -\dfrac{4 \times 16{,}78}{3\,\pi} = -\dfrac{67{,}12}{3\,\pi}\,\text{cm} \end{cases}$$

Secção **3**:
$$\begin{cases} A_3 = \dfrac{\pi \times 9^2}{2} = 40{,}5\,\pi \ \text{cm}^2 \\ \text{betão} \ \Rightarrow \ \gamma_3 = 25\,\text{kN/m}^3 \\ X_{G3} = -\dfrac{4 \times 9}{3\,\pi} = -\dfrac{12}{\pi}\,\text{cm} \end{cases}$$

Secção **4**:
$$\begin{cases} A_4 = \dfrac{\pi \times 16{,}78^2}{2} = 140{,}7842\,\pi \ \text{cm}^2 \\ \text{cortiça} \ \Rightarrow \ \gamma_4 = 3\,\text{kN/m}^3 \\ X_{G4} = \dfrac{4 \times 16{,}78}{3\,\pi} = \dfrac{67{,}12}{3\,\pi}\,\text{cm} \end{cases}$$

Secção **5**:
$$\begin{cases} A_5 = 7 \times 18 = 126 \ \text{cm}^2 \\ \text{cortiça} \ \Rightarrow \ \gamma_5 = 3\,\text{kN/m}^3 \\ X_{G5} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5\,\text{cm} \end{cases}$$

Secção	**A_i** (cm^2)	**γ_i** (kN/m^3)	**$A_i \cdot \gamma_i$**	**X_{Gi}** (cm)	**$A_i \cdot \gamma_i \cdot Y_{Gi}$**
1	109	77	8393	0	0
2	140,7842 π	25	3519,605 π	$-\dfrac{67{,}12}{3\,\pi}$	- 78745,296
- 3	- 40,5 π	25	- 1012,5 π	$-\dfrac{12}{\pi}$	12150
4	140,7842 π	3	422,3526 π	$\dfrac{67{,}12}{3\,\pi}$	9449,436
- 5	- 126	3	- 378	3,5	- 1323
$\sum$			**17218,162**		**- 58468,86**

Nota: Como as secções 3 e 5 são a subtrair, na tabela atribuiu-se o sinal negativo às respectivas áreas.

$$X_G = \frac{\sum A_i \cdot \gamma_i \cdot X_{Gi}}{\sum A_i \cdot \gamma_i} = \frac{-58468{,}86}{17218{,}162} = -3{,}40\,\text{cm}$$