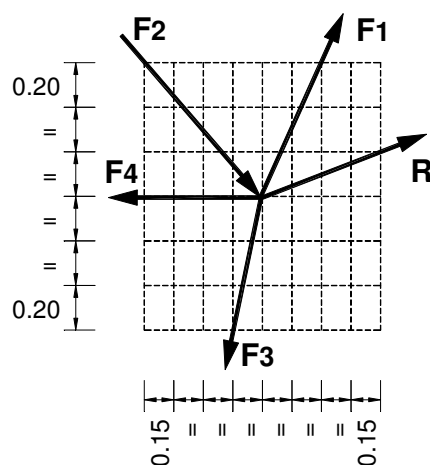
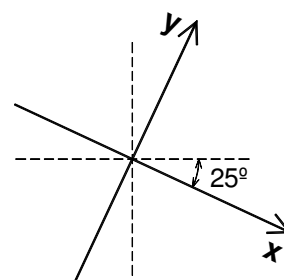
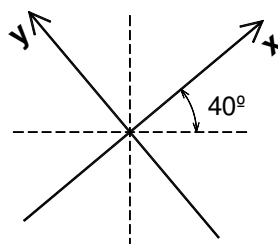
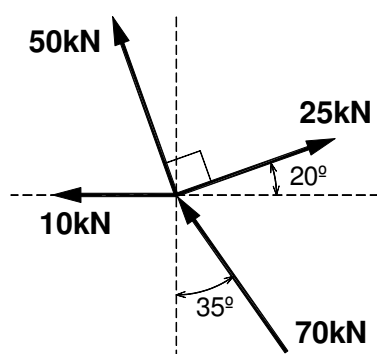


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA



ESTÁTICA DO PONTO MATERIAL

EQUILÍBRIO DO PONTO

SISTEMAS DE FORÇAS EQUIVALENTES

EXERCÍCIOS PROPOSTOS E RESOLVIDOS

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO 1

Considere o sistema de forças aplicado num ponto representado na *Figura 1* e os sistemas de eixos (x,y) das *Figuras 2* e 3 ($x \perp y$).

- Substitua o sistema de forças da *Figura 1* por outro equivalente composto por duas forças com a direcção dos eixos (x,y) da *Figura 2*.
- Substitua o sistema de forças da *Figura 1* por outro equivalente composto por duas forças com a direcção dos eixos (x,y) da *Figura 3*.
- Determine a resultante do sistema de forças representado na *Figura 1*.
- Caracterize completamente a força que actuando conjuntamente com o sistema representado na *Figura 1*, conduz ao equilíbrio do ponto.
- Determine a força **F** que actuando conjuntamente com o sistema representado na *Figura 1*, torna o novo sistema (forças da *Figura 1* + **F**) equivalente a uma força horizontal ($\leftarrow$) de 60 kN.
- Considere um sistema constituído por uma força **F** actuando conjuntamente com as forças de 25 kN e 70 kN representadas na *Figura 1*.
 - Determine a menor força **F** que conduz a uma resultante com a direcção do eixo **y** da *Figura 2*.
 - Caracterize a resultante deste novo sistema de forças.

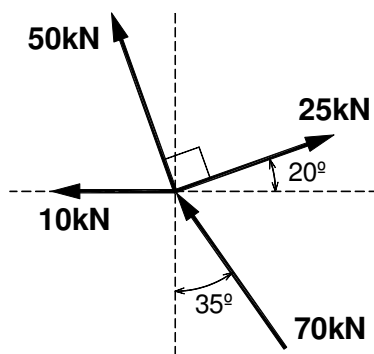


Figura 1

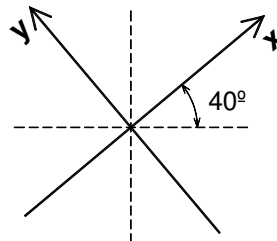


Figura 2

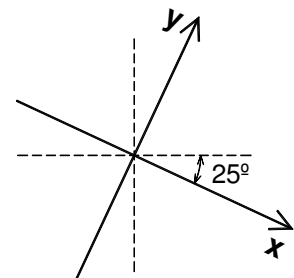


Figura 3

RESOLUÇÃO

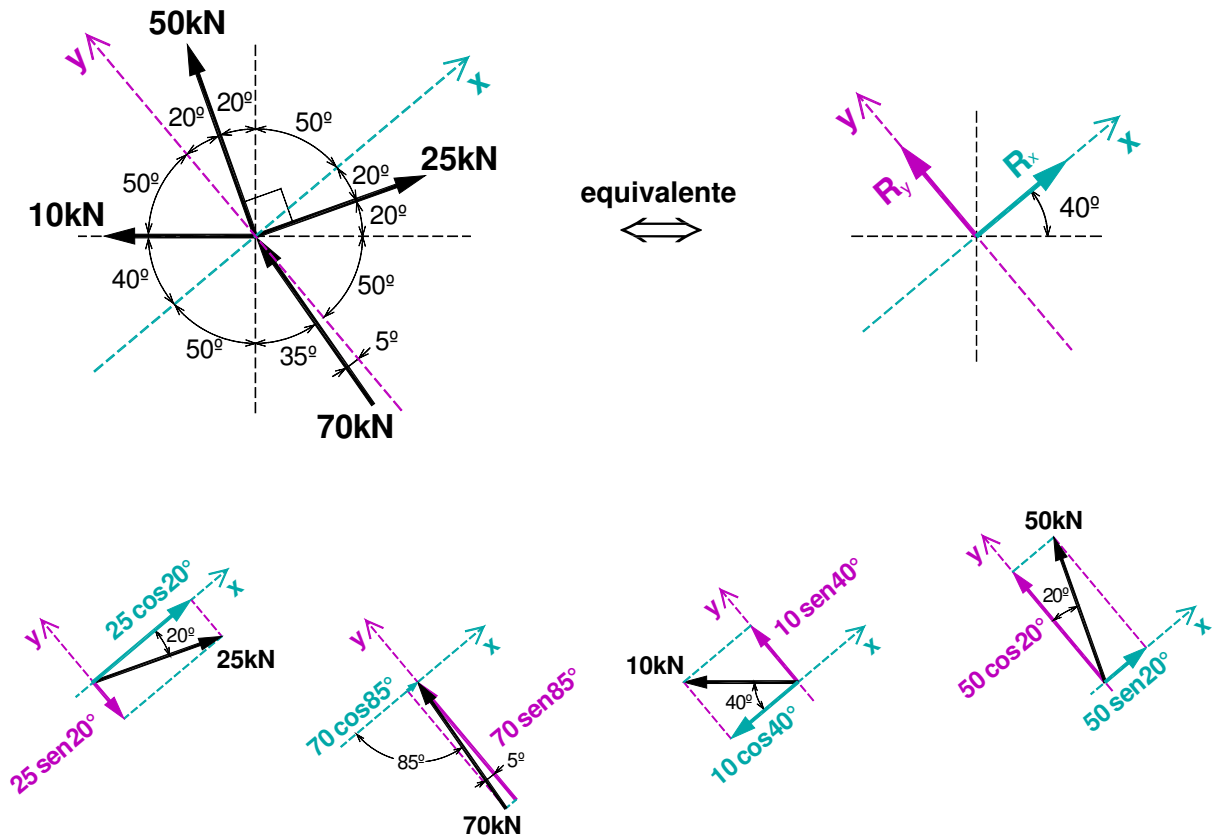
SISTEMAS DE FORÇAS EQUIVALENTES

Dois sistemas de forças a actuar num ponto dizem-se equivalentes se tiverem a mesma **resultante**.

Se um sistema de forças **F** é equivalente a um sistema de forças **Q** $\Rightarrow$

$$\bar{R}_F = \bar{R}_Q \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = \sum Q_x \\ \sum F_y = \sum Q_y \end{cases}$$

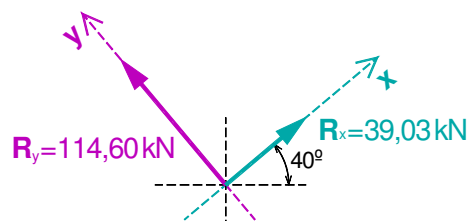
Alínea a)



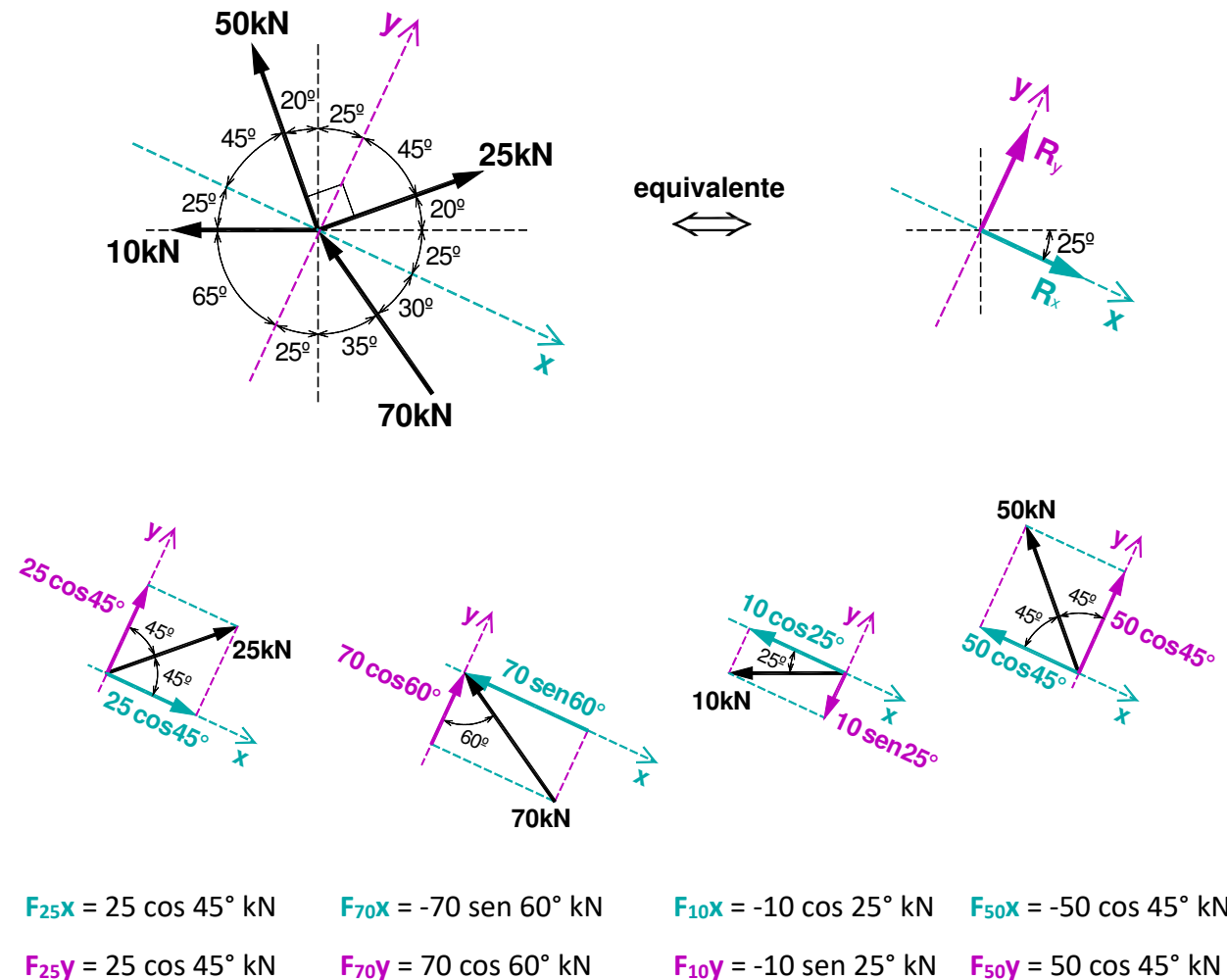
$$\begin{aligned}
 F_{25x} &= 25 \cos 20^\circ \text{ kN} & F_{70x} &= 70 \cos 85^\circ \text{ kN} & F_{10x} &= -10 \cos 40^\circ \text{ kN} & F_{50x} &= 50 \sin 20^\circ \text{ kN} \\
 F_{25y} &= -25 \sin 20^\circ \text{ kN} & F_{70y} &= 70 \sin 85^\circ \text{ kN} & F_{10y} &= 10 \sin 40^\circ \text{ kN} & F_{50y} &= 50 \cos 20^\circ \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Sistemas equivalentes:

$$\begin{cases}
 R_x = 25 \cos 20^\circ + 70 \cos 85^\circ - 10 \cos 40^\circ + 50 \sin 20^\circ = 39,034 \text{ kN} \nearrow \\
 R_y = -25 \sin 20^\circ + 70 \sin 85^\circ + 10 \sin 40^\circ + 50 \cos 20^\circ = 114,596 \text{ kN} \nwarrow
 \end{cases}$$

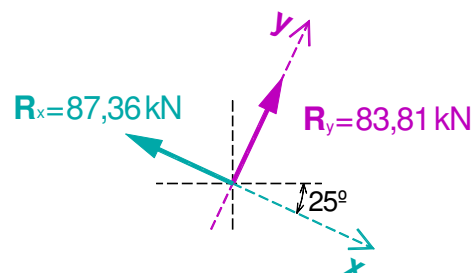


Alínea b)



Sistemas equivalentes:

$$\begin{cases} R_x = 25 \cos 45^\circ - 70 \sin 60^\circ - 10 \cos 25^\circ - 50 \cos 45^\circ = -87,363 \text{ kN} \nwarrow \\ R_y = 25 \cos 45^\circ + 70 \cos 60^\circ - 10 \sin 25^\circ + 50 \cos 45^\circ = 83,807 \text{ kN} \nearrow \end{cases}$$



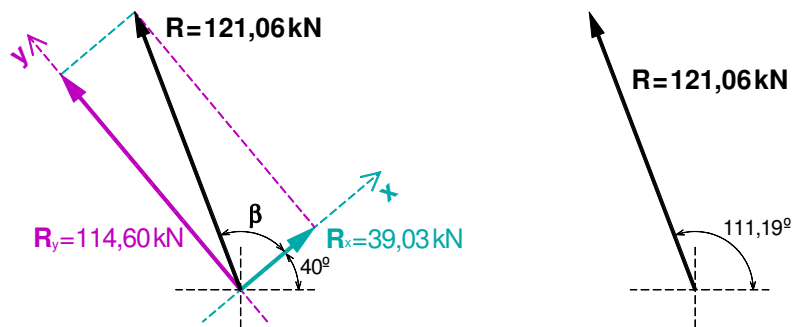
Alínea c)

Resolução tendo em conta os resultados da alínea a) $\begin{cases} R_x = 39,034 \text{ kN} \\ R_y = 114,596 \text{ kN} \end{cases}$

Resultante: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{39,034^2 + 114,596^2} = 121,06 \text{ kN}$

Ângulo β : $\beta = \arctg \frac{R_y}{R_x} = \arctg \frac{114,596}{39,034} = 71,19^\circ$

Ângulo com a horizontal $= \beta + 40^\circ = 71,19^\circ + 40^\circ = 111,19^\circ$

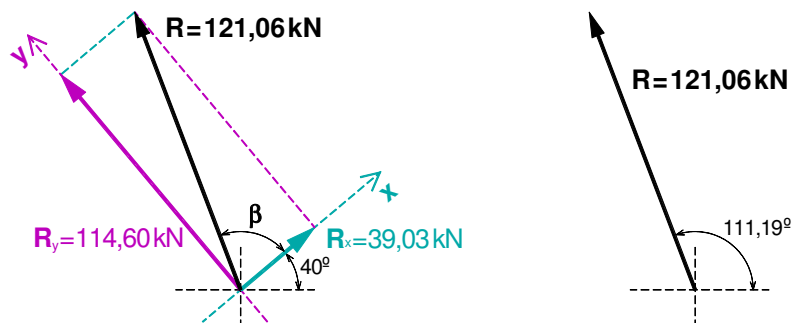


Resolução tendo em conta os resultados da alínea b) $\begin{cases} R_x = -87,363 \text{ kN} \\ R_y = 83,807 \text{ kN} \end{cases}$

Resultante: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-87,363)^2 + 83,807^2} = 121,06 \text{ kN}$

Ângulo α : $\alpha = \arctg \frac{R_y}{R_x} = \arctg \frac{83,807}{87,363} = 43,81^\circ$

Ângulo com a horizontal $= 180^\circ - 25^\circ - \alpha = 180^\circ - 25^\circ - 43,81^\circ = 111,19^\circ$



Alínea d)

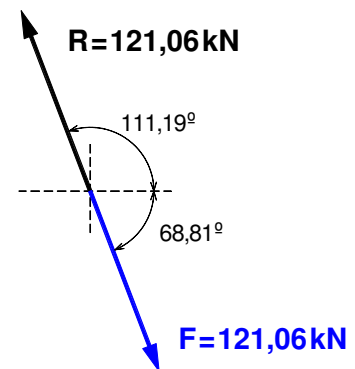
Um ponto material está em equilíbrio quando a resultante das forças que nele atuam é zero.

Condição de equilíbrio de um ponto material: $\sum F = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$

Na alínea anterior foi determinada a força R equivalente ao sistema de forças representado na *Figura 1*.

Então a força a somar às representadas na Figura 1 para que o ponto esteja em equilíbrio é uma força com igual grandeza e igual direção, mas com sentido contrário a R.

$$\bar{R} + \bar{F} = \bar{0} \Rightarrow F = 121,06 \text{ kN} \searrow$$



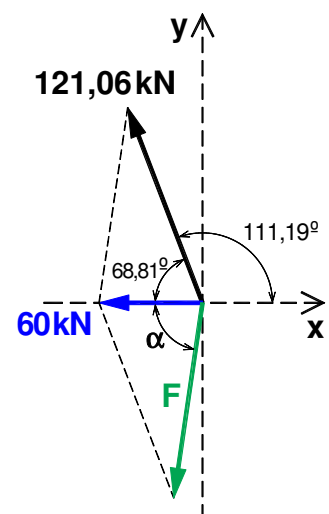
Alínea e)

$$\begin{cases} \sum F_x = -60 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -121,06 \cos 68,81^\circ - F \cos \alpha = -60 \\ 121,06 \sin 68,81^\circ - F \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

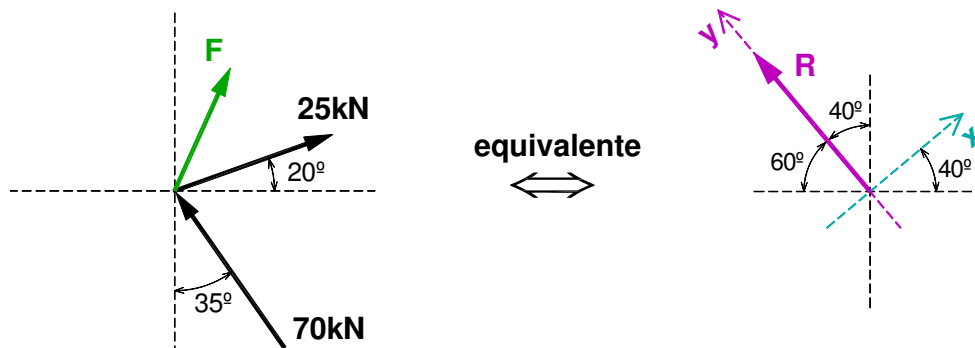
$$\begin{cases} F \cos \alpha = 60 - 121,06 \cos 68,81^\circ \\ F \sin \alpha = 121,06 \sin 68,81^\circ \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{121,06 \sin 68,81^\circ}{60 - 121,06 \cos 68,81^\circ} \Rightarrow \alpha = 81,82^\circ$$

$$|F| = \frac{121,06 \sin 68,81^\circ}{\sin \alpha} = 114,04 \text{ kN}$$



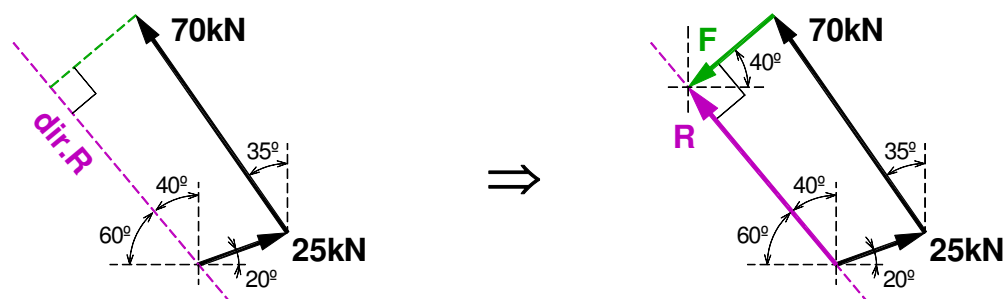
Alínea f)



O vetor **R** é a soma das forças de 25 kN, 70 kN e **F**.

R deverá começar no início da força de 25 kN e terminar no fim da força **F**.

A menor força **F** que permite essa força **R** deverá ser perpendicular à direção de **R**.



$$\bar{F}_{25} + \bar{F}_{70} + \bar{F} = \bar{R}$$

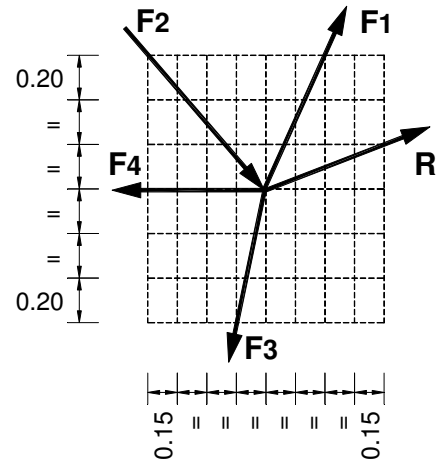
$$\begin{cases} 25 \cos 20^\circ - 70 \sin 35^\circ - F \cos 40^\circ = -R \cos 60^\circ \\ 25 \sin 20^\circ + 70 \cos 35^\circ - F \sin 40^\circ = R \sin 60^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = 18,805 \text{ kN} \\ R = 62,127 \text{ kN} \end{cases} \quad (\text{ver direções e sentidos na figura acima})$$

EXERCÍCIO 2

Considere o sistema de forças aplicado num ponto, constituído por **F₁**, **F₂**, **F₃** e **F₄**, cuja resultante é a força **R**.

- Considerando **R** = 50 kN, **F₃** = 25 kN e **F₄** = 15 kN, determine a grandeza e sentido de **F₁** e **F₂**.
- Considerando **R** = 30 kN, **F₁** = 10 kN e **F₂** = 15 kN, determine a grandeza e sentido de **F₃** e **F₄**.
- Considerando **F₁** = 30 kN e **F₄** = 65 kN, determine a grandeza e sentido de **F₂** e **F₃** para que a resultante tenha uma grandeza de 40 kN, a direcção indicada na figura e sentido contrário ao indicado na figura.
- Considerando **F₁** = 40 kN, **F₂** = 50 kN, **F₃** = 20 kN e **F₄** = 10 kN, caracterize a força **F₅** que deverá adicionar ao sistema para que o ponto esteja em equilíbrio.



RESOLUÇÃO

Alínea a)

<u>Força F₁</u> Ângulo com a horizontal = $\arctg \frac{3 \times 0,20}{2 \times 0,15} = 63,435^\circ$	
<u>Força F₂</u> Ângulo com a horizontal = $\arctg \frac{3 \times 0,20}{4 \times 0,15} = 45^\circ$	
<u>Força F₃</u> Ângulo com a horizontal = $\arctg \frac{3 \times 0,20}{1 \times 0,15} = 75,964^\circ$	
<u>Força F₄</u> Ângulo com a horizontal = 0°	
<u>Força R</u> Ângulo com a horizontal = $\arctg \frac{1 \times 0,20}{4 \times 0,15} = 18,435^\circ$	

ESTÁTICA

FICHA 1 – REVISÕES

EXERCÍCIO 2

ISABEL ALVIM TELES

Resultante **R** $\Rightarrow$ **R** = **F1** + **F2** + **F3** + **F4**

$$\begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R \cos 18,435^\circ = F_1 \cos 63,435^\circ + F_2 \cos 45^\circ - F_3 \cos 75,964^\circ - F_4 \\ R \sin 18,435^\circ = F_1 \sin 63,435^\circ - F_2 \sin 45^\circ - F_3 \sin 75,964^\circ \end{cases}$$

Considerando **R** = 50 kN, **F3** = 25 kN e **F4** = 15 kN:

$$\begin{cases} 50 \cos 18,435^\circ = F_1 \cos 63,435^\circ + F_2 \cos 45^\circ - 25 \cos 75,964^\circ - 15 \\ 50 \sin 18,435^\circ = F_1 \sin 63,435^\circ - F_2 \sin 45^\circ - 25 \sin 75,964^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 = 80,918 \text{ kN} \nearrow \\ F_2 = 45,693 \text{ kN} \searrow \end{cases}$$

Alínea b)

Resultante **R** $\Rightarrow$ **R** = **F1** + **F2** + **F3** + **F4**

$$\begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R \cos 18,435^\circ = F_1 \cos 63,435^\circ + F_2 \cos 45^\circ - F_3 \cos 75,964^\circ - F_4 \\ R \sin 18,435^\circ = F_1 \sin 63,435^\circ - F_2 \sin 45^\circ - F_3 \sin 75,964^\circ \end{cases}$$

Considerando **R** = 30 kN, **F1** = 10 kN e **F2** = 15 kN:

$$\begin{cases} 30 \cos 18,435^\circ = 10 \cos 63,435^\circ + 15 \cos 45^\circ - F_3 \cos 75,964^\circ - F_4 \\ 30 \sin 18,435^\circ = 10 \sin 63,435^\circ - 15 \sin 45^\circ - F_3 \sin 75,964^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_3 = -11,492 \text{ kN} \\ F_4 = -10,595 \text{ kN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_3 = 11,492 \text{ kN} \nearrow \\ F_4 = 10,595 \text{ kN} \rightarrow \end{cases}$$

Nota: O sinal negativo das forças indica que elas terão sentido contrário ao considerado.

ESTÁTICA

FICHA 1 – REVISÕES

EXERCÍCIO 2

ISABEL ALVIM TELES

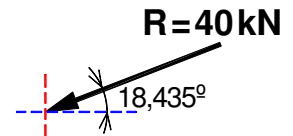
Alínea c)

Resultante $\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$

$$\begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} \end{cases}$$

Considerando $\mathbf{R}$ com a direcção indicada na figura e sentido contrário ao indicado na figura do enunciado, ou seja, com o sentido indicado na figura abaixo:

$$\begin{cases} -R \cos 18,435^\circ = F_1 \cos 63,435^\circ + F_2 \cos 45^\circ - F_3 \cos 75,964^\circ - F_4 \\ -R \sin 18,435^\circ = F_1 \sin 63,435^\circ - F_2 \sin 45^\circ - F_3 \sin 75,964^\circ \end{cases}$$



Considerando $\mathbf{F}_1 = 30 \text{ kN}$, $\mathbf{F}_4 = 65 \text{ kN}$ e $\mathbf{R} = 40 \text{ kN}$:

$$\begin{cases} -40 \cos 18,435^\circ = 30 \cos 63,435^\circ + F_2 \cos 45^\circ - F_3 \cos 75,964^\circ - 65 \\ -40 \sin 18,435^\circ = 30 \sin 63,435^\circ - F_2 \sin 45^\circ - F_3 \sin 75,964^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2 = 26,595 \text{ kN} \searrow \\ F_3 = 21,313 \text{ kN} \swarrow \end{cases}$$

Alínea d)

Condição de equilíbrio de um ponto material: $\bar{\mathbf{R}} = \sum \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{0}} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$

Resultante $\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 = \mathbf{0}$

$$\begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + F_{5x} = 0 \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + F_{5y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 \cos 63,435^\circ + F_2 \cos 45^\circ - F_3 \cos 75,964^\circ - F_4 + F_{5x} = 0 \\ F_1 \sin 63,435^\circ - F_2 \sin 45^\circ - F_3 \sin 75,964^\circ + F_{5y} = 0 \end{cases}$$

Considerando $\mathbf{F}_1 = 40 \text{ kN}$, $\mathbf{F}_2 = 50 \text{ kN}$, $\mathbf{F}_3 = 20 \text{ kN}$ e $\mathbf{F}_4 = 10 \text{ kN}$:

$$\begin{cases} 40 \cos 63,435^\circ + 50 \cos 45^\circ - 20 \cos 75,964^\circ - 10 + F_{5x} = 0 \\ 40 \sin 63,435^\circ - 50 \sin 45^\circ - 20 \sin 75,964^\circ + F_{5y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{5x} = -38,375 \text{ kN} \leftarrow \\ F_{5y} = 18,981 \text{ kN} \uparrow \end{cases}$$

$$F_5 = \sqrt{F_{5x}^2 + F_{5y}^2} = \sqrt{(-38,375)^2 + 18,981^2} = 42,81 \text{ kN}$$

$$\text{Ângulo com a horizontal} = \arctg \frac{F_{5y}}{F_{5x}} = \arctg \frac{18,981}{38,375} = 26,32^\circ$$

