

## LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

# TEORIA DE ESTRUTURAS

## FICHAS DE EXERCÍCIOS

**FICHA 1** - REVISÕES

### TEOREMA DOS TRABALHOS VIRTUAIS

**FICHA 2** - ESTRUTURAS ARTICULADAS ISOSTÁTICAS

**FICHA 3** - ESTRUTURAS CONTÍNUAS ISOSTÁTICAS

**FICHA 4** - ESTRUTURAS MISTAS ISOSTÁTICAS

**FICHA 5** - ESTRUTURAS ARTICULADAS HIPERESTÁTICAS

**FICHA 6** - ESTRUTURAS CONTÍNUAS HIPERESTÁTICAS

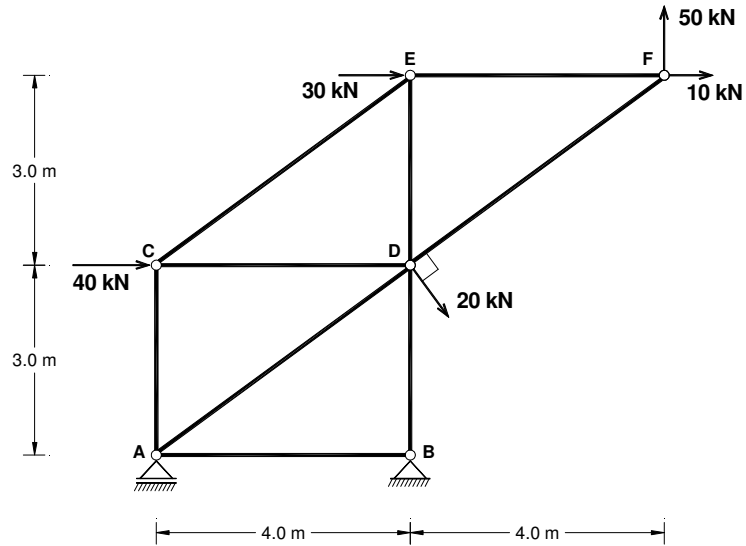
**FICHA 7** - ESTRUTURAS MISTAS HIPERSTÁTICAS

### MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

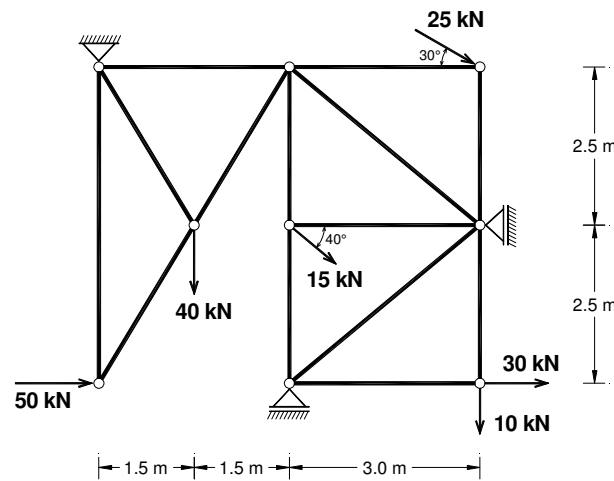
**FICHA 8** - ESTRUTURAS ARTICULADAS PLANAS

**FICHA 9** - ESTRUTURAS CONTÍNUAS

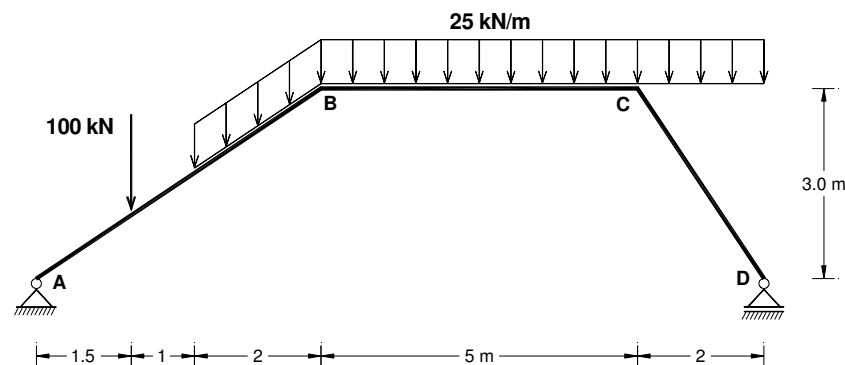
- 1- Calcule as reacções e os esforços nas barras da estrutura representada na figura.



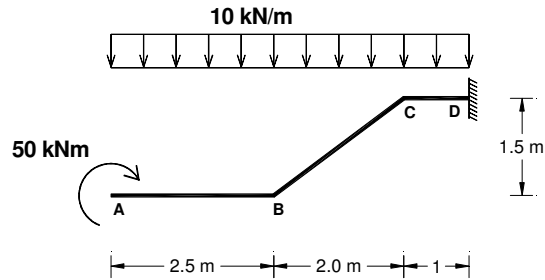
- 2- Calcule as reacções e os esforços nas barras da estrutura representada na figura.



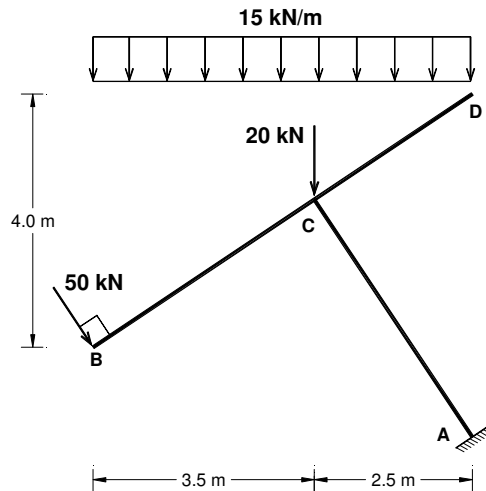
- 3- Calcule as reacções da estrutura representada na figura.  
 Trace os diagramas de esforços (esforço axial, esforço transverso e momento flector) caracterizando todos os pontos notáveis.



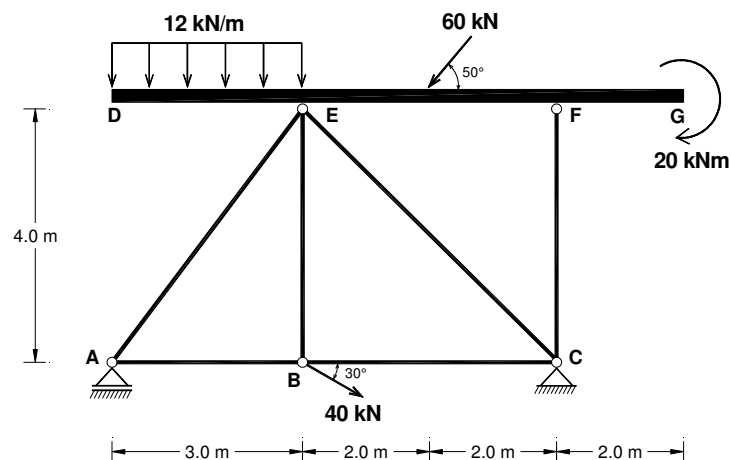
- 4- Calcule as reacções da estrutura representada na figura.  
Trace os diagramas de esforços (esforço axial, esforço transverso e momento flector) caracterizando todos os pontos notáveis.



- 5- Calcule as reacções da estrutura representada na figura.  
Trace os diagramas de esforços (esforço axial, esforço transverso e momento flector) caracterizando todos os pontos notáveis.

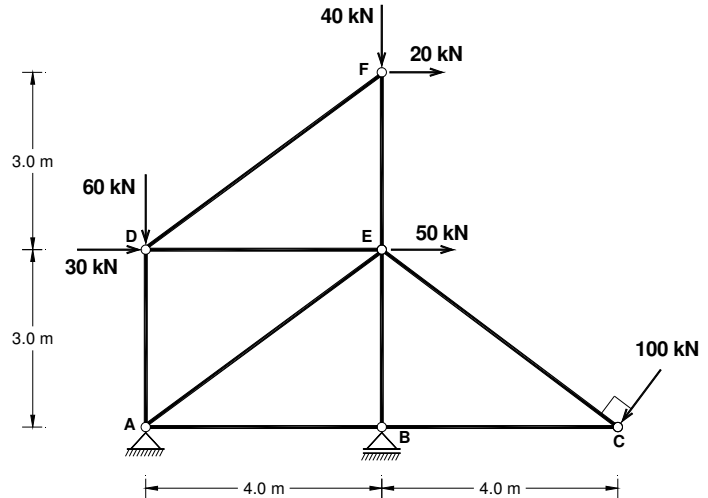


- 6- Calcule as reacções da estrutura representada na figura.  
Determine os esforços nas barras bi-articuladas.  
Trace os diagramas de esforços (esforço axial, esforço transverso e momento flector) da barra DEFG caracterizando todos os pontos notáveis.



1- Considere a estrutura articulada plana representada na figura. Todas as barras têm secção quadrada com 2cm de lado e o seu material constituinte é aço com  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $\alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$ .

- Determine o deslocamento do nó **B**;
- Determine o deslocamento do nó **C**;
- Determine a rotação da barra **AD**;
- Determine a rotação da barra **BE** relativamente à barra **EC** (variação do ângulo **BEC**);
- Determine a variação da distância entre o nó **A** e o nó **F**;
- Determine a variação da distância entre o nó **D** e o nó **C**;
- Determine a variação da distância entre o nó **D** e a barra **AE**.



2- Considere a estrutura articulada plana representada na figura.

Todas as barras são em aço com  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $\alpha = 1,2 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ .

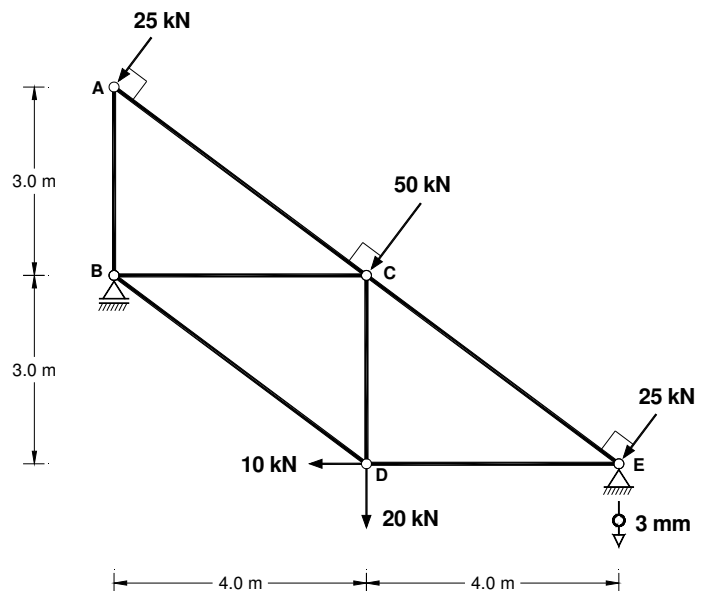
As barras **AB**, **AC** e **CE** são constituídas por um perfil T90. As restantes barras são constituídas por duas cantoneiras L90x7 soldadas.

Para além do assentamento vertical de 3 mm do apoio da direita e das forças nos nós indicadas, a estrutura está ainda submetida aos seguintes incrementos de temperatura:

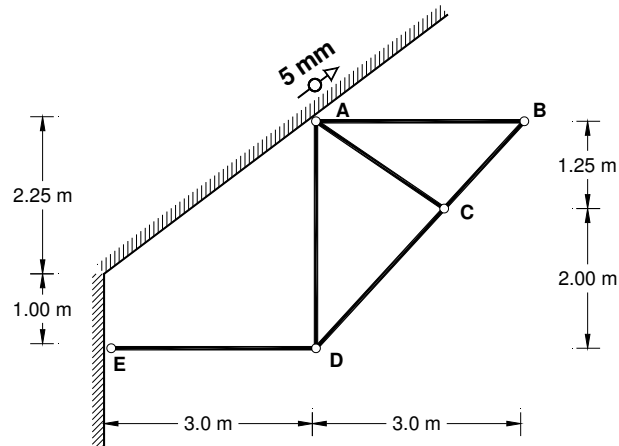
Barras **AB**, **AC** e **CE**:  $\Delta T = +30^\circ\text{C}$   
Restantes barras:  $\Delta T = +10^\circ\text{C}$



Perfil T90 área = $17,1 \text{ cm}^2$	
Cantoneiras L90x7 área = $2 \times 12,2 \text{ cm}^2$	

- Determine o deslocamento do nó **B**;
- Determine o deslocamento do nó **D**;
- Determine a rotação da barra **AB**;
- Determine a rotação relativa das barras **BC** e **BD** (variação do ângulo **DBC**);
- Determine a variação da distância entre o nó **A** e o nó **D**;
- Determine a variação da distância entre o nó **C** e a barra **BD**.



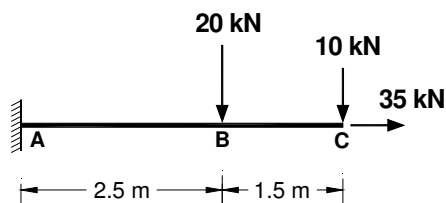
- 3- Uma estrutura articulada plana foi fixada à parede e tecto de uma câmara frigorífica.  
Devido a um erro, a fixação do nó **A** sofreu um desvio de 5 mm em relação ao pretendido (ver figura).  
Dentro da câmara frigorífica as barras ficam submetidas a uma variação de temperatura de  $-25\text{ }^{\circ}\text{C}$ .



<b>Aço constituinte das barras:</b>		$E = 210\text{ GPa}$	$\alpha = 1,5 \times 10^{-5} / ^{\circ}\text{C}$
<b>Barra ED</b>		<b>Restantes barras</b>	
Perfil circular: $\varnothing = 80\text{ mm}$		Perfil tubular: $\varnothing = 80\text{ mm}$ esp = 8 mm	

- Determine o deslocamento do nó **B**;
- Determine o deslocamento do nó **D**;
- Determine a força vertical a aplicar em **D** para que a barra **ED** fique horizontal.

1- Considere a viga representada na figura.



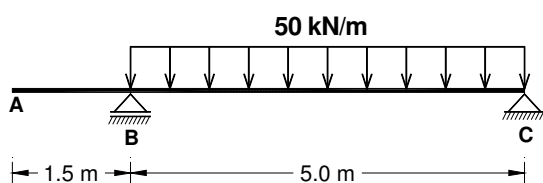
**Material**

Betão:  $E = 20 \text{ GPa}$ ;  $\nu = 0,2$ ;  $\alpha = 1,5 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

**Secção transversal:** 0,30 m x 0,30m

- Determine o deslocamento do ponto C;
- Determine a rotação no ponto C;
- Determine o deslocamento vertical do ponto B (despreze a contribuição do esforço transversor);
- Determine a rotação no ponto B (despreze a contribuição do esforço transversor);
- Considere que para além das cargas representadas na figura, a viga foi submetida a uma variação uniforme de temperatura de  $20^\circ\text{C}$ . Determine o deslocamento horizontal do ponto C;
- Considere que para além das cargas representadas na figura, a viga foi submetida a uma variação de temperatura de  $30^\circ\text{C}$  na face superior e de  $10^\circ\text{C}$  na face inferior. Determine o deslocamento vertical do ponto C.

2- Considere a viga representada na figura.



**Material**

Betão:  $E = 30 \text{ GPa}$ ;  $\alpha = 1,2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

**Secção transversal (b x h)**

0,30 m x 0,40m

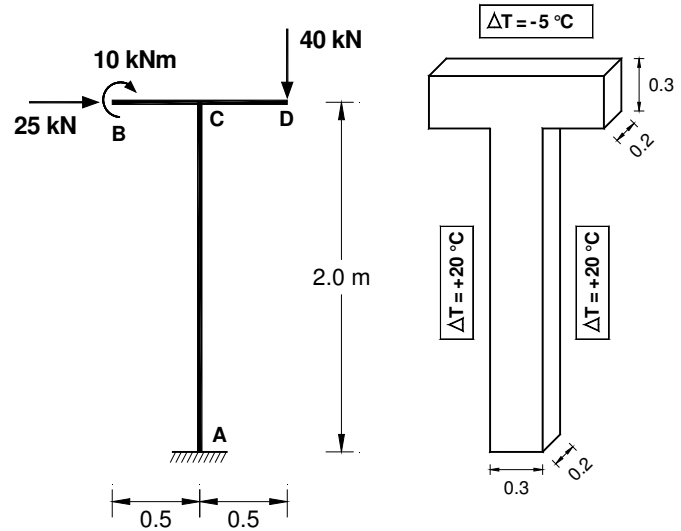
Responda às alíneas seguintes desprezando a contribuição do esforço transversor.

- Determine o deslocamento do ponto A;
- Determine a rotação no ponto A;
- Determine a rotação no ponto C;
- Determine a flecha a meio vão;
- Considere que para além das cargas representadas na figura, a viga foi submetida a uma variação de temperatura de  $-10^\circ\text{C}$  na face superior e de  $+40^\circ\text{C}$  na face inferior. Determine o deslocamento vertical do ponto A e a sua rotação;
- Considerando as acções da alínea anterior, determine a flecha a meio vão.

- 3- Considere a estrutura representada na figura constituída por um material com as seguintes características:

$$E = 25 \text{ GPa}; \nu = 0,2; \alpha = 1,4 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

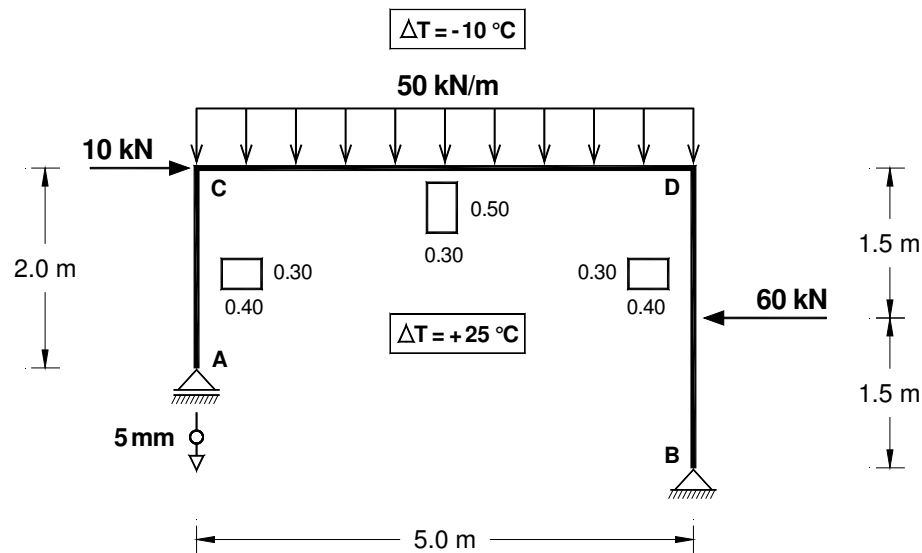
- Determine o deslocamento e rotação do ponto **B**;
- Determine o deslocamento e rotação do ponto **D**;
- Determine o deslocamento e rotação do ponto a meia altura do pilar **AC**;



- 4- Considere a estrutura de betão ( $E=30 \text{ GPa}$ ;  $\alpha=1,2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ ) constituída por dois pilares e uma viga com secções rectangulares conforme representado na figura.

Para além do carregamento, a estrutura está submetida à seguinte variação de temperatura:  $-10 \text{ }^\circ\text{C}$  no exterior e  $+25 \text{ }^\circ\text{C}$  no interior.

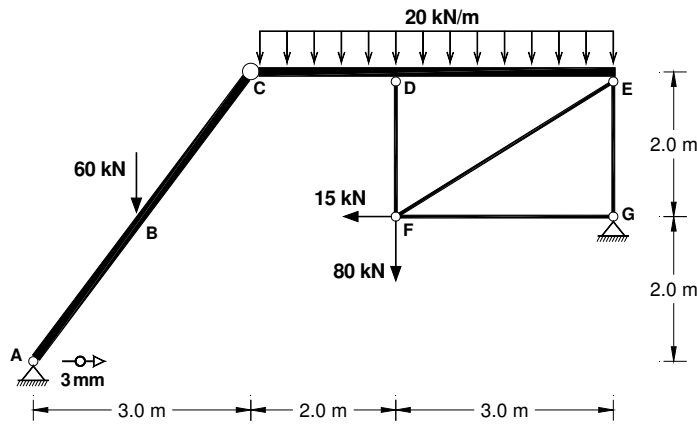
O apoio **A** sofreu um assentamento de 5 mm.



Responda às alíneas seguintes desprezando a contribuição do esforço transverso.

- Determine o deslocamento do apoio **A**;
- Determine a rotação no ponto **B**;
- Determine que força horizontal deverá ser aplicada em **D** para que o ponto **A** não sofra qualquer deslocamento horizontal.

1- Considere a estrutura representada na figura.



**Barras AC e CE**

Secção: 0,25m x 0,30m

Betão:  $E = 30 \text{ GPa}$

**Restantes barras**

Perfil tubular:  $\varnothing = 60 \text{ mm}$

esp = 5 mm

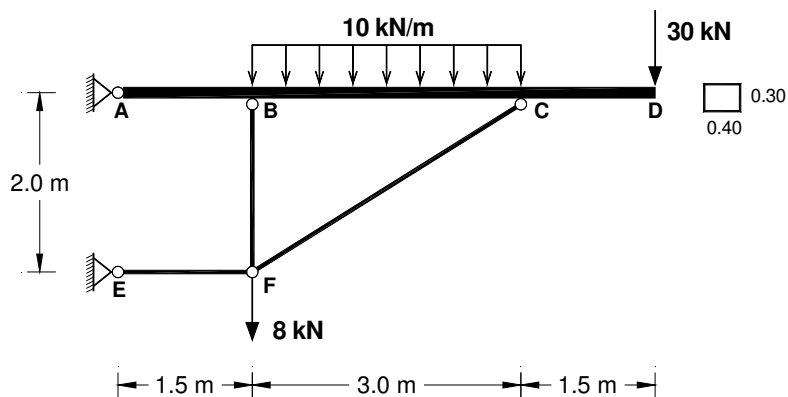
Aço:  $E = 200 \text{ GPa}$



Responda às alíneas seguintes desprezando a contribuição do esforço transversal.

- Determine a rotação relativa das secções à direita e à esquerda da rótula C;
- Determine o deslocamento relativo dos pontos A e E.

2- Considere a estrutura representada na figura.



**Barra AD**

Secção: ver desenho

Betão:  $E = 29 \text{ GPa}$

**Restantes barras**

Perfil tubular:

100 mm x 100 mm

esp = 5 mm

Aço:  $E = 206 \text{ GPa}$



Responda às alíneas seguintes desprezando a contribuição do esforço transversal.

- Determine o deslocamento do ponto D;
- Determine a rotação do ponto A;
- Determine a variação do ângulo formado pelas barras BF e FC.



1- Considere a estrutura articulada plana representada na figura.

Todas as barras são constituídas por perfis cuja secção transversal apresenta uma área de  $10 \text{ cm}^2$ .

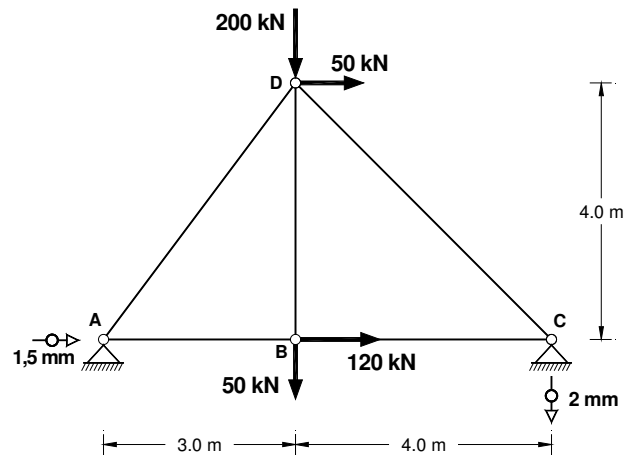
Para além dos deslocamentos dos apoios e das forças nos nós indicadas, a estrutura está ainda submetida a uma variação uniforme de temperatura de  $+15^\circ\text{C}$ .

Material constituinte das barras: Aço

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\alpha = 1,5 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

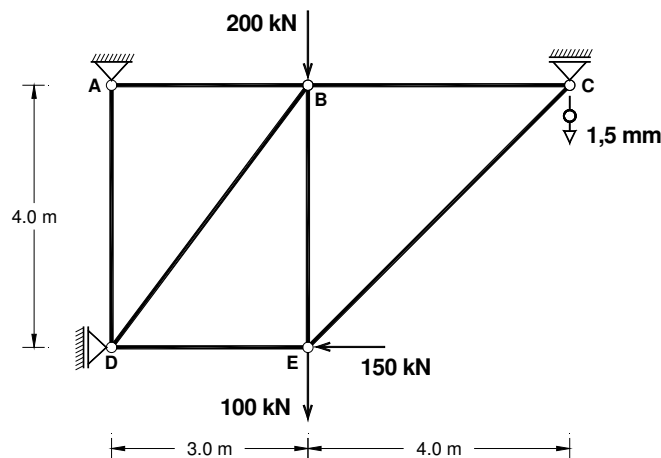
- a) Determine as reacções nos apoios;
- b) Determine os esforços instalados em todas as barras;
- c) Determine o deslocamento do nó B;
- d) Determine a rotação da barra AB;
- e) Determine a variação do ângulo ABD.



2- Considere a estrutura articulada plana representada na figura. Todas as barras têm secção quadrada com 4cm de lado e o seu material constituinte é aço com  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $\alpha = 1,5 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ .

Para além do assentamento vertical de 1,5mm do apoio C e das forças nos nós indicadas, a estrutura está ainda submetida a uma variação uniforme de temperatura de  $-10^\circ\text{C}$ .

- a) Determine as reacções nos apoios;
- b) Determine os esforços instalados em todas as barras;
- c) Determine o deslocamento do nó E;
- d) Determine o deslocamento do apoio C;
- e) Determine a rotação da barra AB.



3- Considere a estrutura articulada plana representada na figura.

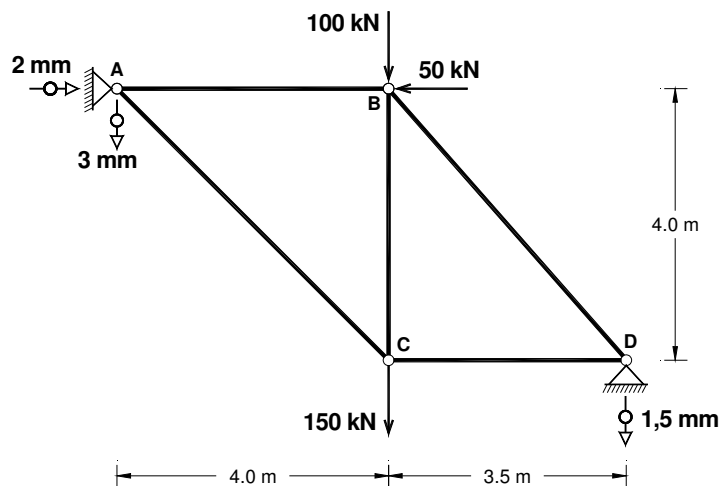
Para além dos assentamentos dos apoios e das forças aplicadas nos nós indicadas, a estrutura está ainda submetida a variações de temperatura conforme indicado na tabela anexa.

Material constituinte das barras: Aço

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\alpha = 1,2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

- Determine as reacções nos apoios;
- Determine os esforços instalados em todas as barras;
- Determine o deslocamento do nó **C**;
- Determine a força horizontal a aplicar em **C** para que este nó não sofra deslocamento horizontal;
- Determine a força perpendicular à barra **AC** a aplicar em **C** para que este nó não sofra deslocamento vertical;
- Determine a rotação da barra **CD**;
- Determine a variação do ângulo **CDB**.



BARRAS	ÁREA	VARIAÇÃO DE TEMPERATURA
AB BD	10 cm <sup>2</sup>	+20 °C
AC CD	8 cm <sup>2</sup>	-5 °C
BC	8 cm <sup>2</sup>	-

4- Considere a estrutura articulada plana representada na figura.

Todas as barras são constituídas por perfis cuja secção transversal apresenta uma área de  $8 \text{ cm}^2$ .

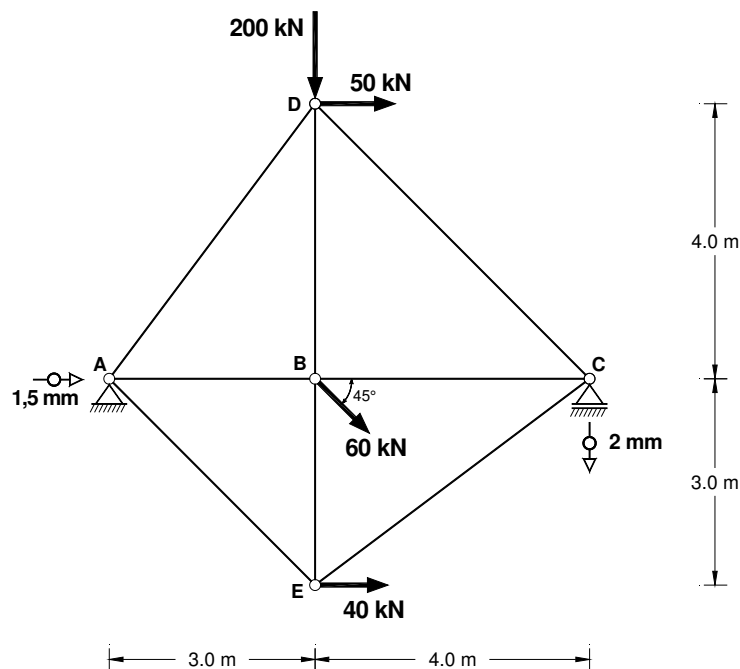
Para além dos deslocamentos dos apoios e das forças nos nós indicadas, a estrutura está ainda submetida a uma variação uniforme de temperatura de  $+15 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Material constituinte das barras: Aço

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\alpha = 1,2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

- a) Determine os esforços instalados em todas as barras;
- a) Determine os esforços instalados em todas as barras o deslocamento do nó **D**;
- b) Determine o deslocamento do nó **D**;
- c) Determine a posição do apoio **C** após deformação;
- d) Determine a rotação da barra **AB**;
- e) Determine a variação do ângulo **EBC**;
- f) Determine a força horizontal a aplicar em **C** para que o nó **D** não sofra deslocamento vertical.



5- Considere a estrutura articulada plana representada na figura.

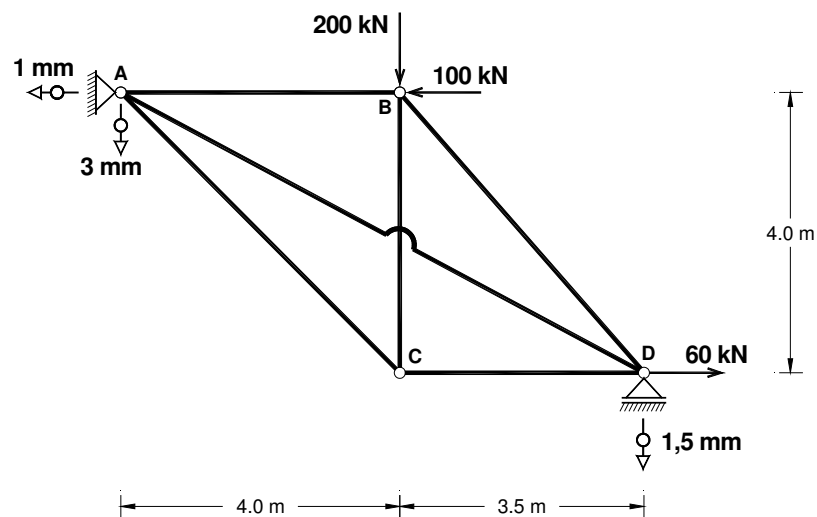
Para além dos assentamentos dos apoios e das forças aplicadas nos nós indicadas, a estrutura está ainda submetida a variações de temperatura conforme indicado na tabela anexa.

Material constituinte das barras: Aço

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\alpha = 1,5 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

- Determine os esforços instalados em todas as barras;
- Determine a força vertical a aplicar em **C** para que a barra **BD** fique descarregada;
- Determine o deslocamento do nó **B**;
- Determine a força horizontal ( $F_h$ ) e a força vertical ( $F_v$ ) a aplicar simultaneamente em **C** para anular o deslocamento do nó **B**;
- Determine o deslocamento do nó **C**;
- Determine a rotação da barra **CD**;
- Determine a variação do ângulo **BAC**.



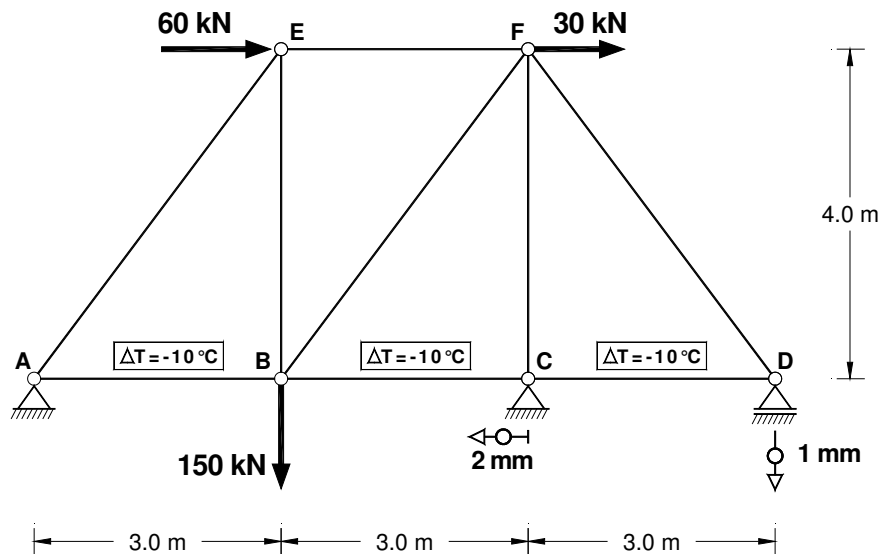
BARRAS	ÁREA	VARIAÇÃO DE TEMPERATURA
AB BD	10 cm <sup>2</sup>	+ 20 °C
AC CD	8 cm <sup>2</sup>	- 5 °C
BC AD	8 cm <sup>2</sup>	-

6- Considere a estrutura articulada plana representada na figura.

Todas as barras apresentam uma relação  $L/(EA)$  de  $2 \times 10^{-5} \text{ m/kN}$  e são constituídas por um material que tem um coeficiente de dilatação térmica  $\alpha = 1 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ .

Para além dos deslocamentos dos apoios e das forças nos nós indicadas, as barras **AB**, **BC** e **CD** da estrutura estão submetidas a uma variação uniforme de temperatura de  $-10^\circ\text{C}$ .

- Determine as reacções nos apoios e os esforços instalados em todas as barras;
- Determine o deslocamento vertical do nó E;
- Determine a posição do apoio D após deformação;
- Determine a rotação da barra AB;
- Determine a rotação da barra CF.



7- Considere a estrutura articulada plana representada na figura.

Todas as barras são constituídas por perfis cuja secção transversal apresenta uma área de  $10 \text{ cm}^2$ .

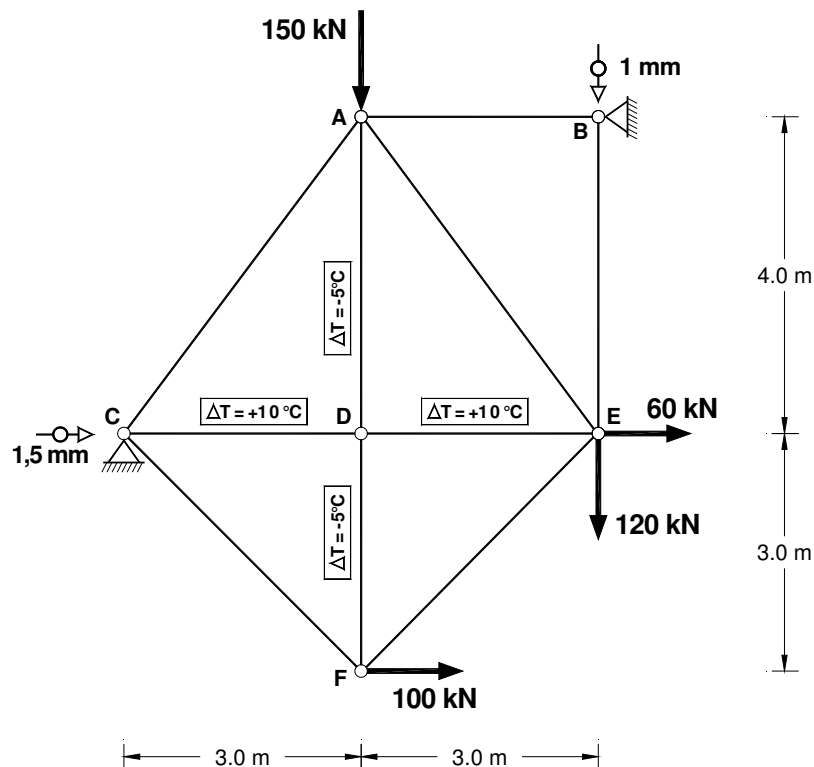
Para além dos deslocamentos dos apoios e das forças nos nós indicadas, algumas barras estão submetidas a variações uniformes de temperatura:

barras **AD** e **DF**:  $\Delta T = -5 \text{ }^\circ\text{C}$

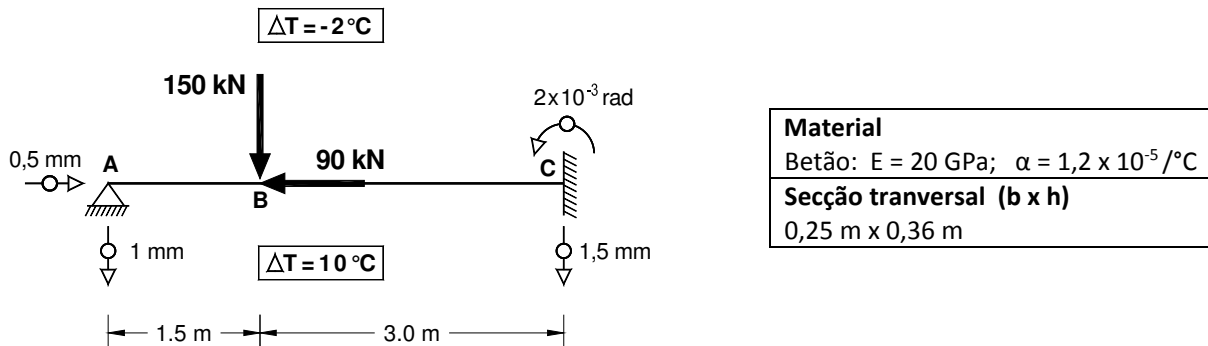
barras **CD** e **DE**:  $\Delta T = +10 \text{ }^\circ\text{C}$

Características do material constituinte das barras:  $E = 200 \text{ GPa}$   
 $\alpha = 1,5 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

- a) Determine as reacções nos apoios e os esforços instalados em todas as barras;
- b) Determine o deslocamento do nó E;
- c) Determine a rotação da barra **BE**;
- d) Determine qual deveria ser o assentamento vertical do apoio **C** para que a barra **AB** se mantivesse horizontal após deformação;



1- Considere a viga representada na figura.



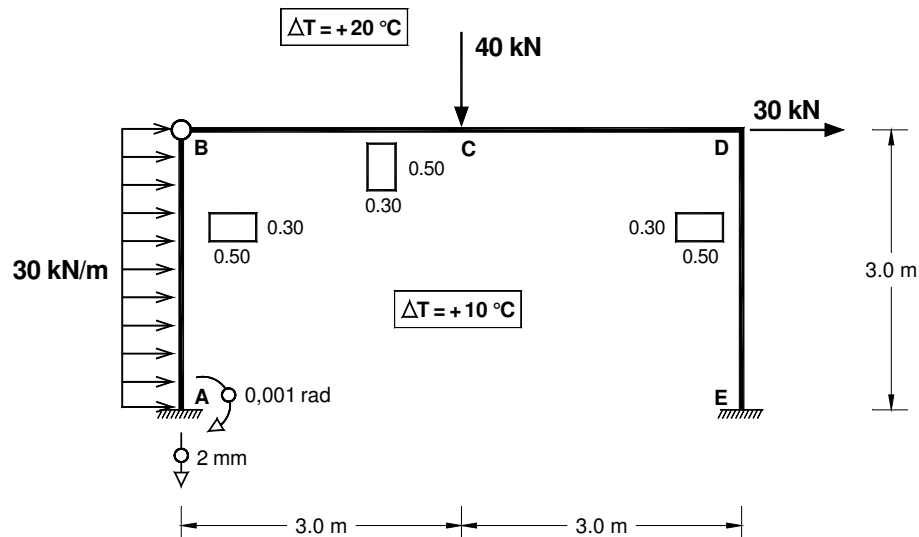
Responda às alíneas seguintes desprezando a contribuição do esforço transverso.

- a) Determine as reacções nos apoios e trace os diagramas de esforços da viga;
- b) Determine o deslocamento vertical da secção B;
- c) Determine a rotação da viga no apoio A.

2- Considere a estrutura de betão ( $E=29 \text{ GPa}$ ;  $\alpha=10^{-5} / ^\circ\text{C}$ ) constituída por dois pilares e uma viga com secções rectangulares conforme representado na figura.

Para além do carregamento, a estrutura está submetida à seguinte variação de temperatura:  $+20 \text{ }^\circ\text{C}$  no exterior e  $+10 \text{ }^\circ\text{C}$  no interior.

O apoio A sofreu um assentamento de 2 mm e uma rotação de 0,001 rad conforme indicado na figura.

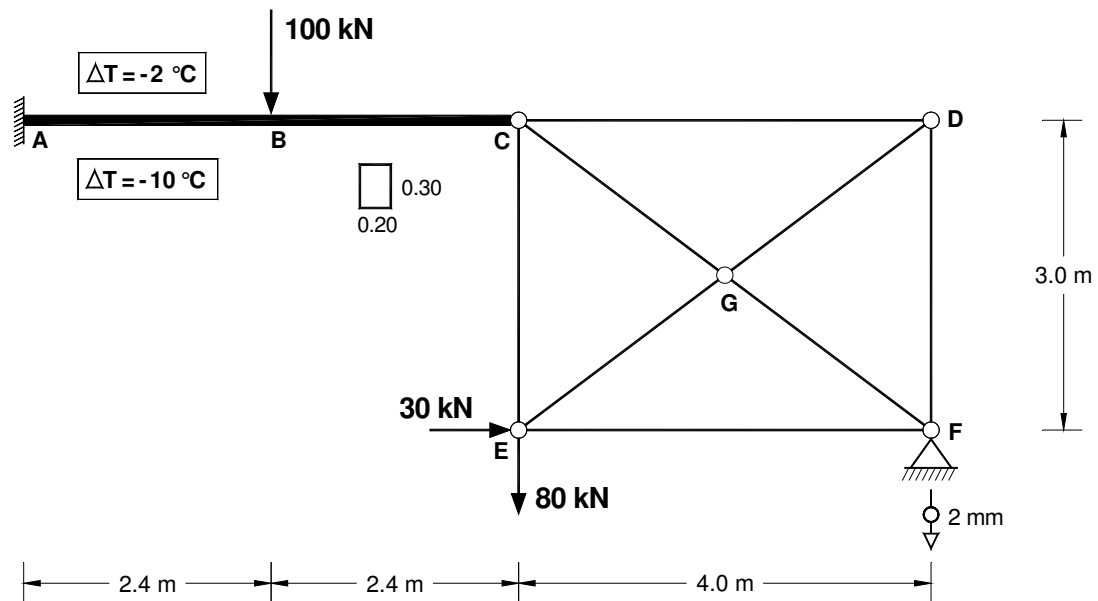


Responda às alíneas seguintes desprezando a contribuição do esforço transverso.

- a) Determine as reacções e trace os diagramas de esforços da estrutura;
- b) Determine o deslocamento horizontal da secção D.

1- Considere a estrutura representada na figura.

As barras **AB** e **BC** estão submetidas às variações de temperatura indicadas na figura.



**Barras AB e BC**

Secção (bxh) = 0,20m x 0,30m  
 Betão:  $E = 30 \text{ GPa}$ ;  $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

**Restantes barras**

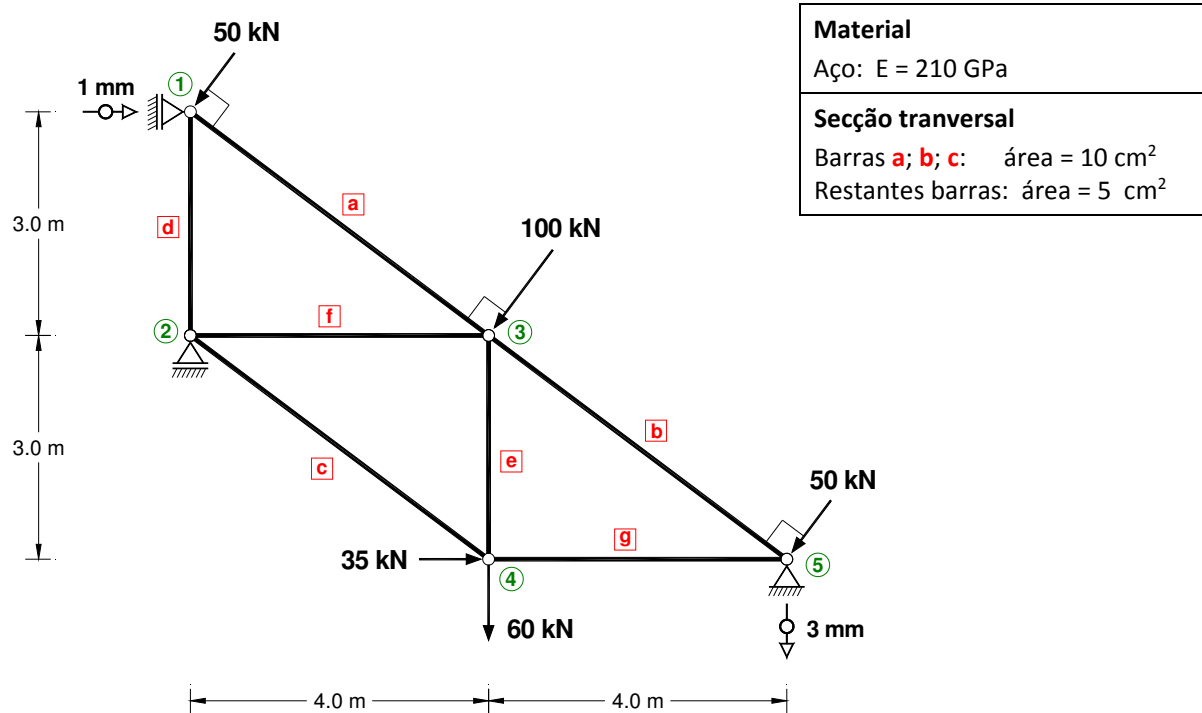
Área =  $10 \text{ cm}^2$   
 Aço:  $E = 210 \text{ GPa}$

Responda às alíneas seguintes desprezando a contribuição do esforço transverso.

- Determine as reacções e trace os diagramas de esforços da estrutura;
- Determine o deslocamento do ponto **B**.



1- Considere a estrutura representada na figura.



Responda às alíneas aplicando o Método dos Deslocamentos.

- a) Determine os deslocamentos dos nós da estrutura;
- b) Determine as reacções nos apoios;
- c) Determine os esforços nas barras.

2- Considere uma estrutura articulada, constituída por 6 barras e 4 nós.

Informação adicional:  $EA = 3 \times 10^5 \text{ kN}$

$$\text{Barra 1: } \left[ K_{\text{Local}}^1 \right] = \begin{bmatrix} 75000 & 0 & -75000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75000 & 0 & 75000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T^1 = -T^3$$

$$\text{Barra 2: } \left[ K_{\text{Local}}^2 \right] = \left[ K_{\text{Global}}^2 \right] = \left[ K_{\text{Local}}^1 \right]$$

Barra 3:  $\alpha = 90^\circ$ ;  $L_3 = 3 \text{ m}$

Contribuição de cada uma das barras na matriz de rigidez da estrutura:

$$[K_G]_{\text{ESTRUT}} = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & (1)+(4)+(5) & (1)+(4)+(5) & (1) & (1) & (5) & (5) & (4) & (4) \\ 2 & (1)+(4)+(5) & (1)+(4)+(5) & (1) & (1) & (5) & (5) & (4) & (4) \\ 3 & (1) & (1) & (1)+(2)+(6) & (1)+(2)+(6) & (2) & (2) & (6) & (6) \\ 4 & (1) & (1) & (1)+(2)+(6) & (1)+(2)+(6) & (2) & (2) & (6) & (6) \\ 5 & (5) & (5) & (2) & (2) & (2)+(5)+(3) & (2)+(5)+(3) & (3) & (3) \\ 6 & (5) & (5) & (2) & (2) & (2)+(5)+(3) & (2)+(5)+(3) & (3) & (3) \\ 7 & (4) & (4) & (6) & (6) & (3) & (3) & (3)+(4)+(6) & (3)+(4)+(6) \\ 8 & (4) & (4) & (6) & (6) & (3) & (3) & (3)+(4)+(6) & (3)+(4)+(6) \end{bmatrix}$$

- a) Desenhe e cote a estrutura;
- b) Sabendo que se podem individualizar as partições da matriz de rigidez da forma abaixo indicada, represente os apoios da estrutura;

$$[K_G]_{\text{ESTRUT}} = \begin{bmatrix} & 1 & 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & & \\ 6 & & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & \\ 5 & & & & & & & & \\ 7 & & & & & & & & \\ 8 & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$K_{LL}$        $K_{LF}$

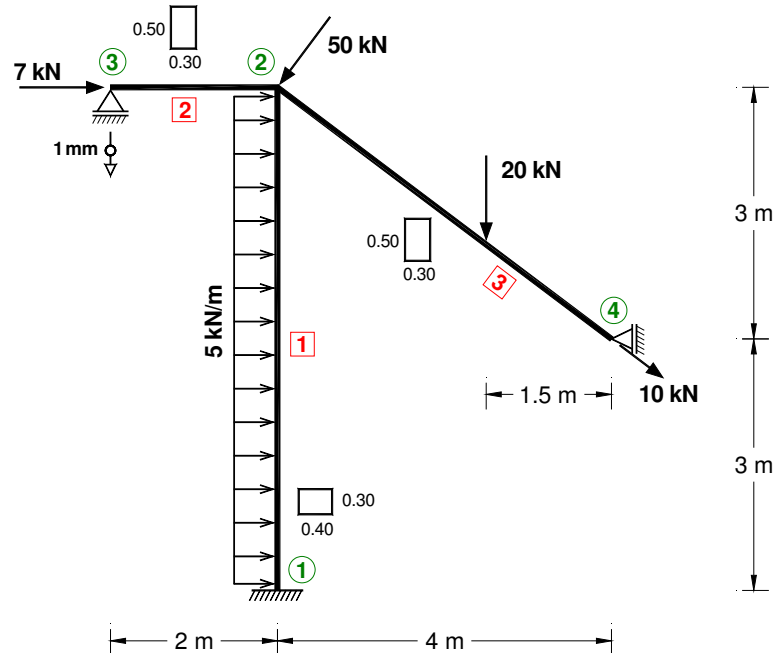
$K_{FL}$        $K_{FF}$

- c) Considere um assentamento de apoio de 1mm na direcção do grau de liberdade  $\Delta_5$  e as seguintes forças concentradas: Direcção do grau de liberdade  $\Delta_1$ :  $F = 50 \text{ kN}$   
Direcção do grau de liberdade  $\Delta_4$ :  $F = -150 \text{ kN}$

Determine os deslocamentos dos nós da estrutura;

- d) Determine as reacções no apoio duplo, usando apenas o número necessário de equações.

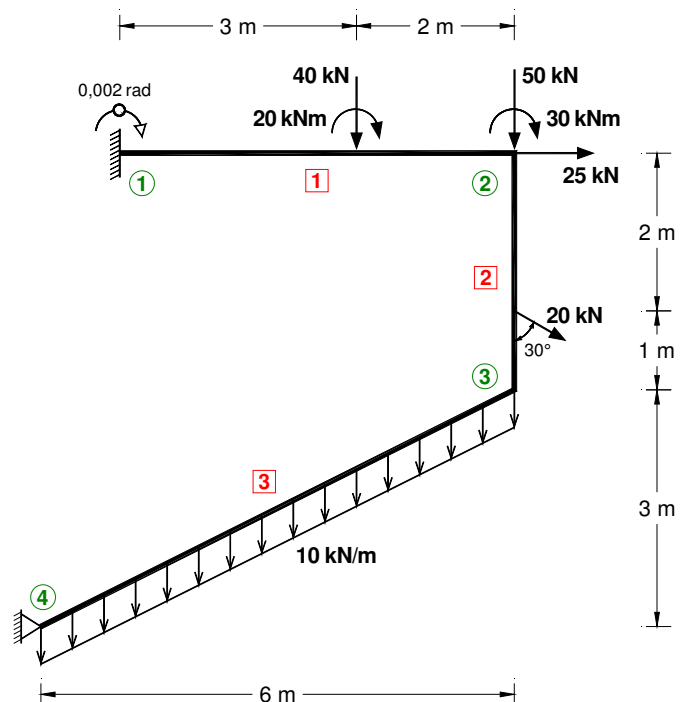
- 1- Considere a estrutura representada na figura, realizada em betão com  $E = 30 \text{ GPa}$  e com as secções aí indicadas.



Responda às alíneas aplicando o Método dos Deslocamentos.

- Determine os deslocamentos dos nós da estrutura;
- Determine as reacções nos apoios;
- Trace os diagramas de esforços da estrutura.

- 2- Considere a estrutura representada na figura, realizada em betão com  $E = 25 \text{ GPa}$  e em que todas as barras têm secção  $0,30\text{m} \times 0,40\text{m}$ .



Responda às alíneas aplicando o Método dos Deslocamentos.

- Determine os deslocamentos dos nós da estrutura;
- Determine as reacções nos apoios;
- Trace os diagramas de esforços da estrutura.