

LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

ESTÁTICA

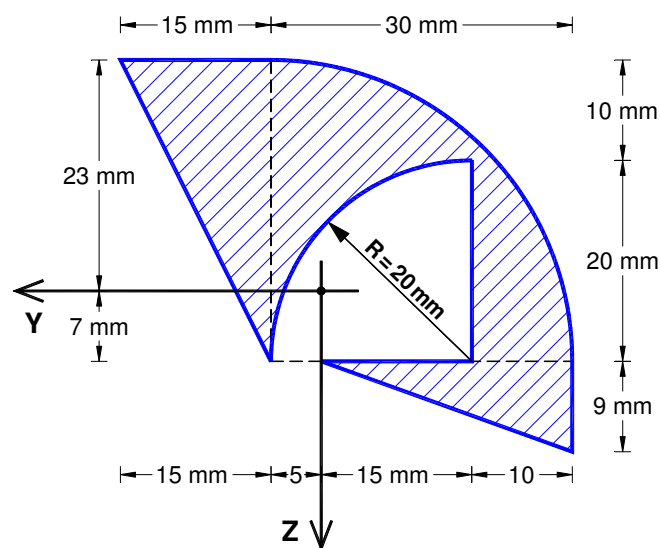


Figura 4

GEOMETRIA DE MASSAS

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO REFERENTE À FIGURA 4

Ficha 11

Ficha 12

Ficha 13

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO PROPOSTO

FOLHA 11

- 1- Para a secção transversal representada, calcule as coordenadas do centro de gravidade referidas ao respectivo sistema de eixos.

Represente o centro de gravidade na figura.

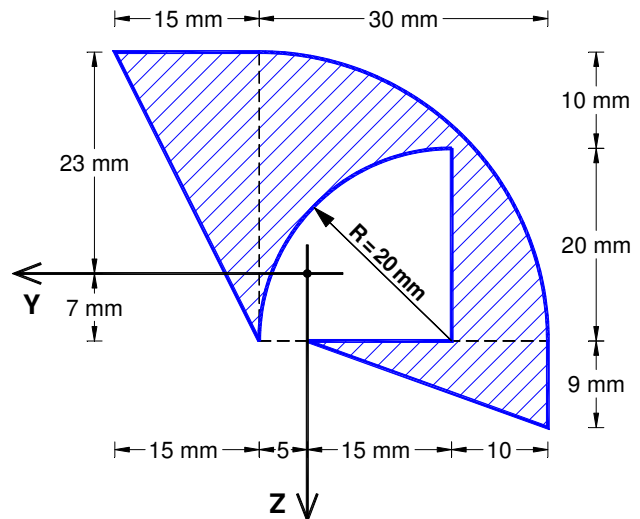


Figura 4 (Fichas 11, 12 e 13)

FOLHA 12

- 1- Considere a secção transversal representada.

- Calcule os momentos de inércia em relação a cada um dos eixos representados.
- Calcule os momentos de inércia em relação a cada um dos eixos baricêntricos paralelos aos eixos representados.
- Calcule o momento de inércia em relação ao eixo perpendicular ao plano da figura e que passa pela origem do sistema de eixos representado (momento de inércia polar I_o).
- Calcule o momento de inércia em relação ao eixo perpendicular ao plano da figura e com origem no centro de gravidade (momento de inércia polar I_{CG}).
- Calcule o raio de giração em relação a cada um dos eixos representados.
- Calcule o raio de giração em relação a cada um dos eixos baricêntricos paralelos aos eixos representados.
- Calcule o produto de inércia em relação aos eixos representados.
- Calcule o produto de inércia em relação aos eixos baricêntricos paralelos aos eixos representados.
- Calcule os momentos de inércia e o produto de inércia em relação a um sistema de eixos com a mesma origem do representado mas rodado de 30° no sentido horário.
- Calcule os momentos de inércia e o produto de inércia em relação a um sistema de eixos com origem no **CG** e rodado de 25° no sentido anti-horário.

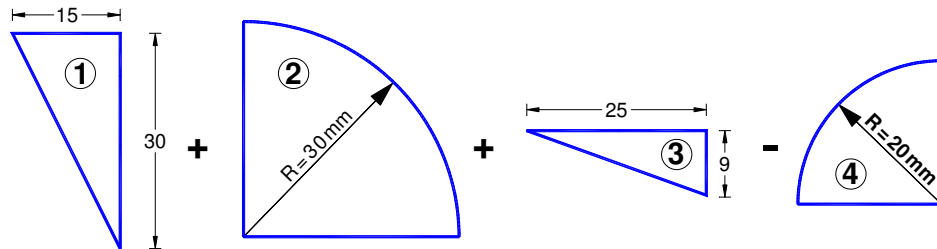
FOLHA 13

- 1- Considere a secção transversal representada.

- Calcule os Eixos Principais de Inércia (EPI) e os Momentos Principais de Inércia (MPI). Represente os Eixos Principais de Inércia na figura.
- Calcule os Eixos Principais Centrais de Inércia (EPCI) e os Momentos Principais Centrais de Inércia (MPCI). Represente os Eixos Principais Centrais de Inércia na figura.

RESOLUÇÃO

FOLHA 11



$$\text{Secção 1: } \begin{cases} A_1 = \frac{15 \times 30}{2} = 225 \text{ mm}^2 \\ Y_{G_1} = 5 + \frac{15}{3} = 10 \text{ mm} \\ Z_{G_1} = -23 + \frac{30}{3} = -13 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\text{Secção 2: } \begin{cases} A_2 = \frac{\pi \times 30^2}{4} = 225 \pi \text{ mm}^2 \\ Y_{G_2} = -\frac{4 \times 30}{3 \pi} + 5 = -\frac{40}{\pi} + 5 \text{ mm} \\ Z_{G_2} = -\frac{4 \times 30}{3 \pi} + 7 = -\frac{40}{\pi} + 7 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\text{Secção 3: } \begin{cases} A_3 = \frac{15 \times 9}{2} = 112,5 \text{ mm}^2 \\ Y_{G_3} = -\frac{2}{3} \times 25 = -\frac{50}{3} \text{ mm} \\ Z_{G_3} = 7 + \frac{9}{3} = 10 \text{ mm} \end{cases}$$

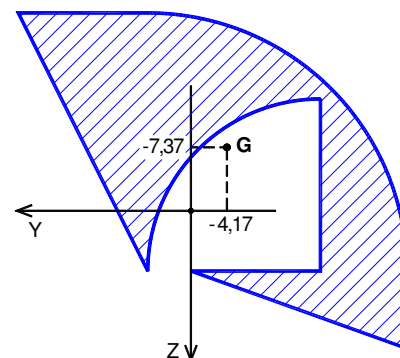
$$\text{Secção 4: } \begin{cases} A_4 = \frac{\pi \times 20^2}{4} = 100 \pi \text{ mm}^2 \\ Y_{G_4} = -\left(15 - \frac{4 \times 20}{3 \pi}\right) = -15 + \frac{80}{3 \pi} \text{ mm} \\ Z_{G_4} = 7 - \frac{4 \times 20}{3 \pi} = 7 - \frac{80}{3 \pi} \text{ mm} \end{cases}$$

Secção	A_i (mm ²)	Y_{G_i} (mm)	Z_{G_i} (mm)	$A_i \cdot Y_{G_i}$	$A_i \cdot Z_{G_i}$
1	225	10	-13	2250	-2925
2	225π	$-\frac{40}{\pi} + 5$	$-\frac{40}{\pi} + 7$	$-9000 + 1125 \pi$	$-9000 + 1575 \pi$
3	112,5	$-\frac{50}{3}$	10	-1875	1125
- 4	-100π	$-15 + \frac{80}{3 \pi}$	$7 - \frac{80}{3 \pi}$	$1500 \pi - \frac{8000}{3}$	$-700 \pi + \frac{8000}{3}$
Σ	730,1991			-3044,98595	-5384,43976

Nota: Como a secção 4 é a subtrair, na tabela atribuiu-se o sinal negativo à respectiva área.

$$Y_G = \frac{\sum A_i \cdot Y_{G_i}}{\sum A_i} = \frac{-3044,98595}{730,1991} = -4,1701 \text{ mm}$$

$$Z_G = \frac{\sum A_i \cdot Z_{G_i}}{\sum A_i} = \frac{-5384,43976}{730,1991} = -7,3739 \text{ mm}$$



FOLHA 12

a) Momentos de inércia I_Y e I_Z

$$\text{Secção 1: } \begin{cases} I_Y^{\textcircled{1}} = \frac{bh^3}{36} + Z_{G_1}^2 \cdot A_1 = \frac{15 \times 30^3}{36} + (-13)^2 \times 225 = 49\,275 \text{ mm}^4 \\ I_Z^{\textcircled{1}} = \frac{bh^3}{36} + Y_{G_1}^2 \cdot A_1 = \frac{30 \times 15^3}{36} + 10^2 \times 225 = 25\,312,5 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

$$\text{Secção 2: } \begin{cases} I_Y^{\textcircled{2}} = R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + Z_{G_2}^2 \cdot A_2 = 30^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + \left(-\frac{40}{\pi} + 7 \right)^2 \times 225\pi = 67\,679,19 \text{ mm}^4 \\ I_Z^{\textcircled{2}} = R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + Y_{G_2}^2 \cdot A_2 = 30^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + \left(-\frac{40}{\pi} + 5 \right)^2 \times 225\pi = 86\,714,59 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

$$\text{Secção 3: } \begin{cases} I_Y^{\textcircled{3}} = \frac{bh^3}{36} + Z_{G_3}^2 \cdot A_3 = \frac{25 \times 9^3}{36} + 10^2 \times 112,5 = 11\,756,25 \text{ mm}^4 \\ I_Z^{\textcircled{3}} = \frac{bh^3}{36} + Y_{G_3}^2 \cdot A_3 = \frac{9 \times 25^3}{36} + \left(\frac{50}{3} \right)^2 \times 112,5 = 35\,156,25 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

$$\text{Secção 4: } \begin{cases} I_Y^{\textcircled{4}} = R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + Z_{G_4}^2 \cdot A_4 = 20^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + \left(7 - \frac{80}{3\pi} \right)^2 \times 100\pi = 9\,476,40 \text{ mm}^4 \\ I_Z^{\textcircled{4}} = R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + Y_{G_4}^2 \cdot A_4 = 20^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) + \left(-15 + \frac{80}{3\pi} \right)^2 \times 100\pi = 22\,101,76 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

$$I_Y = I_Y^{\textcircled{1}} + I_Y^{\textcircled{2}} + I_Y^{\textcircled{3}} - I_Y^{\textcircled{4}} = 119\,234,04 \text{ mm}^4$$

$$I_Z = I_Z^{\textcircled{1}} + I_Z^{\textcircled{2}} + I_Z^{\textcircled{3}} - I_Z^{\textcircled{4}} = 125\,081,58 \text{ mm}^4$$

b) Momentos de inércia I_{Y_G} e I_{Z_G}

$$I_Y = I_{Y_G} + d^2 A = I_{Y_G} + Z_G^2 A$$

$$119\,234,04 = I_{Y_G} + 7,3739^2 \times (125\pi + 337,5) \Rightarrow I_{Y_G} = 79\,529,9 \text{ mm}^4$$

$$I_Z = I_{Z_G} + d^2 A = I_{Z_G} + Y_G^2 A$$

$$125\,081,58 = I_{Z_G} + 4,1701^2 \times (125\pi + 337,5) \Rightarrow I_{Z_G} = 112\,383,6 \text{ mm}^4$$

c) Momento de inércia polar I_O

$$I_O = I_Y + I_Z = 119\,234,04 + 125\,081,58 = 244\,315,62 \text{ mm}^4$$

d) Momento de inércia polar I_{CG}

$$I_{CG} = I_{Y_G} + I_{Z_G} = 79\,529,9 + 112\,383,6 = 191\,913,5 \text{ mm}^4$$

Comprovação pelo Teorema da Transferência: $I_O = I_{CG} + D^2 A = I_{CG} + (Y_G^2 + Z_G^2) \cdot A$

$$244\,315,62 = I_{CG} + (4,1701^2 + 7,3739^2) \times (125\pi + 337,5)$$

$$I_{CG} = 191\,913,5 \text{ mm}^4 \quad \checkmark$$

e) Raios de giração i_Y e i_Z

$$i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{119\,234,04}{125\pi + 337,5}} = 12,78 \text{ mm}$$

$$i_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{A}} = \sqrt{\frac{125\,081,58}{125\pi + 337,5}} = 13,09 \text{ mm}$$

f) Raios de giração i_{Y_G} e i_{Z_G}

$$i_{Y_G} = \sqrt{\frac{I_{Y_G}}{A}} = \sqrt{\frac{79\,529,9}{730,20}} = 10,44 \text{ mm}$$

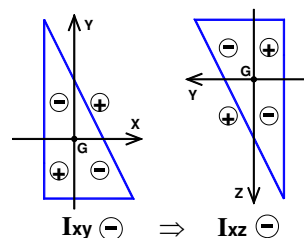
$$i_{Z_G} = \sqrt{\frac{I_{Z_G}}{A}} = \sqrt{\frac{112\,383,6}{730,20}} = 12,41 \text{ mm}$$

g) Produto de inércia I_{YZ}

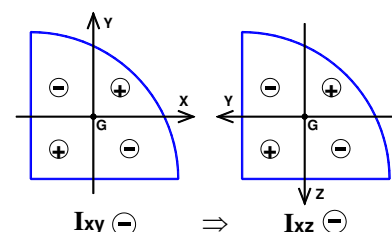
Teorema da transferência:

$$I_{YZ} = I_{Y_G Z_G} + a \cdot b \cdot A = I_{Y_G Z_G} + Y_G \cdot Z_G \cdot A$$

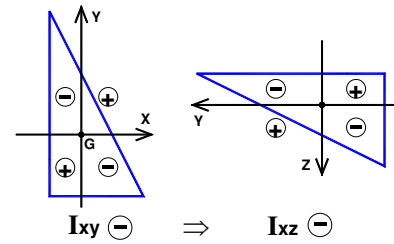
Secção 1: $I_{YZ}^{(1)} = I_{Y_{G_1} Z_{G_1}} + Y_{G_1} \cdot Z_{G_1} \cdot A_1 =$
 $= -\frac{15^2 \times 30^2}{72} + 10 \times (-13) \times 225 =$
 $= -32\,062,5 \text{ mm}^4$



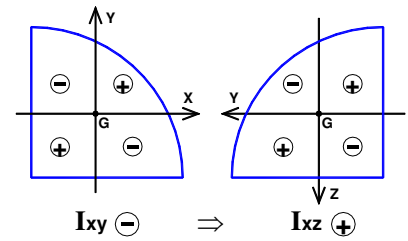
Secção 2: $I_{YZ}^{(2)} = I_{Y_{G_2} Z_{G_2}} + Y_{G_2} \cdot Z_{G_2} \cdot A_2 =$
 $= -30^4 \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8} \right) + \left(-\frac{40}{\pi} + 5 \right) \times \left(-\frac{40}{\pi} + 7 \right) \times 225\pi =$
 $= 17\,990,04 \text{ mm}^4$



Secção 3: $I_{YZ}^{(3)} = I_{Y_{G_3}Z_{G_3}}^{(3)} + Y_{G_3} \cdot Z_{G_3} \cdot A_3 =$
 $= -\frac{25^2 \times 9^2}{72} + \left(-\frac{50}{3}\right) \times 10 \times 112,5 =$
 $= -19\,453,125 \text{ mm}^4$



Secção 4: $I_{YZ}^{(4)} = I_{Y_{G_4}Z_{G_4}}^{(4)} + Y_{G_4} \cdot Z_{G_4} \cdot A_4 =$
 $= +20^4 \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8}\right) + \left(-15 + \frac{80}{3\pi}\right) \times \left(7 - \frac{80}{3\pi}\right) \times 100\pi =$
 $= 5\,679,94 \text{ mm}^4$



$$I_{YZ} = I_{YZ}^{(1)} + I_{YZ}^{(2)} + I_{YZ}^{(3)} - I_{YZ}^{(4)} = -39\,205,5 \text{ mm}^4$$

h) Produto de inércia $I_{Y_G Z_G}$

$$I_{YZ} = I_{Y_G Z_G} + a \cdot b \cdot A = I_{Y_G Z_G} + Y_G \cdot Z_G \cdot A$$

$$-39\,205,5 = I_{Y_G Z_G} + (-4,1701) \times (-7,3739) \times 730,20$$

$$I_{Y_G Z_G} = -61\,659,08 \text{ mm}^4$$

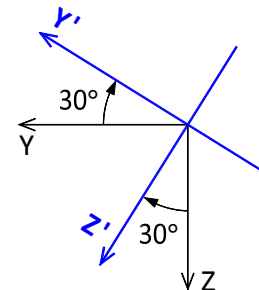
i) Momentos de inércia e o produto de inércia em relação a um sistema de eixos com a mesma origem do representado mas rodado de 30° no sentido horário

$$I_{Y'} = \frac{I_Y + I_Z}{2} + \frac{I_Y - I_Z}{2} \cos 2\alpha - I_{YZ} \sin 2\alpha$$

$$I_{Z'} = \frac{I_Y + I_Z}{2} - \frac{I_Y - I_Z}{2} \cos 2\alpha + I_{YZ} \sin 2\alpha$$

$$I_{Y'Z'} = \frac{I_Y - I_Z}{2} \sin 2\alpha + I_{YZ} \cos 2\alpha$$

$$\alpha = -30^\circ$$



$$I_{Y'} = \frac{119\,234,04 + 125\,081,58}{2} + \frac{119\,234,04 - 125\,081,58}{2} \cdot \cos(-60^\circ) - (-39\,205,5) \cdot \sin(-60^\circ)$$

$$I_{Y'} = 86\,743 \text{ mm}^4$$

$$I_{Z'} = \frac{119\,234,04 + 125\,081,58}{2} - \frac{119\,234,04 - 125\,081,58}{2} \cdot \cos(-60^\circ) + (-39\,205,5) \cdot \sin(-60^\circ)$$

$$I_{Z'} = 157\,573 \text{ mm}^4$$

$$I_{Y'Z'} = \frac{119\,234,04 - 125\,081,58}{2} \cdot \sin(-60^\circ) + (-39\,205,5) \cdot \cos(-60^\circ)$$

$$I_{Y'Z'} = -17\,071 \text{ mm}^4$$

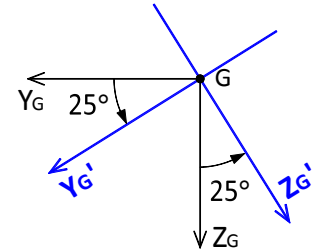
- j) Momentos de inércia e o produto de inércia em relação a um sistema de eixos com origem no **CG** e rodado de 25° no sentido anti-horário

$$I_{Y'G'} = \frac{I_{Y_G} + I_{Z_G}}{2} + \frac{I_{Y_G} - I_{Z_G}}{2} \cos 2\alpha - I_{Y_G Z_G} \sin 2\alpha$$

$$I_{Z'G'} = \frac{I_{Y_G} + I_{Z_G}}{2} - \frac{I_{Y_G} - I_{Z_G}}{2} \cos 2\alpha + I_{Y_G Z_G} \sin 2\alpha$$

$$I_{Y'G'Z'G'} = \frac{I_{Y_G} - I_{Z_G}}{2} \sin 2\alpha + I_{Y_G Z_G} \cos 2\alpha$$

$$\alpha = 25^\circ$$



$$I_{Y'_G} = \frac{79\,529,9 + 112\,383,6}{2} + \frac{79\,529,9 - 112\,383,6}{2} \cdot \cos 50^\circ - (-61\,659,08) \cdot \sin 50^\circ$$

$$I_{Y'_G} = 132\,631,4 \text{ mm}^4$$

$$I_{Z'_G} = \frac{79\,529,9 + 112\,383,6}{2} - \frac{79\,529,9 - 112\,383,6}{2} \cdot \cos 50^\circ + (-61\,659,08) \cdot \sin 50^\circ$$

$$I_{Z'_G} = 59\,282,1 \text{ mm}^4$$

$$I_{Y'_G Z'_G} = \frac{79\,529,9 - 112\,383,6}{2} \cdot \sin 50^\circ + (-61\,659,08) \cdot \cos 50^\circ$$

$$I_{Y'_G Z'_G} = -52\,217,4 \text{ mm}^4$$

FOLHA 13

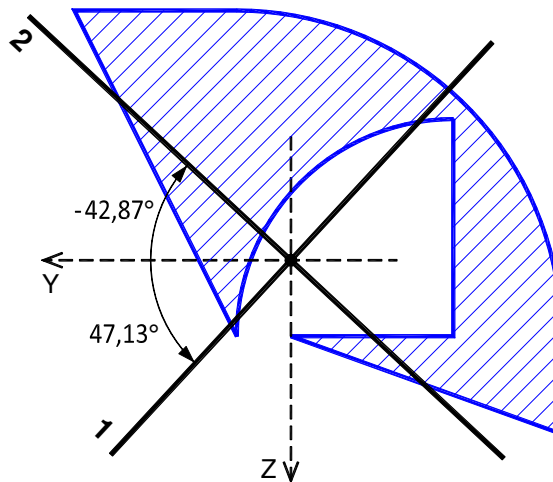
a) Eixos Principais de Inércia (EPI) e Momentos Principais de Inércia (MPI)

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 I_{YZ}}{I_Y - I_Z} \right) \pm 90^\circ$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 \times (-39205,5)}{119234,04 - 125081,58} \right) \pm 90^\circ = -42,87^\circ \pm 90^\circ$$

Como $I_Z > I_Y \Rightarrow$ eixo **1** mais próximo do eixo **Z**

$$\begin{cases} \alpha_{p1} = -42,87^\circ + 90 = 47,13^\circ \\ \alpha_{p2} = -42,87^\circ \end{cases}$$



$$\begin{cases} I_{\text{máx}} = I_1 = \frac{I_Y + I_Z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_Y - I_Z)^2 + 4 I_{YZ}^2} \\ I_{\text{mín}} = I_2 = \frac{I_Y + I_Z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_Y - I_Z)^2 + 4 I_{YZ}^2} \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{119234,04 + 125081,58}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(119234,04 - 125081,58)^2 + 4 (-39205,5)^2} = 161472 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{119234,04 + 125081,58}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(119234,04 - 125081,58)^2 + 4 (-39205,5)^2} = 82843 \text{ mm}^4$$

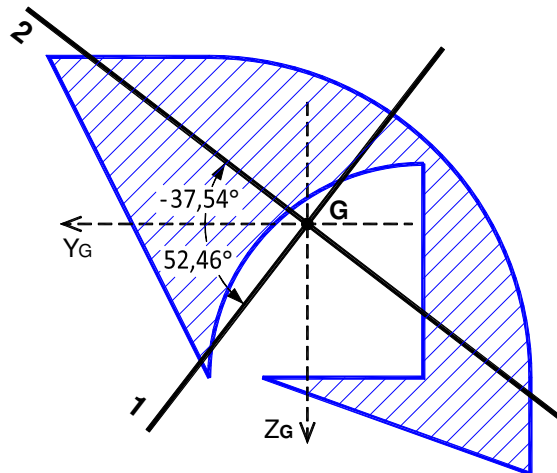
b) Eixos Principais Centrais de Inércia (EPCI) e Momentos Principais Centrais de Inércia (MPCI)

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(- \frac{2 I_{Y_G Z_G}}{I_{Y_G} - I_{Z_G}} \right) \pm 90^\circ$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(- \frac{2 \times (-61659,08)}{79529,9 - 112383,6} \right) \pm 90^\circ = -37,54^\circ \pm 90^\circ$$

Como $I_{Z_G} > I_{Y_G} \Rightarrow$ eixo **1** mais próximo do eixo Z_G

$$\begin{cases} \alpha_{p1} = -37,54^\circ + 90 = 52,46^\circ \\ \alpha_{p2} = -37,54^\circ \end{cases}$$



$$\begin{cases} I_{\text{máx}} = I_1 = \frac{I_Y + I_Z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_Y - I_Z)^2 + 4 I_{Y_Z}^2} \\ I_{\text{mín}} = I_2 = \frac{I_Y + I_Z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_Y - I_Z)^2 + 4 I_{Y_Z}^2} \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{79529,9 + 112383,6}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(79529,9 - 112383,6)^2 + 4 (-61659,08)^2} = 159766,5 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{79529,9 + 112383,6}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(79529,9 - 112383,6)^2 + 4 (-61659,08)^2} = 32147,0 \text{ mm}^4$$