

LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

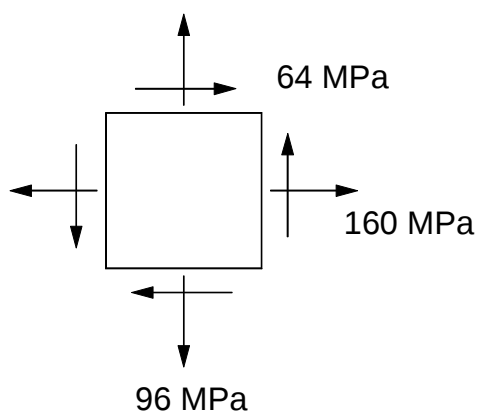
RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE

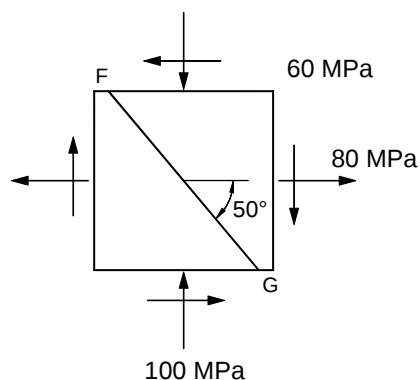
ESTADO PLANO DE TENSÃO

DOIS EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

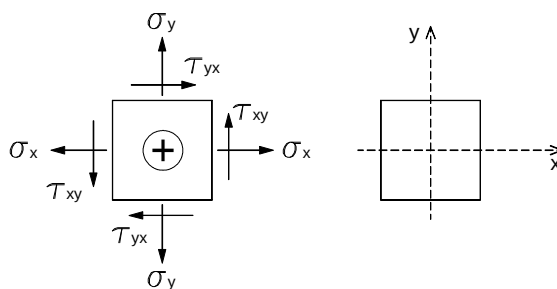
EXERCÍCIO 1



EXERCÍCIO 2



RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS CONSIDERANDO A SEGUINTE CONVENÇÃO:



ISABEL ALVIM TELES

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

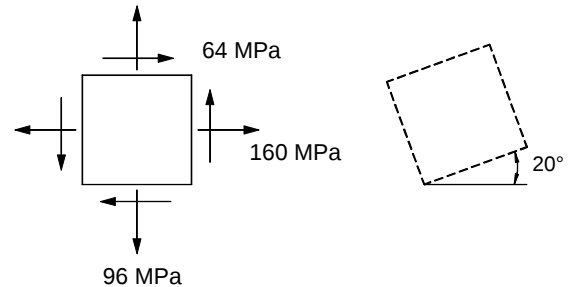
ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO 1

ENUNCIADO

Considere o estado plano de tensão indicado na figura.

- Determine as tensões principais e as respectivas orientações;
- Caracterize o estado de tensão correspondente à máxima tensão tangencial;
- Determine o estado de tensão para as facetas indicadas a tracejado.



RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 1

Alínea a)

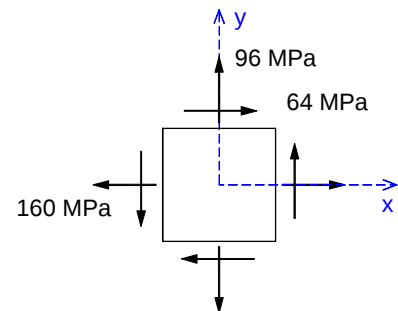
TENSOR DAS TENSÕES

$$\sigma_x = 160 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 96 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 64 \text{ MPa}$$

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 160 & 64 \\ 64 & 96 \end{bmatrix}$$



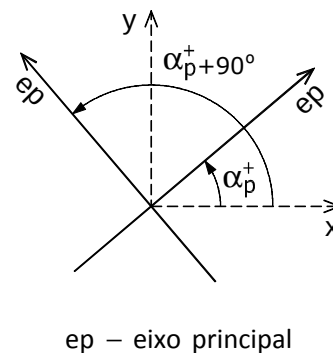
• FÓRMULAS

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}$$

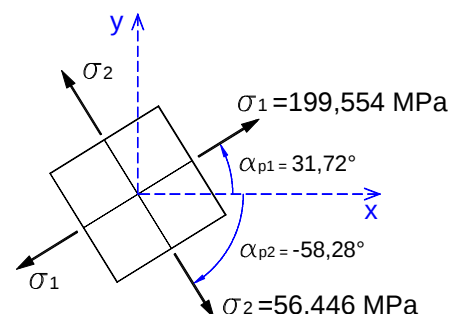
$$\sigma_{\min} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \pm 90^\circ$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$



$$\begin{cases} \sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{160+96}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(160-96)^2 + 4 \times 64^2} = 199,554 \text{ MPa} \\ \sigma_{\min} = \sigma_2 = \frac{160+96}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(160-96)^2 + 4 \times 64^2} = 56,446 \text{ MPa} \end{cases}$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2 \times 64}{160 - 96}\right) = \frac{1}{2} \arctg 2 = 31,717^\circ \pm 90^\circ$$

$$\sigma_x > \sigma_y \Rightarrow \sigma_1 \text{ mais perto do eixo } x \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{p1} = 31,717^\circ \\ \alpha_{p2} = \alpha_{p1} - 90^\circ = -58,283^\circ \end{cases}$$

Ou:

$$\sigma_{\alpha_p=31,717^\circ} = \frac{160+96}{2} + \frac{160-96}{2} \cos(2 \times 31,717^\circ) + 64 \sin(2 \times 31,717^\circ) = 199,554 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_1$$

$$\sigma_{\alpha_p=-58,283^\circ} = \frac{160+96}{2} + \frac{160-96}{2} \cos[2 \times (-58,283^\circ)] + 64 \sin[2 \times (-58,283^\circ)] = 56,446 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_2$$

• CÁLCULO MATRICIAL

Tensões principais $\Rightarrow \det |T - \sigma_p I| = 0$

$$\det \begin{vmatrix} 160 - \sigma_p & 64 \\ 64 & 96 - \sigma_p \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (160 - \sigma_p)(96 - \sigma_p) - 64^2 = 0$$

$$\sigma_p^2 - 256 \sigma_p + 11264 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_p = 199,554 \\ \sigma_p = 56,446 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 199,554 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 56,446 \text{ MPa} \end{cases}$$

Direcção principal correspondente a $\sigma_1 \Rightarrow [T - \sigma_1 I] \times \bar{n}_1 = \bar{0}$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 160 - 199,554 & 64 \\ 64 & 96 - 199,554 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{escolher uma só equação} \\ n_{1x}^2 + n_{1y}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -39,554 & 64 \\ 64 & -103,554 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{escolher uma só equação} \\ n_{1x}^2 + n_{1y}^2 = 1 \end{cases}$$

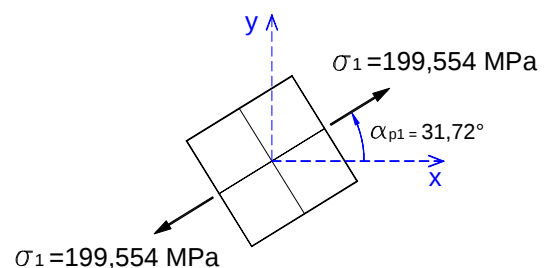
$$\begin{cases} -39,554 n_{1x} + 64 n_{1y} = 0 \\ n_{1x}^2 + n_{1y}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_{1x} = 0,851 \\ n_{1y} = 0,526 \end{cases}$$

$$\bar{n}_1 = (0,851; 0,526) \text{ ou } \bar{n}_1 = (-0,851; -0,526)$$

$$\alpha_{p1} = \arctg\left(\frac{0,526}{0,851}\right) = 31,72^\circ$$

α_{p1} - ângulo que o **eixo principal 1** faz com o eixo **X**

(rotação positiva na direcção de x^+ para y^+)



Direcção principal correspondente a $\sigma_2 \Rightarrow [T - \sigma_2 I] \times \bar{n}_2 = \bar{0}$ (resolução idêntica à anterior para σ_1)

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

Resolução alternativa 1: $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ e $\begin{cases} \bar{n}_1 = (0,851; 0,526) \\ \text{ou} \\ \bar{n}_1 = (-0,851; -0,526) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{n}_2 = (-0,526; 0,851) \\ \text{ou} \\ \bar{n}_2 = (0,526; -0,851) \end{cases}$

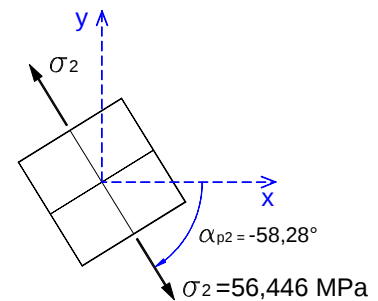
$\alpha_{p2} = \arctg\left(\frac{0,851}{-0,526}\right) = -58,28^\circ$ α_{p2} - ângulo que o **eixo principal 2** faz com o eixo **X**
(rotação negativa na direcção de x^+ para y^-)

Resolução alternativa 2: $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \Rightarrow \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} n_{1x} & n_{1y} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \end{bmatrix} = 0$

$\begin{cases} 0,851 \times n_{2x} + 0,526 \times n_{2y} = 0 \\ n_{2x}^2 + n_{2y}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_{2x} = -0,526 \\ n_{2y} = 0,851 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n_{2x} = 0,526 \\ n_{2y} = -0,851 \end{cases}$

$\alpha_{p2} = \arctg\left(\frac{0,851}{-0,526}\right) = -58,28^\circ$

α_{p2} - ângulo que o **eixo principal 2** faz com o eixo do **X**
(rotação negativa na direcção de x^+ para y^-)



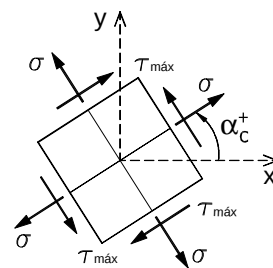
Alínea b)

• FÓRMULAS

$|\tau_{\max}| = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \text{ ou } |\tau_{\max}| = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$

$\alpha_c = \alpha_p \pm 45^\circ \Rightarrow \tau_{\alpha_c} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_c + \tau_{xy} \cos 2\alpha_c$

Quando $\tau_{\max} \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$



$|\tau_{\max}| = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{199,554 - 56,446}{2} = 71,554 \text{ MPa}$

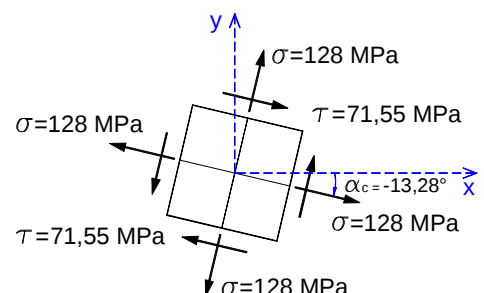
ou

$|\tau_{\max}| = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(160 - 96)^2 + 4 \times 64^2} = 71,554 \text{ MPa}$

$\alpha_c = \alpha_p \pm 45^\circ = 31,717^\circ \pm 45^\circ \Rightarrow \alpha_c = -13,28^\circ \text{ ou } \alpha_c = 76,72^\circ$

$\begin{cases} \alpha_c = -13,28^\circ \\ \tau_{\alpha_c} = -\frac{160 - 96}{2} \sin [2 \times (-13,28)] - 64 \cos [2 \times (-13,28)] = 71,55 \text{ MPa} \end{cases}$

Quando $\tau_{\max} \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{160 + 96}{2} = 128 \text{ MPa}$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

• CÁLCULO MATRICIAL

$$\alpha_{p1} = 31,72^\circ \Rightarrow \bar{n}_1 = (0,851; 0,526) \text{ ou } \bar{n}_1 = (-0,851; -0,526)$$

$$\alpha_{p2} = -58,22^\circ \Rightarrow \bar{n}_2 = (-0,526; 0,851) \text{ ou } \bar{n}_2 = (0,526; -0,851)$$

$$\text{Considerando } \alpha_c = 31,72^\circ - 45^\circ = -13,28^\circ$$

$$\bar{n}_{\perp \tau_{\max}} = (\cos \alpha_c; \sin \alpha_c) = (\cos(-13,28^\circ); \sin(-13,28^\circ)) = (0,973; -0,230)$$

$\bar{n}_{\perp \tau_{\max}}$ - vector normal à faceta onde ocorre a $\tau_{\max}$

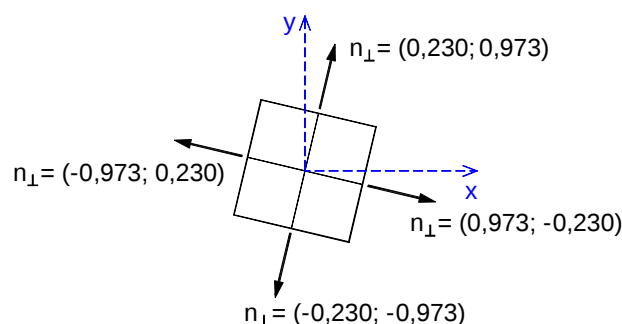
Outra forma de encontrar $\bar{n}_{\perp \tau_{\max}}$: O vector soma (ou o vector subtração) de $\bar{n}_1$ e $\bar{n}_2$ tem a direcção de $\bar{n}_{\perp \tau_{\max}}$, mas como não tem comprimento unitário, necessita de ser normalizado.

$$\bar{v}_{\perp \tau_{\max}} = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 = (0,851; 0,526) + (-0,526; 0,851) = (0,325; 1,377)$$

$$\text{Normalizando: } \bar{n}_{\perp \tau_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{0,325^2 + 1,377^2}} (0,325; 1,377) = (0,230; 0,973) \text{ ou } (-0,230; -0,973)$$

$$\text{Ou } \bar{v}_{\perp \tau_{\max}} = \bar{n}_1 - \bar{n}_2 = (0,851; 0,526) - (-0,526; 0,851) = (1,377; -0,325)$$

$$\text{Normalizando: } \bar{n}_{\perp \tau_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1,377^2 + (-0,325)^2}} (1,377; -0,325) = (0,973; -0,230) \text{ ou } (-0,973; 0,230)$$



$$\tau_{\max} = \left\{ [T] \times \bar{n}_{\perp \tau_{\max}} \right\}^T \times \bar{n}_{// \tau_{\max}}$$

Quando $\tau_{\max}$:

$$\sigma = \left\{ [T] \times \bar{n}_{\perp \tau_{\max}} \right\}^T \times \bar{n}_{\perp \tau_{\max}}$$

$\bar{n}_{\perp \tau_{\max}}$ - vector unitário normal à faceta onde ocorre a $\tau_{\max}$

$\bar{n}_{// \tau_{\max}}$ - vector unitário paralelo à faceta onde ocorre a $\tau_{\max}$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

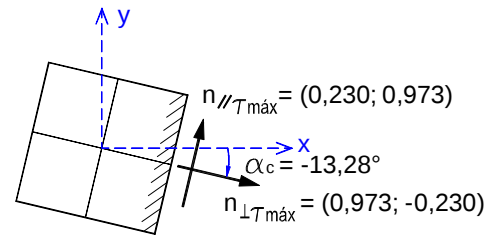
TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

Considerando a faceta representada na figura ao lado:

$$\bar{n}_{\perp \tau_{\max}} = (0,230; 0,973)$$

$$\bar{n}_{// \tau_{\max}} = (-0,973; 0,230)$$

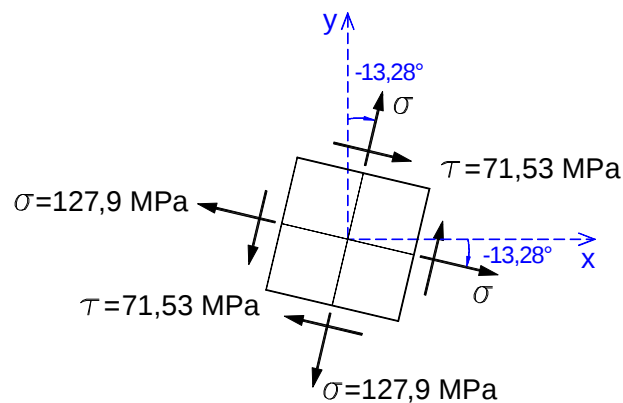


$$\tau_{\max} = \left\{ \begin{bmatrix} 160 & 64 \\ 64 & 96 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,973 \\ -0,230 \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} 0,230 \\ 0,973 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{\max} = \begin{bmatrix} 140,960 \\ 40,192 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0,230 \\ 0,973 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140,960 & 40,192 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,230 \\ 0,973 \end{bmatrix} = 71,53 \text{ MPa}$$

Como o sinal é positivo, o sentido da tensão τ vai ser igual ao do vector $\bar{n}_{// \tau_{\max}}$.

$$\sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 160 & 64 \\ 64 & 96 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,973 \\ -0,230 \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} 0,230 \\ 0,973 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140,960 & 40,192 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,230 \\ 0,973 \end{bmatrix} = 127,91 \text{ MPa}$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

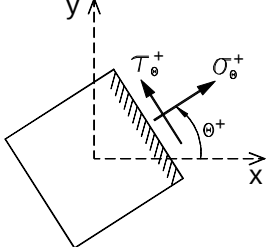
TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

Alínea c)

• FÓRMULAS

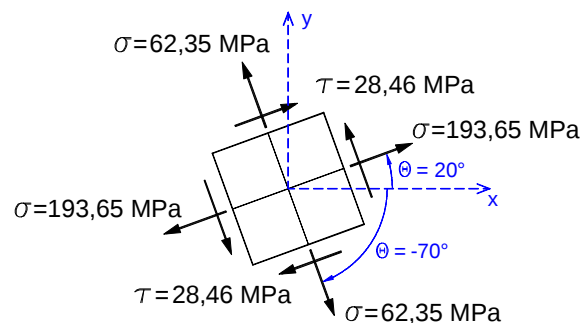
$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$


$$\sigma_{\theta=20^\circ} = \frac{160+96}{2} + \frac{160-96}{2} \cos 40^\circ + 64 \sin 40^\circ = 193,65 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\theta=20^\circ} = -\frac{160-96}{2} \sin 40^\circ + 64 \cos 40^\circ = 28,46 \text{ MPa}$$

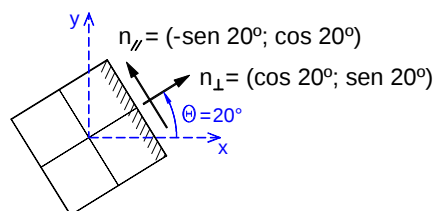
$$\sigma_{\theta=-70^\circ} = \frac{160+96}{2} + \frac{160-96}{2} \cos(-140^\circ) + 64 \sin(-140^\circ) = 62,35 \text{ MPa}$$



• CÁLCULO MATRICIAL

$$\bar{n}_\perp = (\cos 20^\circ; \sin 20^\circ)$$

$$\bar{n}_\parallel = (-\sin 20^\circ; \cos 20^\circ)$$



$$\bar{\sigma} = \bar{T}_R \times \bar{n}_\perp \Rightarrow \bar{\sigma} = \left[\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \times \bar{n}_\perp \right]^T \times \bar{n}_\perp$$

$$\sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 160 & 64 \\ 64 & 96 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos 20^\circ \\ \sin 20^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} \cos 20^\circ \\ \sin 20^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 172,240 & 92,974 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos 20^\circ \\ \sin 20^\circ \end{bmatrix} = 193,65 \text{ MPa}$$

$$\bar{\tau} = \bar{T}_R \times \bar{n}_\parallel \Rightarrow \bar{\tau} = \left[\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \times \bar{n}_\parallel \right]^T \times \bar{n}_\parallel$$

$$\tau = \left\{ \begin{bmatrix} 160 & 64 \\ 64 & 96 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos 20^\circ \\ \sin 20^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} -\sin 20^\circ \\ \cos 20^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 172,240 & 92,974 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sin 20^\circ \\ \cos 20^\circ \end{bmatrix} = 28,46 \text{ MPa}$$

Como o sinal é positivo, o sentido da tensão τ vai ser igual ao do vector $\bar{n}_\parallel$.

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

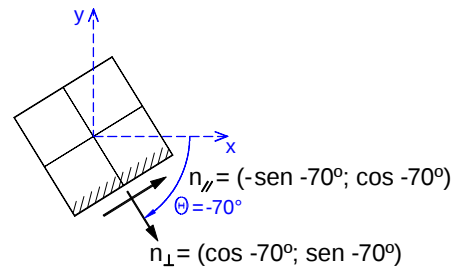
TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

Outra faceta:

$$\bar{n}_\perp = (\cos -70^\circ; \sin -70^\circ) = (0,342; -0,940)$$

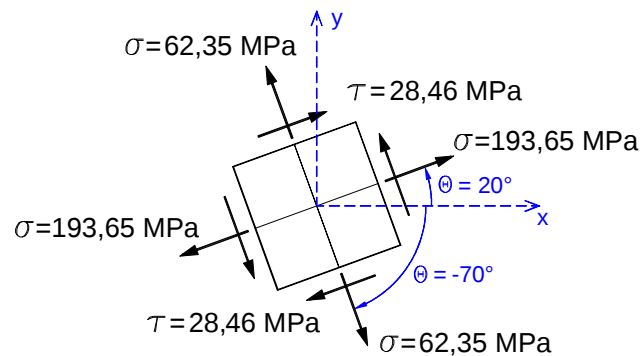
$$\bar{n}_\parallel = (-\sin -70^\circ; \cos 70^\circ) = (0,940; 0,342)$$



$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \bar{T}_R \times \bar{n}_\perp \Rightarrow \bar{\sigma} = [[T] \times \bar{n}_\perp]^T \times \bar{n}_\perp \\ \sigma &= \left\{ \begin{bmatrix} 160 & 64 \\ 64 & 96 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos -70^\circ \\ \sin -70^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} \cos -70^\circ \\ \sin -70^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,417 & -68,321 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos -70^\circ \\ \sin -70^\circ \end{bmatrix} = 62,35 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \bar{T}_R \times \bar{n}_\parallel \Rightarrow \bar{\tau} = [[T] \times \bar{n}_\parallel]^T \times \bar{n}_\parallel \\ \tau &= \left\{ \begin{bmatrix} 160 & 64 \\ 64 & 96 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos -70^\circ \\ \sin -70^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} -\sin -70^\circ \\ \cos -70^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,417 & -68,321 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sin -70^\circ \\ \cos -70^\circ \end{bmatrix} = -28,46 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Como o sinal é negativo, o sentido da tensão τ vai ser contrário ao do vector $\bar{n}_\parallel$.

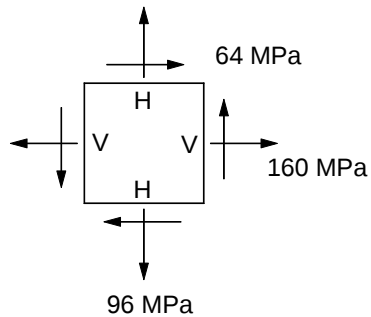


RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

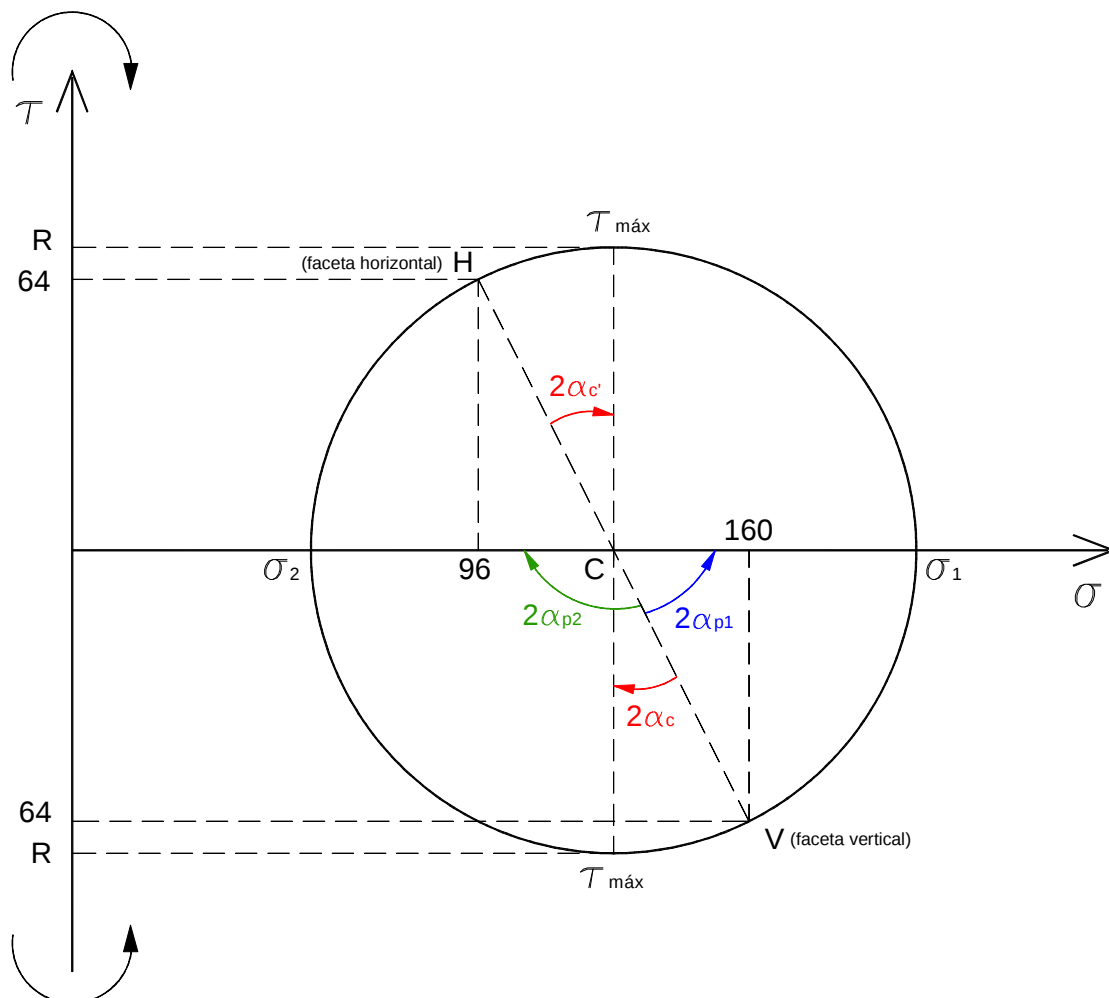
ISABEL ALVIM TELES

CÍRCULO DE MOHR DAS TENSÕES



Facetas horizontais: Facetas H $\Rightarrow \begin{cases} \sigma = 96 \text{ MPa} \\ \tau = 64 \text{ MPa} \end{cases}$

Facetas verticais: Facetas V $\Rightarrow \begin{cases} \sigma = 160 \text{ MPa} \\ \tau = 64 \text{ MPa} \end{cases}$



C - centro do círculo de Mohr $\Rightarrow C = \sigma_{\text{méd}} = \frac{160 + 96}{2} = 128 \text{ MPa}$

R - raio de círculo de Mohr $\Rightarrow R = \sqrt{64^2 + (160 - 128)^2} = 71,554 \text{ MPa}$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \sigma_{\text{méd}} + R = 128 + 71,554 = 199,554 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_2 = \sigma_{\text{méd}} - R = 128 - 71,554 = 56,446 \text{ MPa}$$

α_{p1} – ângulo que a faceta onde ocorre σ_1 faz com a faceta V (faceta vertical)
ou ângulo que a normal à faceta onde ocorre σ_1 faz com a normal à faceta V (eixo x)

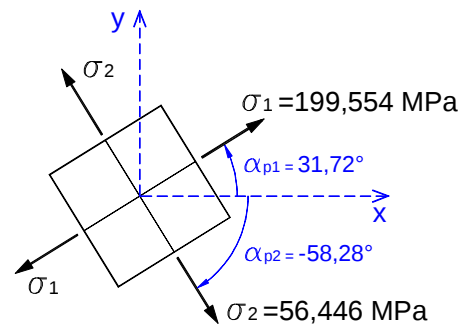
α_{p2} – ângulo que a faceta onde ocorre σ_2 faz com a faceta V (faceta vertical)
ou ângulo que a normal à faceta onde ocorre σ_2 faz com a normal à faceta V (eixo x)

$$\text{tg } 2\alpha_{p1} = \frac{64}{160 - C} = \frac{64}{32} = 2 \Rightarrow 2\alpha_{p1} = \arctg 2$$

$$\alpha_{p1} = 31,72^\circ$$

$$2\alpha_{p2} = 180^\circ - 2\alpha_{p1} \Rightarrow \alpha_{p2} = 90^\circ - \alpha_{p1} = 90^\circ - 31,72^\circ$$

$$\alpha_{p2} = 58,28^\circ$$



$$\tau_{\max} = R = 71,554 \text{ MPa} \Rightarrow \text{Sentido de } \tau_{\max}$$

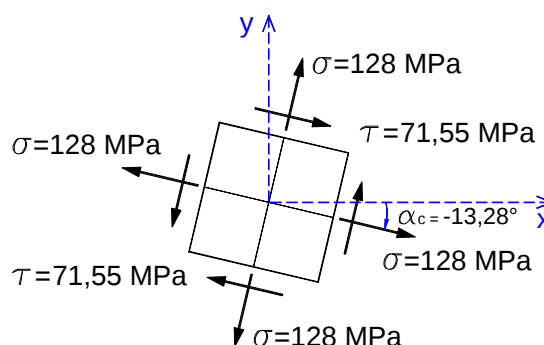
$$\text{Nas facetas onde ocorre } \tau_{\max} \Rightarrow \sigma = C = 128 \text{ MPa}$$

α_c – ângulo que uma das facetas onde ocorre $\tau_{\max}$ faz com a faceta V (faceta vertical) ou
ângulo que a normal a uma das facetas onde ocorre $\tau_{\max}$ faz com a normal à faceta V (eixo x)

$\alpha_{c'}$ – ângulo que uma das facetas onde ocorre $\tau_{\max}$ faz com a faceta H (faceta horizontal) ou
ângulo que a normal a uma das facetas onde ocorre $\tau_{\max}$ faz com a normal à faceta H (eixo y)

$$2\alpha_c = 90^\circ - 2\alpha_{p1} \Rightarrow \alpha_c = 45^\circ - \alpha_{p1} = 45^\circ - 31,72^\circ = 13,28^\circ$$

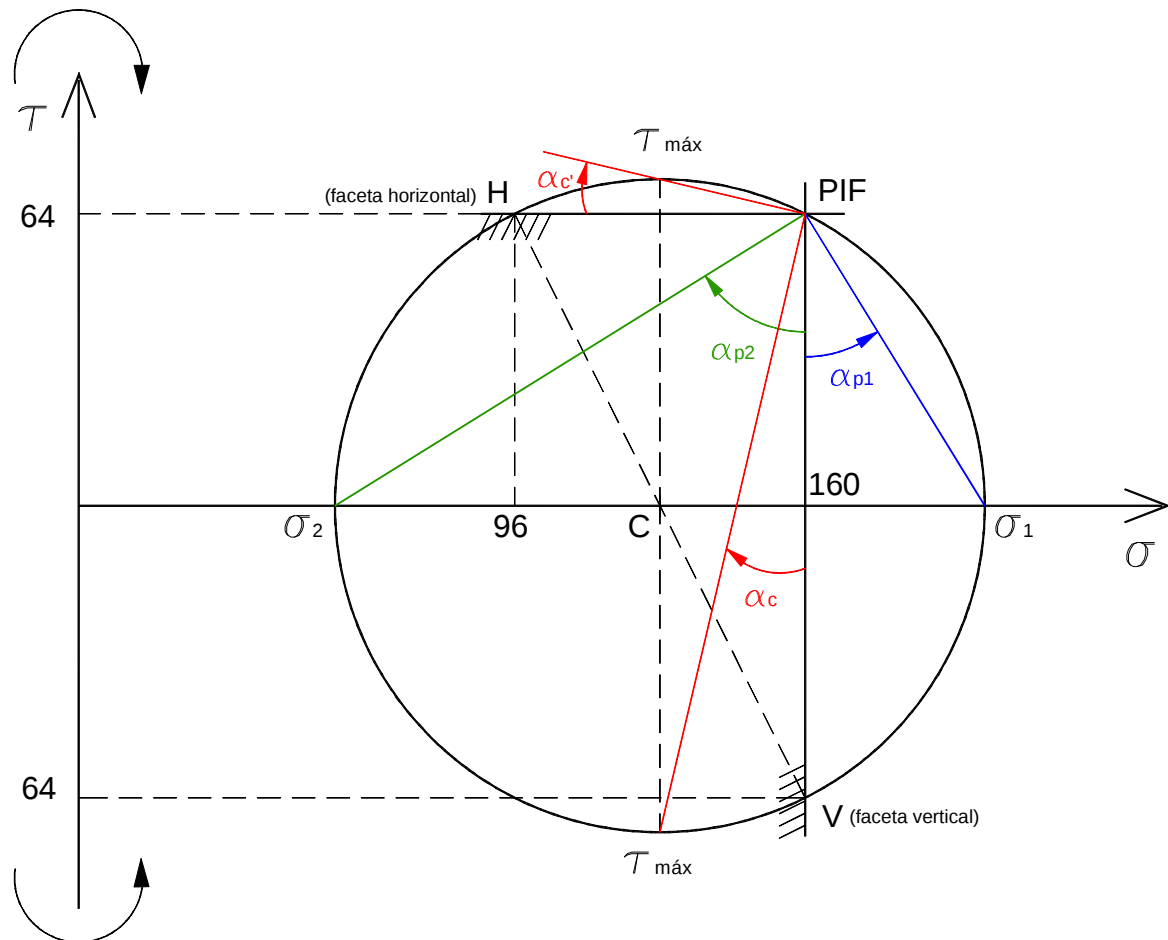
$$2\alpha_{c'} = 2\alpha_c \Rightarrow \alpha_{c'} = 13,28^\circ$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES



PIF - pólo de irradiação das facetas

$$\operatorname{tg} \alpha_{p1} = \frac{\sigma_1 - 160}{64} = \frac{199,554 - 160}{64} = 0,618 \Rightarrow \alpha_{p1} = \arctg 0,618 = 31,72^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{p2} = \frac{160 - \sigma_2}{64} = \frac{160 - 56,446}{64} = 1,618 \Rightarrow \alpha_{p2} = \arctg 1,618 = 58,28^\circ$$

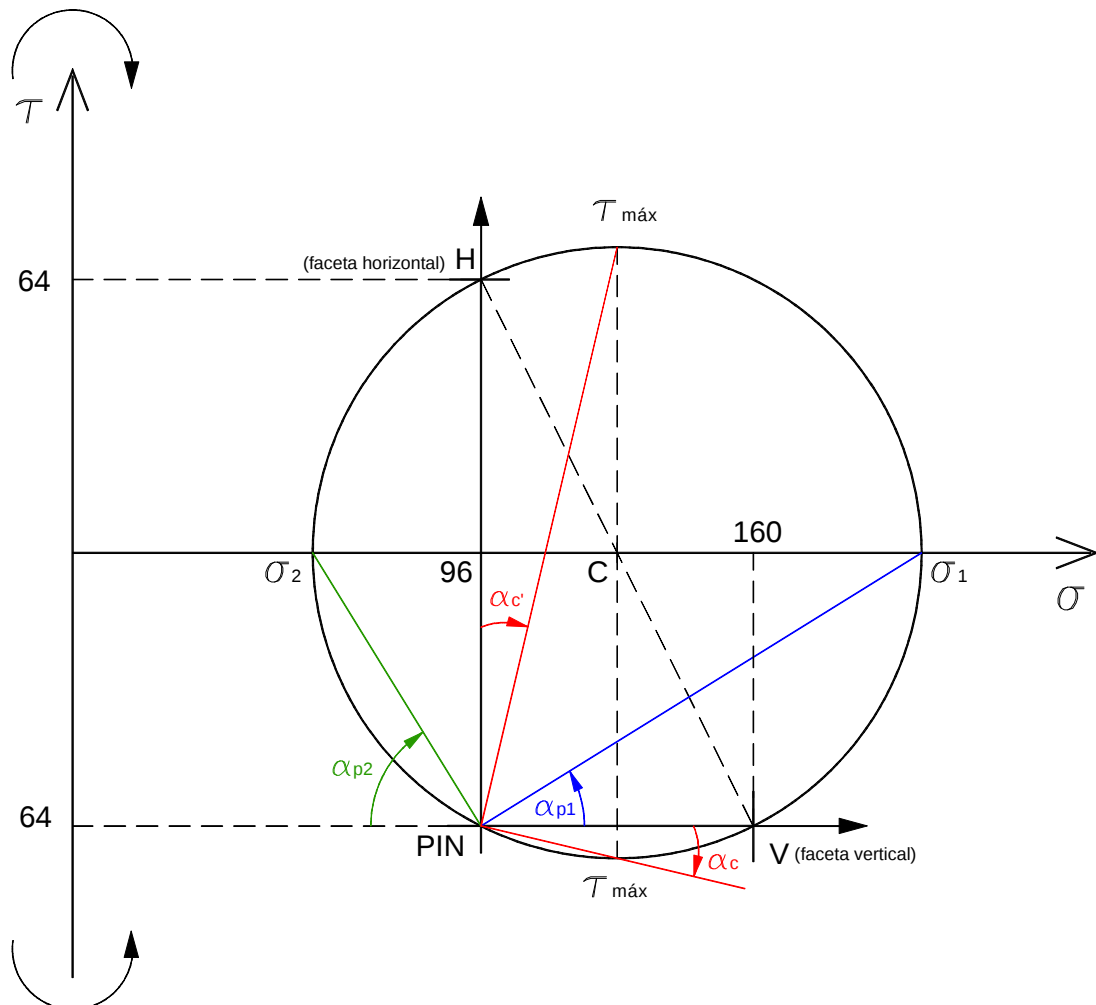
$$\operatorname{tg} \alpha_c = \frac{160 - C}{\tau_{\text{máx}} + 64} = \frac{160 - 128}{71,554 + 64} = 0,236 \Rightarrow \alpha_c = \arctg 0,236 = 13,28^\circ$$

$$\alpha_{c'} = \alpha_c \Rightarrow \alpha_{c'} = 13,28^\circ$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES



PIN - pólo de irradiação das normais às facetas

$$\operatorname{tg} \alpha_{p1} = \frac{64}{\sigma_1 - 96} = \frac{64}{199,554 - 96} = 0,618 \Rightarrow \alpha_{p1} = \arctg 0,618 = 31,72^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{p2} = \frac{64}{96 - \sigma_2} = \frac{64}{96 - (-56,446)} = 1,618 \Rightarrow \alpha_{p2} = \arctg 1,618 = 58,28^\circ$$

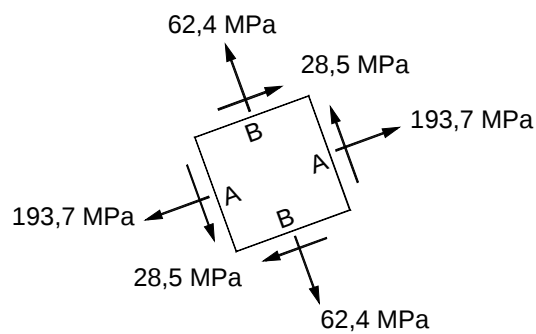
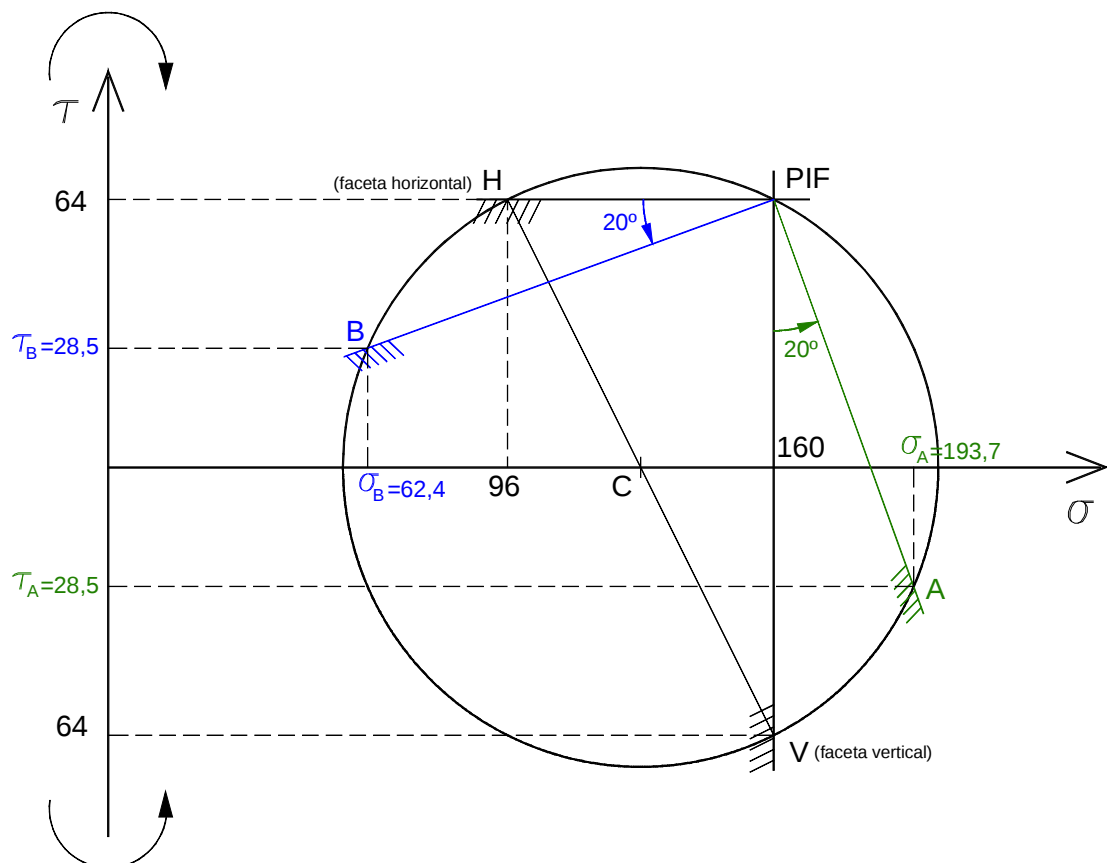
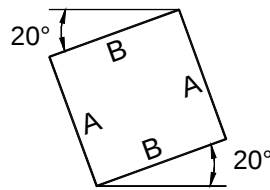
$$\operatorname{tg} \alpha_{c'} = \frac{C - 96}{\tau_{\max} + 64} = \frac{128 - 96}{71,554 + 64} = 0,236 \Rightarrow \alpha_{c'} = \arctg 0,236 = 13,28^\circ$$

$$\alpha_c = \alpha_{c'} \Rightarrow \alpha_c = 13,28^\circ$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

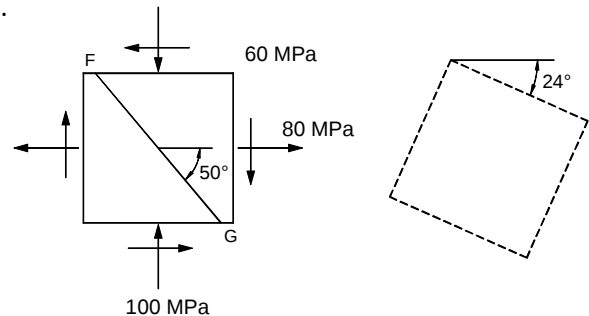
ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO 2

ENUNCIADO

Considere o estado plano de tensão indicado na figura.

- Determine as tensões principais e as respectivas orientações;
- Caracterize o estado de tensão correspondente à máxima tensão tangencial;
- Determine a tensão normal e a tensão tangencial a actuar na faceta **FG**;
- Determine o estado de tensão para as facetas indicadas a tracejado.



RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 2

Alínea a)

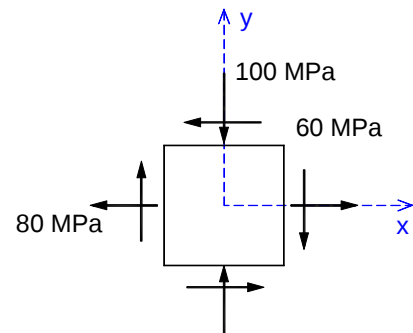
TENSOR DAS TENSÕES

$$\sigma_x = 80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -100 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -60 \text{ MPa}$$

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 80 & -60 \\ -60 & -100 \end{bmatrix}$$



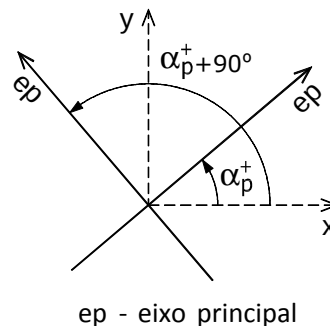
• FÓRMULAS

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\text{mín}} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}$$

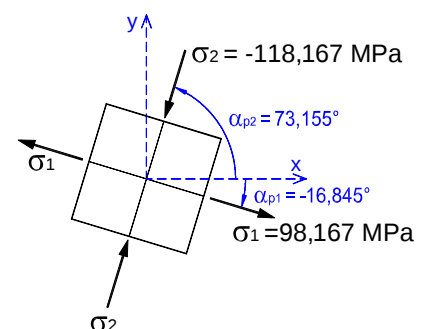
$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \pm 90^\circ$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$



ep - eixo principal

$$\begin{cases} \sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 = \frac{80 - 100}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(80 + 100)^2 + 4 \times (-60)^2} = 98,167 \text{ MPa} \\ \sigma_{\text{mín}} = \sigma_2 = \frac{80 - 100}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(80 + 100)^2 + 4 \times (-60)^2} = -118,167 \text{ MPa} \end{cases}$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2 \times (-60)}{80 - (-100)}\right) = \frac{1}{2} \arctg\left(-\frac{2}{3}\right) = -16,845^\circ \pm 90^\circ$$

$$\sigma_x > \sigma_y \Rightarrow \sigma_1 \text{ mais perto do eixo } x \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{p1} = -16,845^\circ \\ \alpha_{p2} = \alpha_{p1} + 90^\circ = 73,155^\circ \end{cases}$$

Ou:

$$\sigma_{(\alpha_p = -16,845^\circ)} = \frac{80 - 100}{2} + \frac{80 + 100}{2} \cos(-2 \times 16,845^\circ) - 60 \sin(-2 \times 16,845^\circ) = 98,167 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_1$$

$$\sigma_{(\alpha_p = 73,155^\circ)} = \frac{80 - 100}{2} + \frac{80 + 100}{2} \cos(2 \times 73,155^\circ) - 60 \sin(2 \times 73,155^\circ) = -118,167 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_2$$

• CÁLCULO MATRICIAL

Tensões principais $\Rightarrow \det |T - \sigma_p I| = 0$

$$\det \begin{vmatrix} 80 - \sigma_p & -60 \\ -60 & -100 - \sigma_p \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (80 - \sigma_p)(-100 - \sigma_p) - (-60)^2 = 0$$

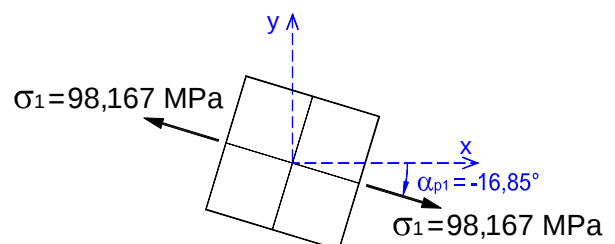
$$\sigma_p^2 + 20 \sigma_p - 11600 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_p = 98,167 \\ \sigma_p = -118,167 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 98,167 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -118,167 \text{ MPa} \end{cases}$$

Direcção principal correspondente a $\sigma_1 \Rightarrow [T - \sigma_1 I] \times \bar{n}_1 = \bar{0}$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 80 - 98,167 & -60 \\ -60 & -100 - 98,167 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{escolher uma só equação} \\ n_{1x}^2 + n_{1y}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -18,167 & -60 \\ -60 & -198,167 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{escolher uma só equação} \\ n_{1x}^2 + n_{1y}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -18,167 n_{1x} - 60 n_{1y} = 0 \\ n_{1x}^2 + n_{1y}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_{1x} = 0,9571 \\ n_{1y} = -0,2898 \end{cases}$$



$$\bar{n}_1 = (0,9571; -0,2898) \text{ ou } \bar{n}_1 = (-0,9571; 0,2898)$$

$$\alpha_{p1} = \arctg\left(\frac{-0,2898}{0,9571}\right) = -16,85^\circ$$

α_{p1} - ângulo que o eixo principal 1 faz com o eixo X

(rotação negativa na direcção de x^+ para y^-)

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

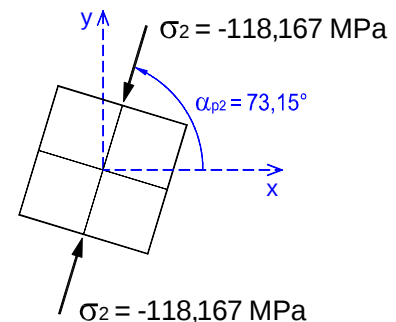
Direcção principal correspondente a $\sigma_2 \Rightarrow [T - \sigma_2 I] \times \bar{n}_2 = \bar{0}$ (resolução idêntica à anterior para σ_1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 80+118,167 & -60 \\ -60 & -100+118,167 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ n_{2x}^2 + n_{2y}^2 = 1 \end{array} \right. \leftarrow \text{escolher uma só equação}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 198,167 & -60 \\ -60 & 18,167 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ n_{2x}^2 + n_{2y}^2 = 1 \end{array} \right. \leftarrow \text{escolher uma só equação}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 198,167 n_{2x} - 60 n_{2y} = 0 \\ n_{2x}^2 + n_{2y}^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} n_{1x} = 0,2898 \\ n_{1y} = 0,9571 \end{cases}$$

$$\bar{n}_2 = (0,2898; 0,9571) \text{ ou } \bar{n}_2 = (-0,2898; -0,9571)$$



$$\alpha_{p2} = \arctg\left(\frac{0,9571}{0,2898}\right) = 73,15^\circ$$

α_{p2} - ângulo que o **eixo principal 2** faz com o eixo **X**
(rotação positiva na direcção de x^+ para y^+)

Resolução alternativa 1: $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ e $\begin{cases} \bar{n}_1 = (0,9571; -0,2898) \\ \text{ou} \\ \bar{n}_1 = (-0,9571; 0,2898) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{n}_2 = (0,2898; 0,9571) \\ \text{ou} \\ \bar{n}_2 = (-0,2898; -0,9571) \end{cases}$

$$\alpha_{p2} = \arctg\left(\frac{0,9571}{0,2878}\right) = 73,15^\circ$$

α_{p2} - ângulo que o **eixo principal 2** faz com o eixo do **X**
(rotação positiva na direcção de x^+ para y^+)

Resolução alternativa 2: $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \Rightarrow \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} n_{1x} & n_{1y} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \end{bmatrix} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,9571 \times n_{2x} - 0,2878 \times n_{2y} = 0 \\ n_{2x}^2 + n_{2y}^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} n_{2x} = 0,2898 \\ n_{2y} = 0,9571 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n_{2x} = -0,2898 \\ n_{2y} = -0,9571 \end{cases}$$

$$\alpha_{p2} = \arctg\left(\frac{0,9571}{0,2898}\right) = 73,15^\circ$$

α_{p2} - ângulo que o **eixo principal 2** faz com o eixo do **X**
(rotação positiva na direcção de x^+ para y^+)

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

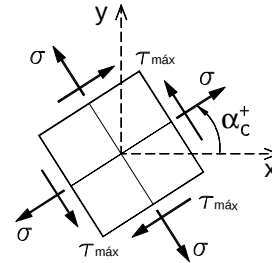
Alínea b)

• FÓRMULAS

$$|\tau_{\max}| = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad \text{ou} \quad |\tau_{\max}| = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\alpha_c = \alpha_p \pm 45^\circ \Rightarrow \tau_{\alpha_c} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_c + \tau_{xy} \cos 2\alpha_c$$

$$\text{Quando } \tau_{\max} \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



$$|\tau_{\max}| = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{98,167 + 118,167}{2} = 108,167 \text{ MPa}$$

ou

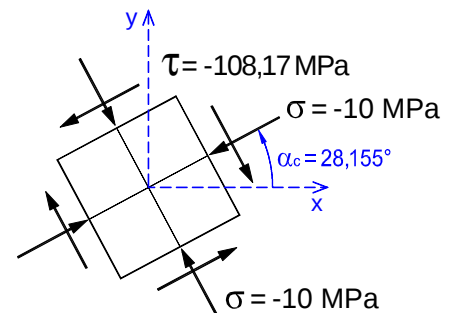
$$|\tau_{\max}| = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(80 + 100)^2 + 4 \times (-60)^2} = 108,167 \text{ MPa}$$

$$\alpha_c = \alpha_p \pm 45^\circ = -16,845^\circ \pm 45^\circ$$

$$\alpha_c = 28,155^\circ \quad \text{ou} \quad \alpha_c = -61,845^\circ$$

$$\begin{cases} \alpha_c = 28,155^\circ \\ \tau_{\alpha_c} = -\frac{80+100}{2} \sin(2 \times 28,155) - 60 \cos(2 \times 28,155) = -108,167 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\text{Quando } \tau_{\max} \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{80 - 100}{2} = -10 \text{ MPa}$$



• CÁLCULO MATRICIAL

$$\text{Direcções principais: } \begin{cases} \alpha_{p1} = -16,845^\circ \\ \alpha_{p2} = 73,155^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_c = -16,845^\circ + 45^\circ = 28,155^\circ \\ \bar{n}_{\perp \tau_{\max}} = (\cos \alpha_c; \sin \alpha_c) = (\cos 28,155^\circ; \sin 28,155^\circ) = (0,8817; 0,4719) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_c = -16,845^\circ - 45^\circ = -61,845^\circ \\ \bar{n}_{\perp \tau_{\max}} = (\cos \alpha_c; \sin \alpha_c) = (\cos -61,845^\circ; \sin -61,845^\circ) = (0,4719; -0,8817) \end{cases}$$

$\bar{n}_{\perp \tau_{\max}}$ - vector normal à faceta onde ocorre a $\tau_{\max}$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

Outra forma de encontrar $\bar{n}_{\perp\tau_{\max}}$: O vector soma (ou o vector subtracção) de $\bar{n}_1$ e $\bar{n}_2$ tem a direcção de $\bar{n}_{\perp\tau_{\max}}$, mas como não tem comprimento unitário, necessita de ser normalizado.

$$\begin{cases} \alpha_{p1} = -16,845^\circ \Rightarrow \bar{n}_1 = (0,9571; -0,2898) \text{ ou } \bar{n}_1 = (-0,9571; 0,2898) \\ \alpha_{p2} = 73,155^\circ \Rightarrow \bar{n}_2 = (0,2898; 0,9571) \text{ ou } \bar{n}_2 = (-0,2898; -0,9571) \end{cases}$$

$$\bar{v}_{\perp\tau_{\max}} = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 = (0,9571; -0,2898) + (0,2898; 0,9571) = (1,2469; 0,6673)$$

$$\text{Normalizando: } \bar{n}_{\perp\tau_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1,2469^2 + 0,6673^2}} (1,2469; 0,6673) = (0,882; 0,472) \text{ ou } (-0,882; -0,472)$$

ou

$$\bar{v}_{\perp\tau_{\max}} = \bar{n}_1 - \bar{n}_2 = (0,9571; -0,2898) - (0,2898; 0,9571) = (0,6673; -1,2469)$$

$$\text{Normalizando: } \bar{n}_{\perp\tau_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{0,6673^2 + (-1,2469)^2}} (0,6673; -1,2469) = (0,472; -0,882) \text{ ou } (-0,472; 0,882)$$

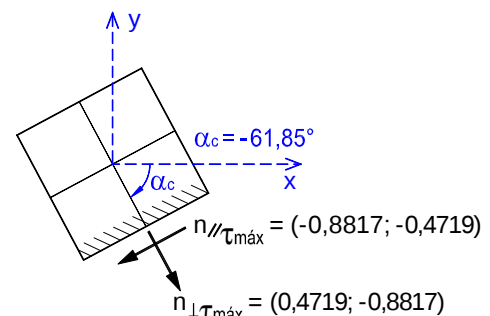
$\tau_{\max} = \{ [\tau] \times \bar{n}_{\perp\tau_{\max}} \}^T \times \bar{n}_{//\tau_{\max}}$ Quando $\tau_{\max}$: $\sigma = \{ [\tau] \times \bar{n}_{\perp\tau_{\max}} \}^T \times \bar{n}_{\perp\tau_{\max}}$	$\bar{n}_{\perp\tau_{\max}}$ - vector unitário normal à faceta onde ocorre a $\tau_{\max}$ ou $\bar{n}_{//\tau_{\max}}$ - vector unitário paralelo à faceta onde ocorre a $\tau_{\max}$
--	---

$$\bar{n}_{\perp\tau_{\max}} = (0,4719; -0,8817) \quad \searrow$$

$$\bar{n}_{//\tau_{\max}} = (-0,8817; -0,4719) \quad \swarrow$$

$$\tau_{\max} = \left\{ \begin{bmatrix} 80 & -60 \\ -60 & -100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,4719 \\ -0,8817 \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} -0,8817 \\ -0,4719 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{\max} = \begin{bmatrix} 90,654 \\ 59,856 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} -0,8817 \\ -0,4719 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90,654 & 59,856 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,8817 \\ -0,4719 \end{bmatrix} = -108,2 \text{ MPa}$$



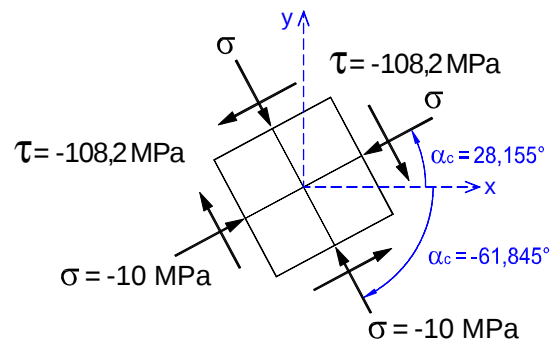
Como o sinal é negativo, a tensão τ vai ter sentido contrário ao do vector $\bar{n}_{//\tau_{\max}}$, ou seja $\nearrow$.

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

$$\sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 80 & -60 \\ -60 & -100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,4719 \\ -0,8817 \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} 0,4719 \\ -0,8817 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90,654 & 59,856 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,4719 \\ -0,8817 \end{bmatrix} = -10,0 \text{ MPa}$$

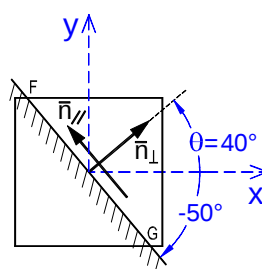
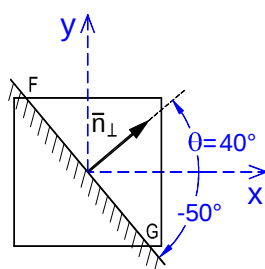


Alínea c)

• FÓRMULAS

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

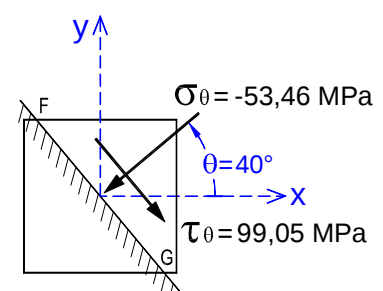
$$\tau_{\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$



$$\sigma_{\theta=40^\circ} = \frac{80-100}{2} + \frac{80+100}{2} \cos 80^\circ - 60 \sin 80^\circ = -53,460 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\theta=40^\circ} = -\frac{80+100}{2} \sin 80^\circ - 60 \cos 80^\circ = -99,052 \text{ MPa}$$

Como o sinal é negativo, a tensão τ vai ter sentido contrário ao do vector $\bar{n}_{//}$, ou seja: ↘



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

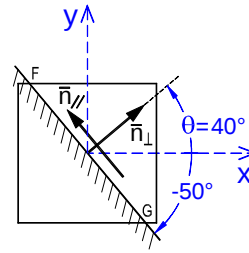
TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

• CÁLCULO MATRICIAL

$$\bar{n}_\perp = (\cos 40^\circ; \sin 40^\circ) = (0,7660; 0,6428) \rightarrow$$

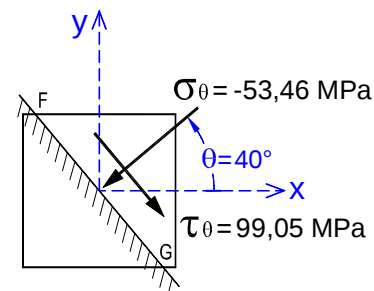
$$\bar{n}_{//} = (-\sin 40^\circ; \cos 40^\circ) = (-0,6428; 0,7660) \rightarrow$$



$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \bar{T}_R \times \bar{n}_\perp \Rightarrow \bar{\sigma} = [[T] \times \bar{n}_\perp]^T \times \bar{n}_\perp \\ \sigma &= \left\{ \begin{bmatrix} 80 & -60 \\ -60 & -100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos 40^\circ \\ \sin 40^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} \cos 40^\circ \\ \sin 40^\circ \end{bmatrix} = [22,716 \quad -110,241] \times \begin{bmatrix} \cos 40^\circ \\ \sin 40^\circ \end{bmatrix} = -53,46 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \bar{T}_R \times \bar{n}_{//} \Rightarrow \bar{\tau} = [[T] \times \bar{n}_{//}]^T \times \bar{n}_{//} \\ \tau &= \left\{ \begin{bmatrix} 80 & -60 \\ -60 & -100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos 40^\circ \\ \sin 40^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} -\sin 40^\circ \\ \cos 40^\circ \end{bmatrix} = [22,716 \quad -110,241] \times \begin{bmatrix} -\sin 40^\circ \\ \cos 40^\circ \end{bmatrix} = -99,05 \text{ MPa} \end{aligned}$$

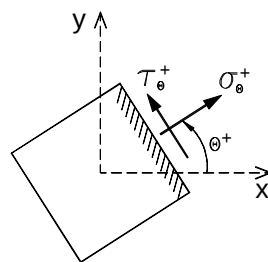
Como o sinal é negativo, a tensão τ vai ter sentido contrário ao do vector $\bar{n}_{//}$, ou seja: $\rightarrow$



Alínea d)

• FÓRMULAS

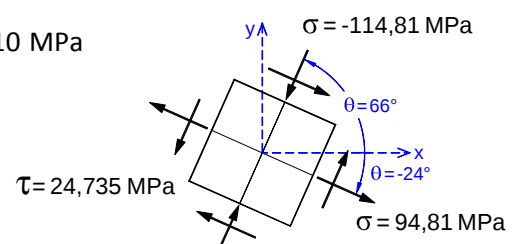
$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_\theta &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned}$$



$$\sigma_{\theta=-24^\circ} = \frac{80-100}{2} + \frac{80+100}{2} \cos(-48^\circ) - 60 \sin(-48^\circ) = 94,810 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\theta=-24^\circ} = -\frac{80+100}{2} \sin(-48^\circ) - 60 \cos(-48^\circ) = 26,735 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\theta=66^\circ} = \frac{80-100}{2} + \frac{80+100}{2} \cos 132^\circ - 60 \sin 132^\circ = -114,810 \text{ MPa}$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

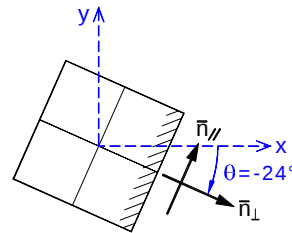
TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

• CÁLCULO MATRICIAL

$$\bar{n}_\perp = (\cos -24^\circ; \sin -24^\circ) = (0,9135; -0,4067) \quad \searrow$$

$$\bar{n}_{//} = (-\sin -24^\circ; \cos -24^\circ) = (0,4067; 0,9135) \quad \nearrow$$



$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \bar{T}_R \times \bar{n}_\perp \Rightarrow \bar{\sigma} = [[T] \times \bar{n}_\perp]^T \times \bar{n}_\perp \\ \sigma &= \left\{ \begin{bmatrix} 80 & -60 \\ -60 & -100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos -24^\circ \\ \sin -24^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} \cos -24^\circ \\ \sin -24^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97,488 & -14,139 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,9135 \\ -0,4067 \end{bmatrix} = 94,81 \text{ MPa} \end{aligned}$$

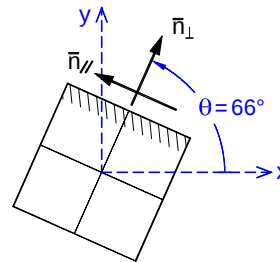
$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \bar{T}_R \times \bar{n}_{//} \Rightarrow \bar{\tau} = [[T] \times \bar{n}_\perp]^T \times \bar{n}_{//} \\ \tau &= \left\{ \begin{bmatrix} 80 & -60 \\ -60 & -100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos -24^\circ \\ \sin -24^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} -\sin -24^\circ \\ \cos -24^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97,488 & -14,139 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,4067 \\ 0,9135 \end{bmatrix} = 26,735 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Como o sinal é positivo, o sentido da tensão τ vai ser igual ao do vector $\bar{n}_{//}$, ou seja: $\nearrow$

Outra faceta:

$$\bar{n}_\perp = (\cos 66^\circ; \sin 66^\circ) = (0,4067; 0,9135) \quad \nearrow$$

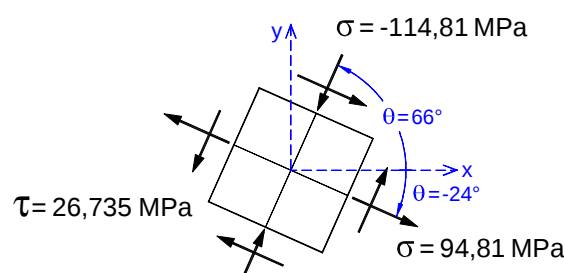
$$\bar{n}_{//} = (-\sin 66^\circ; \cos 66^\circ) = (-0,9135; 0,4067) \quad \nwarrow$$



$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \bar{T}_R \times \bar{n}_\perp \Rightarrow \bar{\sigma} = [[T] \times \bar{n}_\perp]^T \times \bar{n}_\perp \\ \sigma &= \left\{ \begin{bmatrix} 80 & -60 \\ -60 & -100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos 66^\circ \\ \sin 66^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} \cos 66^\circ \\ \sin 66^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22,274 & -115,759 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos 66^\circ \\ \sin 66^\circ \end{bmatrix} = -114,81 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \bar{T}_R \times \bar{n}_{//} \Rightarrow \bar{\tau} = [[T] \times \bar{n}_\perp]^T \times \bar{n}_{//} \\ \tau &= \left\{ \begin{bmatrix} 80 & -60 \\ -60 & -100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos 66^\circ \\ \sin 66^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} -\sin 66^\circ \\ \cos 66^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22,274 & -115,759 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sin 66^\circ \\ \cos 66^\circ \end{bmatrix} = -26,735 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Como o sinal é positivo, o sentido da tensão τ vai ser contrário ao do vector $\bar{n}_{//}$, ou seja: $\nwarrow$

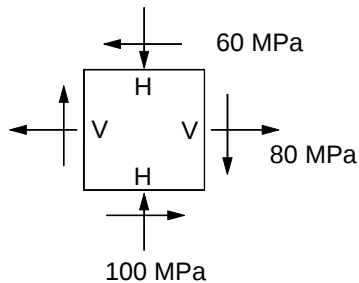


RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

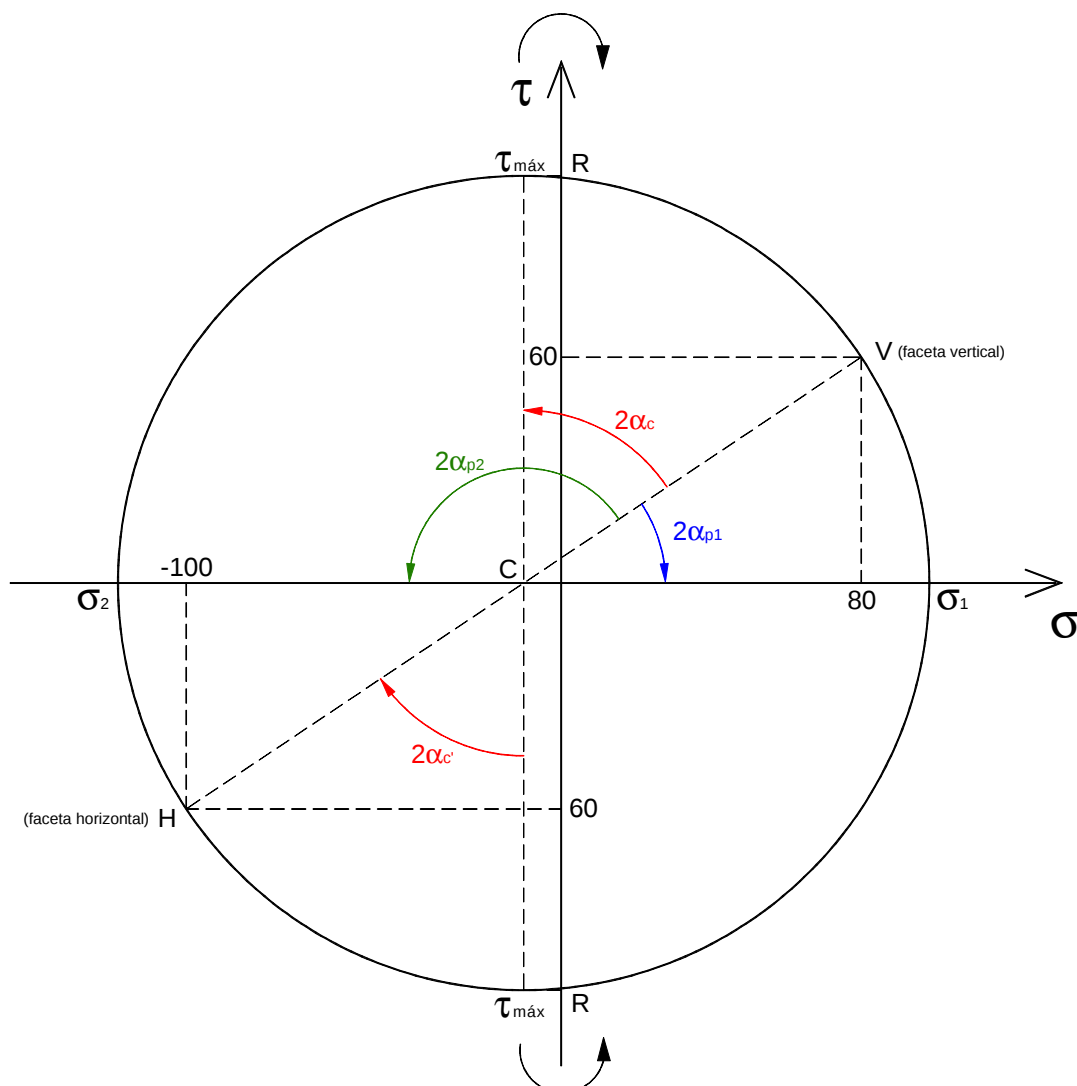
ISABEL ALVIM TELES

CÍRCULO DE MOHR DAS TENSÕES



Facetas horizontais: Facetas H $\Rightarrow \begin{cases} \sigma = -100 \text{ MPa} \\ \tau = 60 \text{ MPa} \end{cases}$

Facetas verticais: Facetas V $\Rightarrow \begin{cases} \sigma = 80 \text{ MPa} \\ \tau = 60 \text{ MPa} \end{cases}$



C – centro do círculo de Mohr $\Rightarrow C = \sigma_{\text{méd}} = \frac{80 - 100}{2} = -10 \text{ MPa}$

R – raio do círculo de Mohr $\Rightarrow R = \sqrt{60^2 + (80 + 10)^2} = 108,167 \text{ MPa}$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \sigma_{\text{méd}} + R = -10 + 108,167 = 98,167 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_2 = \sigma_{\text{méd}} - R = -10 - 108,167 = -118,167 \text{ MPa}$$

α_{p1} – ângulo que a faceta onde ocorre σ_1 faz com a faceta V (faceta vertical)
ou ângulo que a normal à faceta onde ocorre σ_1 faz com a normal à faceta V (eixo x)

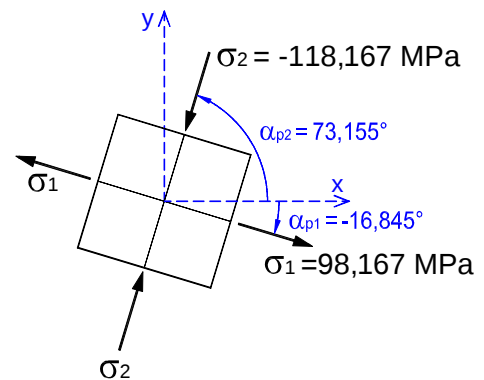
α_{p2} – ângulo que a faceta onde ocorre σ_2 faz com a faceta V (faceta vertical)
ou ângulo que a normal à faceta onde ocorre σ_2 faz com a normal à faceta V (eixo x)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{p1} = \frac{60}{80 + |C|} = \frac{60}{80 + 10} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\alpha_{p1} = \arctg \frac{2}{3}$$

$$\alpha_{p1} = 16,845^\circ$$

$$2\alpha_{p2} = 180^\circ - 2\alpha_{p1} \Rightarrow \alpha_{p2} = 90^\circ - \alpha_{p1} = 90^\circ - 16,845^\circ$$

$$\alpha_{p2} = 73,155^\circ$$



$$\tau_{\max} = R = 108,167 \text{ MPa} \Rightarrow \text{Sentido de } \tau_{\max} \nearrow$$

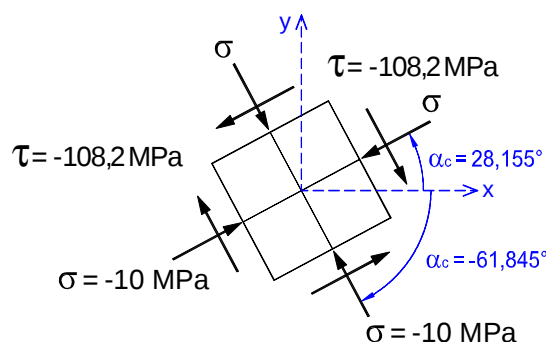
$$\text{Nas facetas onde ocorre } \tau_{\max} \Rightarrow \sigma = C = -10 \text{ MPa}$$

α_c – ângulo que uma das facetas onde ocorre $\tau_{\max}$ faz com a faceta V (faceta vertical) ou
ângulo que a normal a uma das facetas onde ocorre $\tau_{\max}$ faz com a normal à faceta V (eixo x)

$\alpha_{c'}$ – ângulo que uma das facetas onde ocorre $\tau_{\max}$ faz com a faceta H (faceta horizontal) ou
ângulo que a normal a uma das facetas onde ocorre $\tau_{\max}$ faz com a normal à faceta H (eixo y)

$$2\alpha_c = 90^\circ - 2\alpha_{p1} \Rightarrow \alpha_c = 45^\circ - \alpha_{p1} = 45^\circ - 16,845^\circ = 28,155^\circ$$

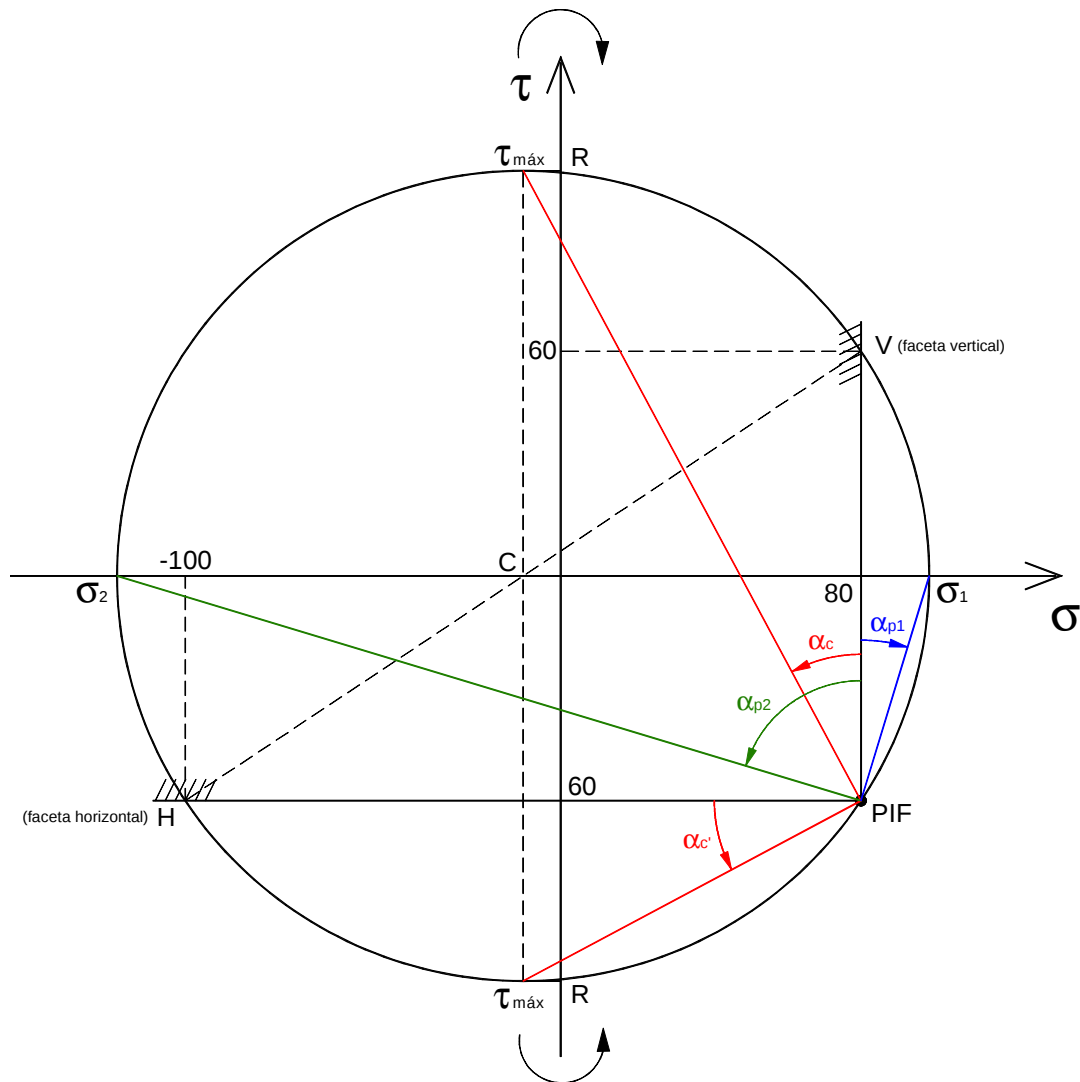
$$2\alpha_{c'} = 2\alpha_c \Rightarrow \alpha_{c'} = 28,155^\circ$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES



PIF - pólo de irradiação das facetas

$$\operatorname{tg} \alpha_{p1} = \frac{\sigma_1 - 80}{60} = \frac{98,167 - 80}{60} = 0,3028 \Rightarrow \alpha_{p1} = \arctg 0,3028 = 16,845^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{p2} = \frac{80 + |\sigma_2|}{60} = \frac{80 + 118,167}{60} = 3,3028 \Rightarrow \alpha_{p2} = \arctg 3,3028 = 73,155^\circ$$

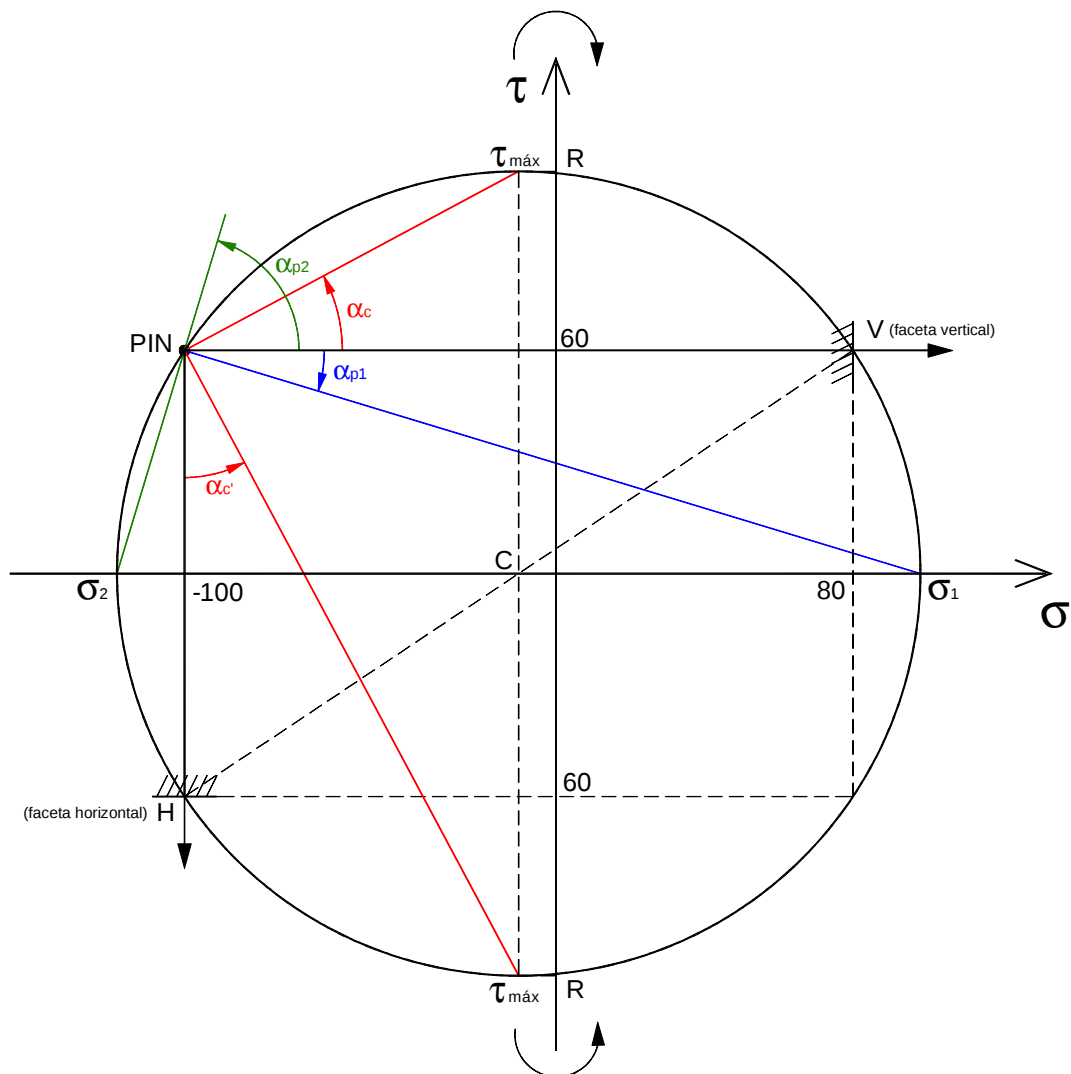
$$\operatorname{tg} \alpha_c = \frac{80 + |C|}{\tau_{máx} + 60} = \frac{80 + 10}{108,167 + 60} = 0,5352 \Rightarrow \alpha_c = \arctg 0,5352 = 28,155^\circ$$

$$\alpha_{c'} = \alpha_c \Rightarrow \alpha_{c'} = 28,155^\circ$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES



PIN - pólo de irradiação das normais às facetas

$$\operatorname{tg} \alpha_{p1} = \frac{60}{\sigma_1 + 100} = \frac{60}{98,167 + 100} = 0,3028 \Rightarrow \alpha_{p1} = \arctg 0,3028 = 16,845^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{p2} = \frac{64}{96 - \sigma_2} = \frac{64}{96 - 98,167} = 1,618 \Rightarrow \alpha_{p2} = \arctg 1,618 = 58,28^\circ$$

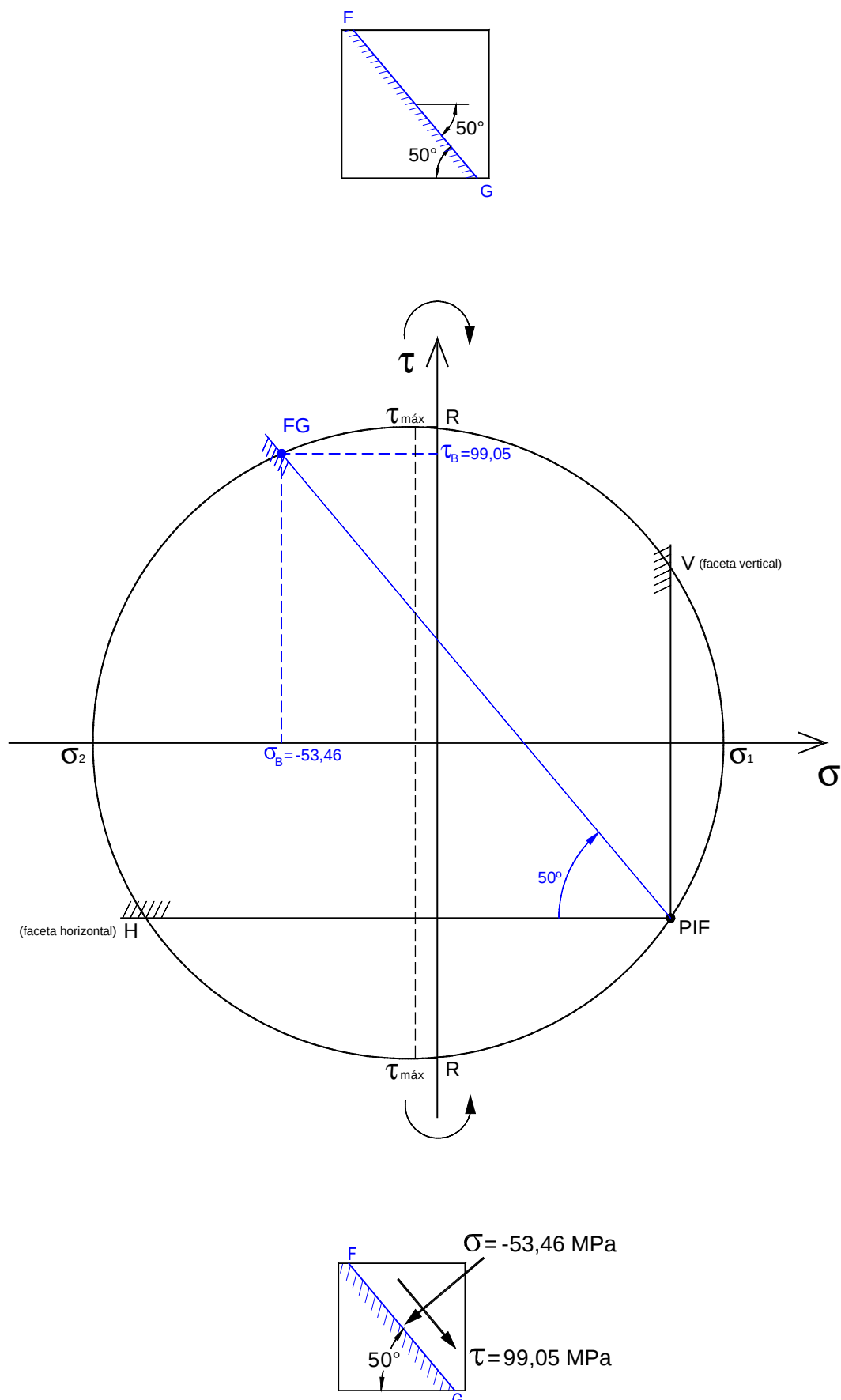
$$\operatorname{tg} \alpha_c = \frac{\tau_{\text{máx}} - 60}{100 - |C|} = \frac{108,167 - 60}{100 - 10} = 0,5351 \Rightarrow \alpha_{c'} = \arctg 0,5352 = 28,155^\circ$$

$$\alpha_{c'} = \alpha_c \Rightarrow \alpha_{c'} = 28,155^\circ$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TEORIA DA ELASTICIDADE - ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

