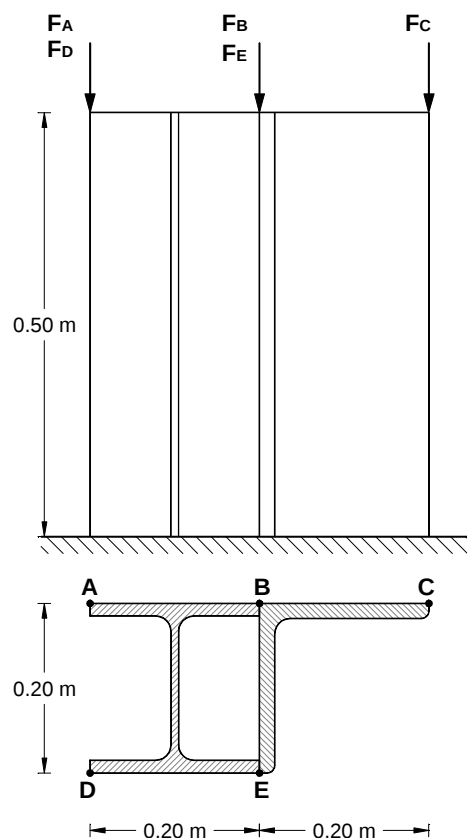


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

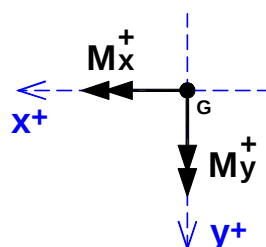
RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

(2014/2015)

FLEXÃO COMPOSTA EIXO NEUTRO, TENSÕES



RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO CONSIDERANDO A SEGUINTE CONVENÇÃO:



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

ISABEL ALVIM TELES

ENUNCIADO

Considere a peça vertical com 0,50 m de altura cuja secção transversal é constituída por um perfil HEB200 e uma cantoneira L200x200x18, cujas características se indicam abaixo.

Nos pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **E** estão a actuar as seguintes forças verticais:

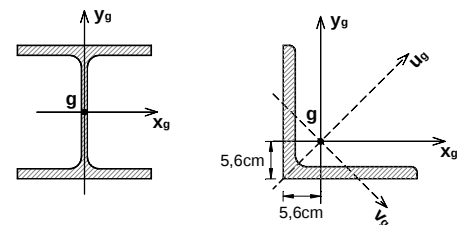
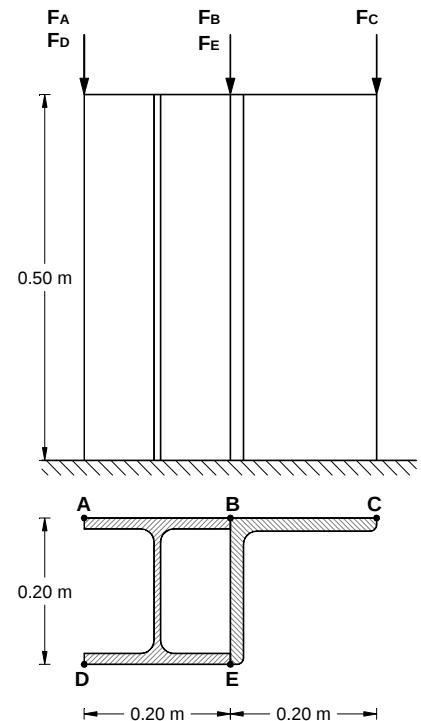
$$F_A = 160 \text{ kN} \quad F_B = 70 \text{ kN} \quad F_C = 100 \text{ kN}$$

$$F_D = 80 \text{ kN} \quad F_E = 90 \text{ kN}$$

- Defina a posição do eixo neutro na secção da base da peça;
- Determine as máximas tensões de compressão e de tracção que estão a actuar na base da peça.

PERFIL	Área (cm ²)	I _{xg} (cm ⁴)	I _{yg} (cm ⁴)
HEB 200	78,1	5696	2003

PERFIL	Área (cm ²)	I _{ug} (cm ⁴)	I _{vg} (cm ⁴)	I _{xg} = I _{yg} (cm ⁴)
200x200x18	69,1	4130	1070	2600



RESOLUÇÃO

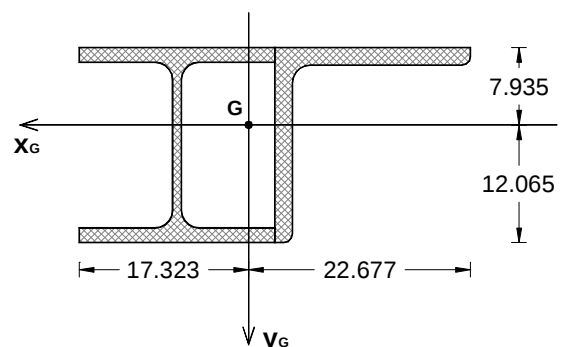
Alínea a)

• POSIÇÃO DO CENTRO DE GRAVIDADE

$$\text{Área} = 78,1 + 69,1 = 147,2 \text{ cm}^2$$

$$x_G = \frac{10 \times 78,1 + 25,6 \times 69,1}{147,2} = 17,323 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{10 \times 78,1 + (20 - 5,6) \times 69,1}{147,2} = 12,065 \text{ cm}$$



• **DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA I_{X_G}**

$$I_{X_G}^{HEB} = 5696 + 78,1 \times 2,065^2 = 6029,036 \text{ cm}^4$$

$$I_{X_G}^{CAN} = 2600 + 69,1 \times (7,935 - 5,6)^2 = 2976,749 \text{ cm}^4$$

$$I_{X_G} = I_{X_G}^{HEB} + I_{X_G}^{CAN} = 9005,78 \text{ cm}^4$$

• **DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA I_{Y_G}**

$$I_{Y_G}^{HEB} = 2003 + 78,1 \times 7,323^2 = 6191,216 \text{ cm}^4$$

$$I_{Y_G}^{CAN} = 2600 + 69,1 \times (25,6 - 17,323)^2 = 7333,953 \text{ cm}^4$$

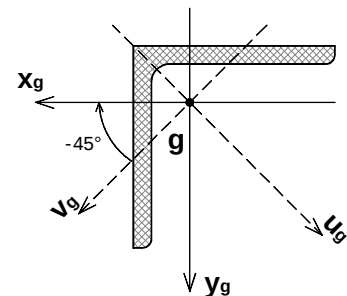
$$I_{Y_G} = I_{Y_G}^{HEB} + I_{Y_G}^{CAN} = 13525,17 \text{ cm}^4$$

• **DETERMINAÇÃO DO PRODUTO DE INÉRCIA $I_{X_G Y_G}$**

$$I_{X_G Y_G}^{HEB} = 0 + 78,1 \times 7,323 \times 2,065 = 1181,028 \text{ cm}^4$$

Para os eixos que passam no centro de gravidade da cantoneira ($x_g; y_g$):

$$\begin{aligned} I_{x_g y_g}^{CAN} &= \frac{I_{y_g} - I_{u_g}}{2} \sin 2\alpha + I_{u_g v_g} \cos 2\alpha = \\ &= \frac{1070 - 4130}{2} \sin(-90^\circ) + 0 \times \cos(-90^\circ) = 1530 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$



Para os eixos que passam no centro de gravidade da secção ($X_G; Y_G$):

$$I_{X_G Y_G}^{CAN} = I_{x_g y_g}^{CAN} + a \cdot b \cdot S = 1530 + 69,1 \times (-25,6 + 17,323) \times (-7,935 + 5,6) = 2865,482 \text{ cm}^4$$

$$I_{X_G Y_G} = I_{X_G Y_G}^{HEB} + I_{X_G Y_G}^{CAN} = 4046,51 \text{ cm}^4$$

• **EIXOS E MOMENTOS PRINCIPAIS CENTRAIS DE INÉRCIA**

$$I_1 = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4 I_{XY}^2}$$

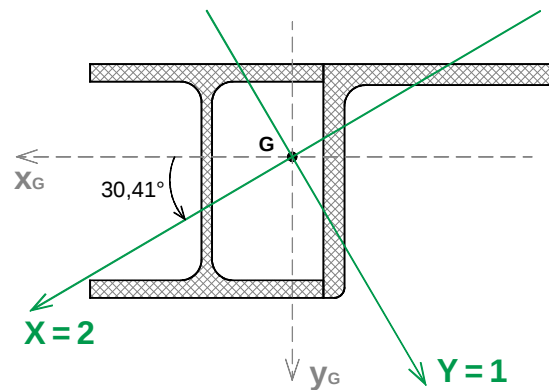
$$I_1 = \frac{9005,78 + 13525,17}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(9005,78 - 13525,17)^2 + 4 \times 4046,51^2} = 15900,2 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{I_X + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4 I_{XY}^2}$$

$$I_2 = \frac{9005,78 + 13525,17}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(9005,78 - 13525,17)^2 + 4 \times 4046,51^2} = 6630,8 \text{ cm}^4$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 I_{XY}}{I_X - I_Y} \right) \Rightarrow \alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 \times 4046,51}{9005,78 - 13525,17} \right) = 30,41^\circ$$

$$I_{Y_G} = 13525,17 \text{ cm}^4 > I_{X_G} = 9005,78 \text{ cm}^4 \Rightarrow I_1 \text{ mais próximo de } I_{Y_G}$$



• **SOLICITAÇÃO EQUIVALENTE COM PONTO DE APLICAÇÃO NO CENTRO DE GRAVIDADE**

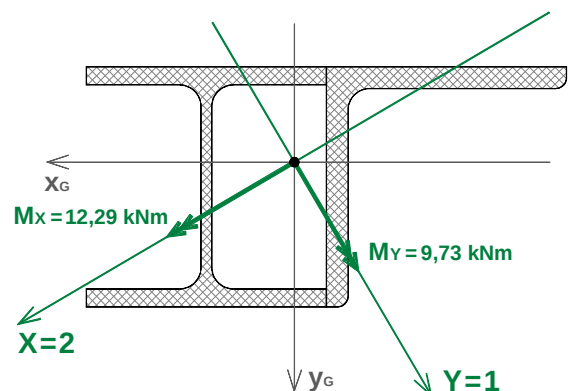
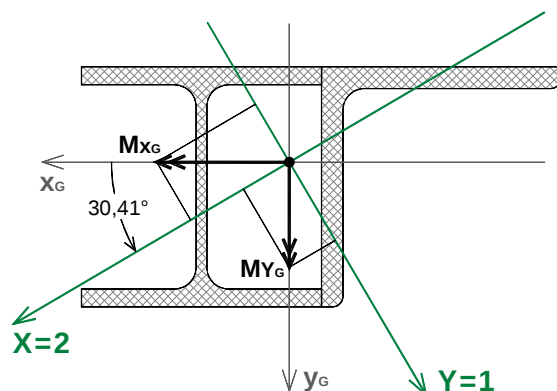
$$N = - (160 + 70 + 100 + 80 + 90) = - 500 \text{ kN}$$

$$M_{X_G} = (160 + 70 + 100) \times 0,07935 - (80 + 90) \times 0,12065 = 5,675 \text{ kNm}$$

$$M_{Y_G} = (160 + 80) \times 0,17323 - (70 + 90) \times 0,02677 - 100 \times 0,22677 = 14,615 \text{ kNm}$$

$$M_X = 5,675 \cos 30,41^\circ + 14,615 \sin 30,41^\circ = 12,29 \text{ kNm}$$

$$M_Y = -5,675 \sin 30,41^\circ + 14,615 \cos 30,41^\circ = 9,73 \text{ kNm}$$



• **EXPRESSÃO DAS TENSÕES**

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_X}{I_X} Y - \frac{M_Y}{I_Y} X$$

$$\sigma = \frac{-500}{147,2 \times 10^{-4}} + \frac{12,29}{6630,8 \times 10^{-8}} Y - \frac{9,73}{15900,2 \times 10^{-8}} X$$

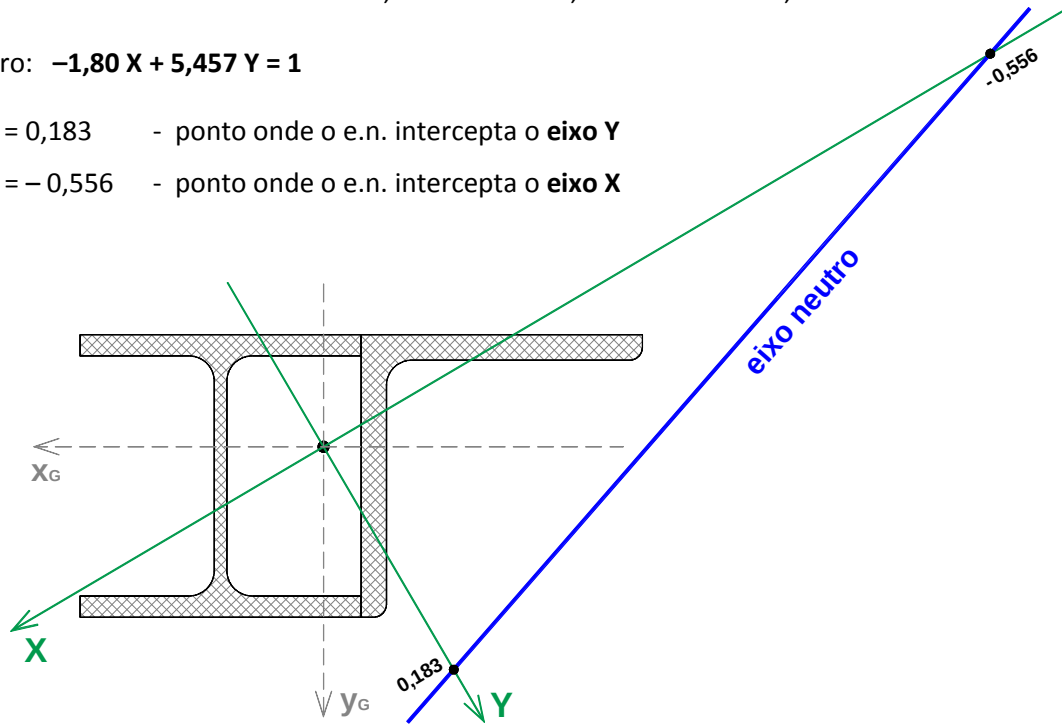
• **EIXO NEUTRO**

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} Y - \frac{M_y}{I_y} X = 0 \Rightarrow \frac{-500}{147,2 \times 10^{-4}} + \frac{12,29}{6630,8 \times 10^{-8}} Y - \frac{9,73}{15900,2 \times 10^{-8}} X = 0$$

Eixo neutro: **$-1,80 X + 5,457 Y = 1$**

$X=0 \Rightarrow Y = 0,183$ - ponto onde o e.n. intercepta o **eixo Y**

$Y=0 \Rightarrow X = -0,556$ - ponto onde o e.n. intercepta o **eixo X**



Alínea b)

Toda a secção vai estar submetida a tensões de compressão, pois o eixo neutro não a intercepta.

A máxima tensão de compressão está a actuar no ponto **A**, pois é o ponto mais distante do eixo neutro.

• **COORDENADAS DO PONTO A NO SISTEMA DE EIXOS (X; Y)**

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30,41^\circ & \sin 30,41^\circ \\ -\sin 30,41^\circ & \cos 30,41^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 17,323 \\ -7,935 \end{bmatrix}$$

$X_A = 10,92 \text{ cm} = 0,1092 \text{ m}$

$Y_A = -15,61 \text{ cm} = -0,1561 \text{ m}$

• **TENSÃO NO PONTO A**

$$\sigma = \frac{-500}{147,2 \times 10^{-4}} + \frac{12,29}{6630,8 \times 10^{-8}} Y - \frac{9,73}{15900,2 \times 10^{-8}} X$$

$$\sigma_A = \frac{-500}{147,2 \times 10^{-4}} + \frac{12,29}{6630,8 \times 10^{-8}} \times (-0,1561) - \frac{9,73}{15900,2 \times 10^{-8}} \times 0,1092 = -69582,5 \text{ kPa}$$

$\sigma_A = -69,6 \text{ MPa}$