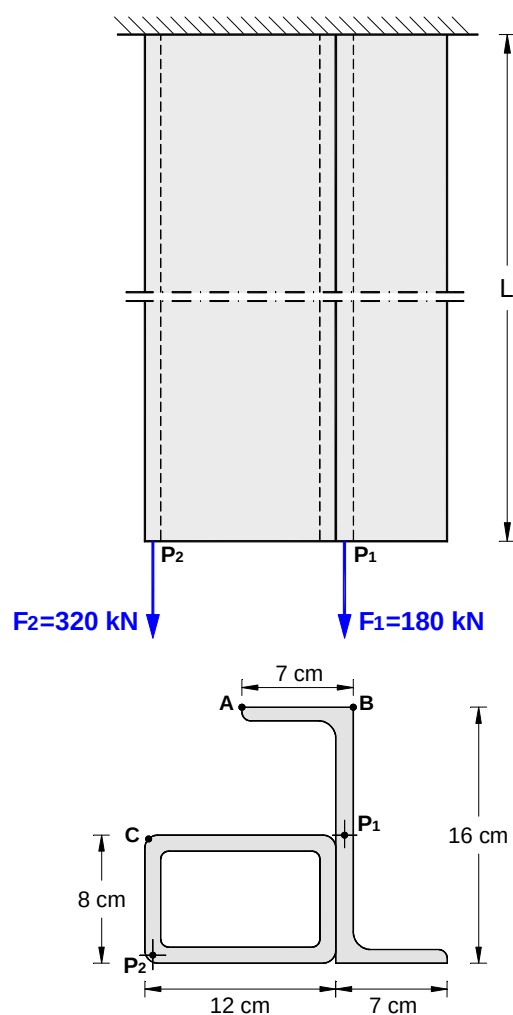


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

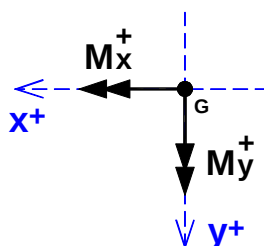
RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

(2014/2015)

FLEXÃO COMPOSTA



RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO CONSIDERANDO A SEGUINTE CONVENÇÃO:



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

ISABEL ALVIM TELES

ENUNCIADO

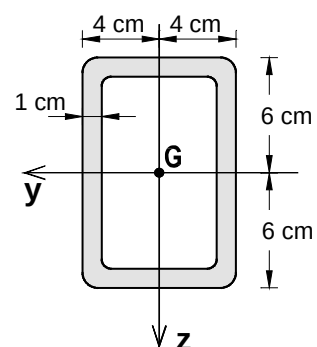
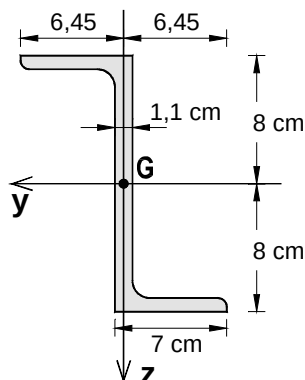
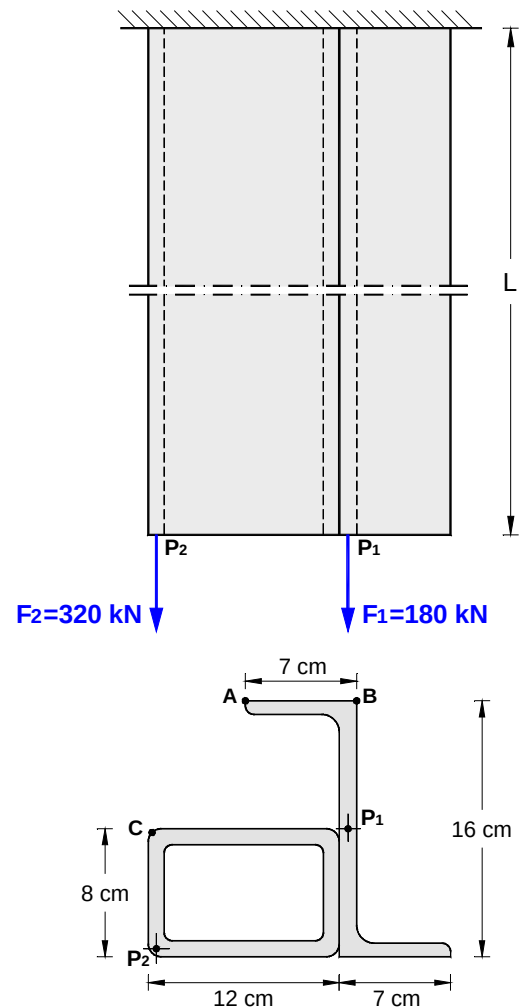
Considere a barra encastrada no tecto cuja secção transversal recta é constituída por um perfil **Z** e um perfil tubular 120x80 (características abaixo indicadas).

Na extremidade inferior da barra e em dois pontos distintos (P_1 e P_2) estão aplicadas duas forças (F_1 e F_2) conforme se indica na figura.

Ponto P_1 – centro de gravidade do perfil **Z**

Ponto P_2 – canto inferior esquerdo do perfil tubular, a meio da espessura;

- Trace o diagrama de tensões normais, indicando as máximas tensões de compressão e de tracção a actuar em cada um dos perfis;
- Verifique se seria possível utilizar para o fabrico de algum dos perfis um material sem capacidade resistente à compressão;
- Considerando um coeficiente de segurança de **1,35**, determine quais deverão ser as tensões resistentes ($\sigma_{Rd, \text{tracção}}$ e $\sigma_{Rd, \text{compressão}}$) do material constituinte de cada um dos perfis, compatíveis com a verificação da estabilidade da estrutura;
- Determine qual o ponto de aplicação de uma única força de **100 kN** para que o eixo neutro passe nos pontos **B** e **C**.



PERFIL Z	Área (cm ²)	I _y (cm ⁴)	I _z (cm ⁴)	I _{yz} (cm ⁴)
	27,5	1060	204	-349

PERFIL TUBULAR 120 x 80	Área (cm ²)	I _y (cm ⁴)	I _z (cm ⁴)
	34,9	609	313

RESOLUÇÃO

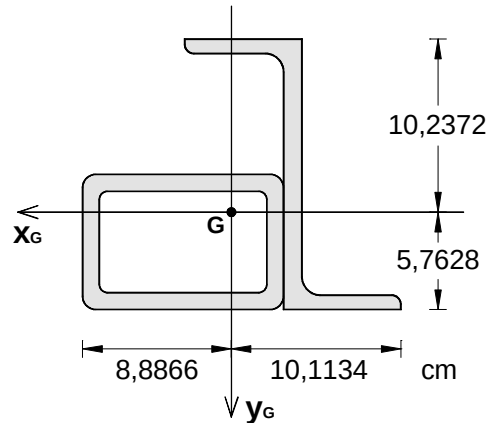
Alínea a)

• Posição do centro de gravidade

$$\text{Área} = 34,9 + 27,5 = 62,4 \text{ cm}^2$$

$$x_G = \frac{34,9 \times 6 + 27,5 \times (12 + \frac{1,1}{2})}{62,4} = 8,8866 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{34,9 \times 4 + 27,5 \times 8}{62,4} = 5,7628 \text{ cm}$$



• DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA I_{x_G}

$$I_{x_G}^{tub} = 313 + 34,9 \times (5,7628 - 4)^2 = 421,45 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_G}^{perf.Z} = 1060 + 27,5 \times (8 - 5,7628)^2 = 1197,64 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_G} = I_{x_G}^{tub} + I_{x_G}^{perf.Z} = 1619,09 \text{ cm}^4$$

• DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA I_{y_G}

$$I_{y_G}^{tub} = 609 + 34,9 \times (8,8866 - 6)^2 = 899,80 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_G}^{perf.Z} = 204 + 27,5 \times (10,1134 - 6,45)^2 = 573,06 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_G} = I_{y_G}^{tub} + I_{y_G}^{perf.Z} = 1472,86 \text{ cm}^4$$

• DETERMINAÇÃO DO PRODUTO DE INÉRCIA $I_{x_G y_G}$

$$I_{x_G y_G}^{tub} = 0 + 34,9 \times 2,8866 \times 1,7628 = 177,59 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_G y_G}^{perf.Z} = -349 + 27,5 \times (-3,6634) \times (-2,2372) = -123,62 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_G y_G} = I_{x_G y_G}^{tub} + I_{x_G y_G}^{perf.Z} = 53,97 \text{ cm}^4$$

• Eixos e momentos principais centrais de inércia

$$I_1 = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4 I_{XY}^2}$$

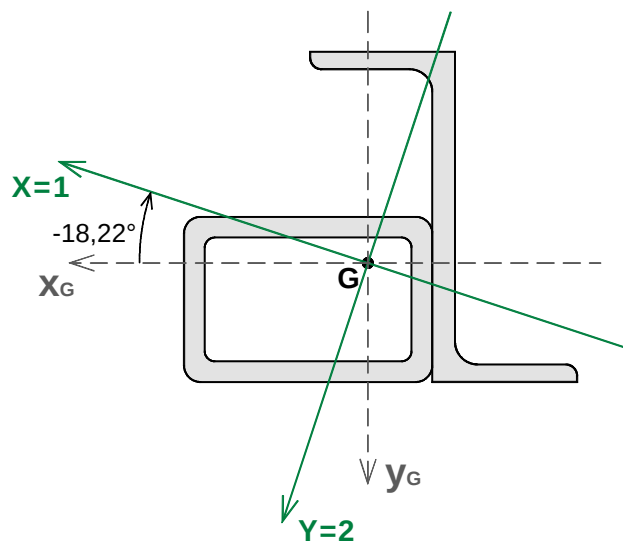
$$I_1 = \frac{1619,09 + 1472,86}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(1619,09 - 1472,86)^2 + 4 \times 53,97^2} = 1636,85 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{I_X + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4 I_{XY}^2}$$

$$I_2 = \frac{1619,09 + 1472,86}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(1619,09 - 1472,86)^2 + 4 \times 53,97^2} = 1455,10 \text{ cm}^4$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 I_{XY}}{I_X - I_Y} \right) \Rightarrow \alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 \times 53,97}{1619,09 - 1472,86} \right) = -18,22^\circ$$

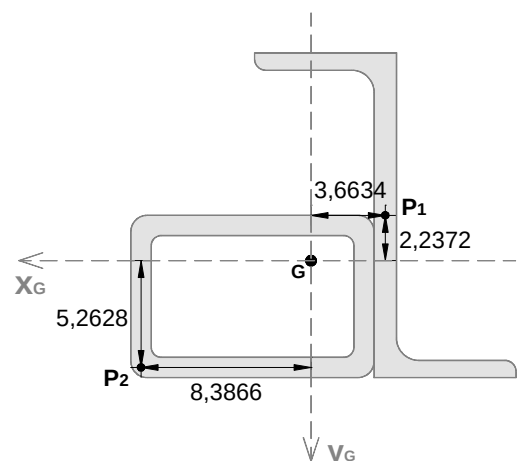
$$I_{X_G} = 1619,09 \text{ cm}^4 > I_{Y_G} = 1472,86 \text{ cm}^4 \Rightarrow I_1 \text{ mais próximo de } I_{X_G}$$



• Solicitação equivalente com ponto de aplicação no centro de gravidade

$$\text{Perfil Z} \begin{cases} N = 180 \text{ kN} \\ M_{X_G} = -180 \times 0,022372 = -4,027 \text{ kNm} \\ M_{Y_G} = 180 \times 0,036634 = 6,594 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\text{Perfil tubular} \begin{cases} N = 320 \text{ kN} \\ M_{X_G} = 320 \times 0,052628 = 16,841 \text{ kNm} \\ M_{Y_G} = -320 \times 0,083866 = -26,837 \text{ kNm} \end{cases}$$

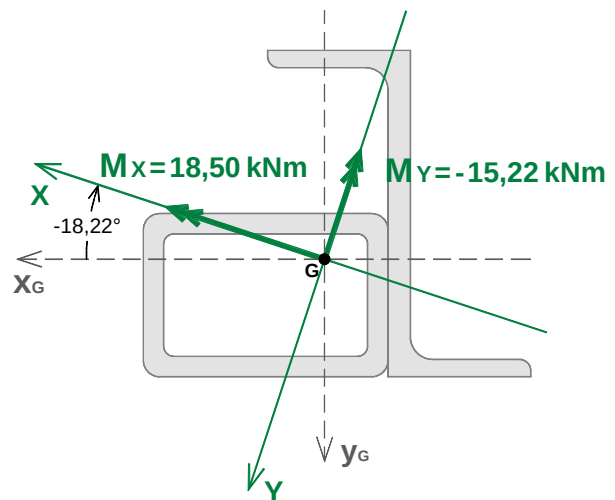
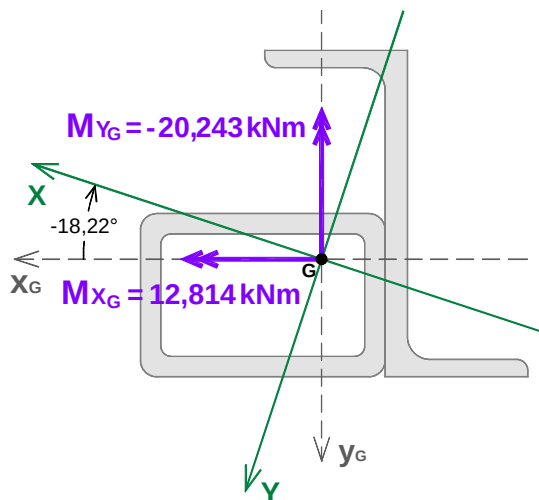


Solicitação resultante – eixos ($x_G; y_G$)

$$\begin{cases} N = 180 + 320 = 500 \text{ kN} \\ M_{x_G} = -4,027 + 16,841 = 12,814 \text{ kNm} \\ M_{y_G} = 6,594 - 26,837 = -20,243 \text{ kNm} \end{cases}$$

Solicitação – EPCI ($X; Y$)

$$\begin{cases} N = 500 \text{ kN} \\ M_X = 12,814 \cos 18,22^\circ + 20,243 \sin 18,22^\circ = 18,50 \text{ kNm} \\ M_Y = 12,814 \sin 18,22^\circ - 20,243 \cos 18,22^\circ = -15,22 \text{ kNm} \end{cases}$$



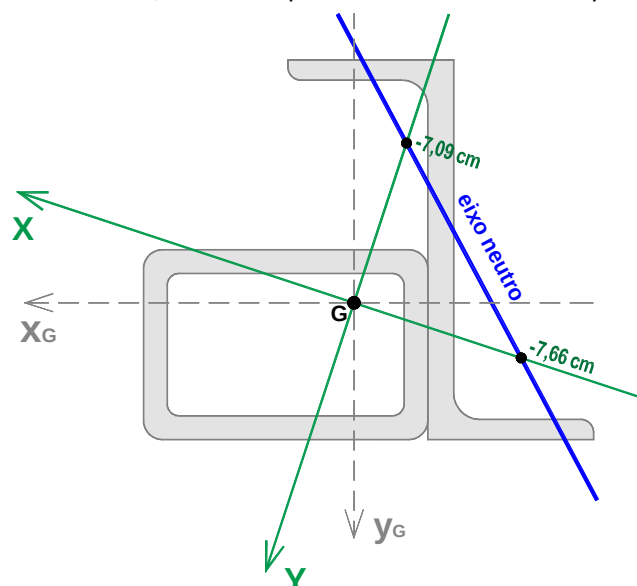
• Eixo neutro

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_X}{I_X} Y - \frac{M_Y}{I_Y} X = 0 \Rightarrow \frac{500}{62,4 \times 10^{-4}} + \frac{18,50}{1636,85 \times 10^{-8}} Y - \frac{-15,22}{1455,10 \times 10^{-8}} X = 0$$

Eixo neutro: $-13,05 X - 14,11 Y = 1$

$X = 0 \Rightarrow Y = -0,0709 \text{ m} = -7,09 \text{ cm}$ - ponto onde o e.n. intercepta o **eixo Y**

$Y = 0 \Rightarrow X = -0,0766 \text{ m} = -7,66 \text{ cm}$ - ponto onde o e.n. intercepta o **eixo X**



• Expressão das tensões

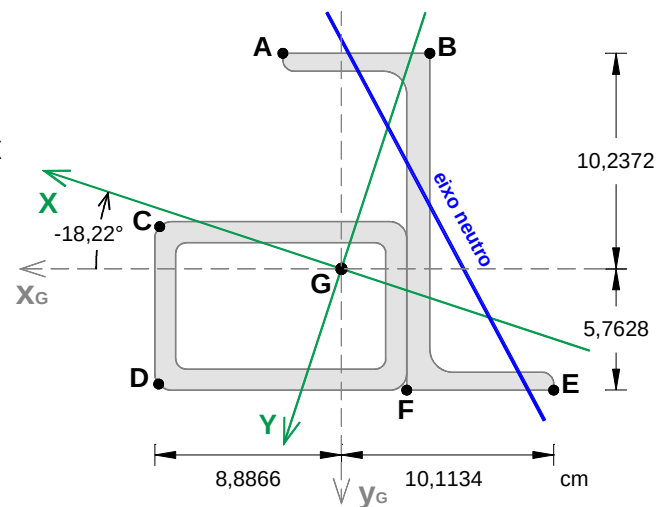
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

$$\sigma = \frac{500}{62,4 \times 10^{-4}} + \frac{18,50}{1636,85 \times 10^{-8}} y - \frac{-15,22}{1455,10 \times 10^{-8}} x$$

As máximas tensões actuam nos pontos mais distantes do eixo neutro.

Perfil Z: máximas tensões nos pontos B e E.

Perfil tubular: máxima tensão no ponto D.



• Coordenadas dos pontos B, D e E no sistema de eixos (X; Y)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18,22^\circ) & \sin(-18,22^\circ) \\ -\sin(-18,22^\circ) & \cos(-18,22^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18,22^\circ) & \sin(-18,22^\circ) \\ -\sin(-18,22^\circ) & \cos(-18,22^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4,2134 \\ -10,2372 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_B = -0,801 \text{ cm} = -0,00801 \text{ m} \\ Y_B = -11,041 \text{ cm} = -0,11041 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18,22^\circ) & \sin(-18,22^\circ) \\ -\sin(-18,22^\circ) & \cos(-18,22^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8,8866 \\ 5,7628 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_D = 6,639 \text{ cm} = 0,06639 \text{ m} \\ Y_D = 8,252 \text{ cm} = 0,08252 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X_F \\ Y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18,22^\circ) & \sin(-18,22^\circ) \\ -\sin(-18,22^\circ) & \cos(-18,22^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3,1134 \\ 5,7628 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_F = -4,759 \text{ cm} = -0,04759 \text{ m} \\ Y_F = 4,500 \text{ cm} = 0,04500 \text{ m} \end{cases}$$

$$G - \text{Centro de gravidade} \Rightarrow \begin{cases} X_G = 0 \text{ m} \\ Y_G = 0 \text{ m} \end{cases}$$

• Tensão no ponto B

$$\sigma_B = \frac{500}{62,4 \times 10^{-4}} + \frac{18,50}{1636,85 \times 10^{-8}} \times (-0,11041) + \frac{15,22}{1455,10 \times 10^{-8}} \times (-0,00801) = -53037,6 \text{ kPa}$$

$$\sigma_B = -53,0 \text{ MPa (compressão)}$$

• Tensão no ponto D

$$\sigma_D = \frac{500}{62,4 \times 10^{-4}} + \frac{18,50}{1636,85 \times 10^{-8}} \times 0,08252 + \frac{15,22}{1455,10 \times 10^{-8}} \times 0,06639 = 242836,3 \text{ kPa}$$

$$\sigma_D = 242,8 \text{ MPa (tracção)}$$

• **Tensão no ponto F**

$$\sigma_F = \frac{500}{62,4 \times 10^{-4}} + \frac{18,50}{1636,85 \times 10^{-8}} \times 0,04500 + \frac{15,22}{1455,10 \times 10^{-8}} \times (-0,04759) = 81210,1 \text{ kPa}$$

$$\sigma_F = 81,2 \text{ MPa (tracção)}$$

• **Tensão no ponto G (centro de gravidade)**

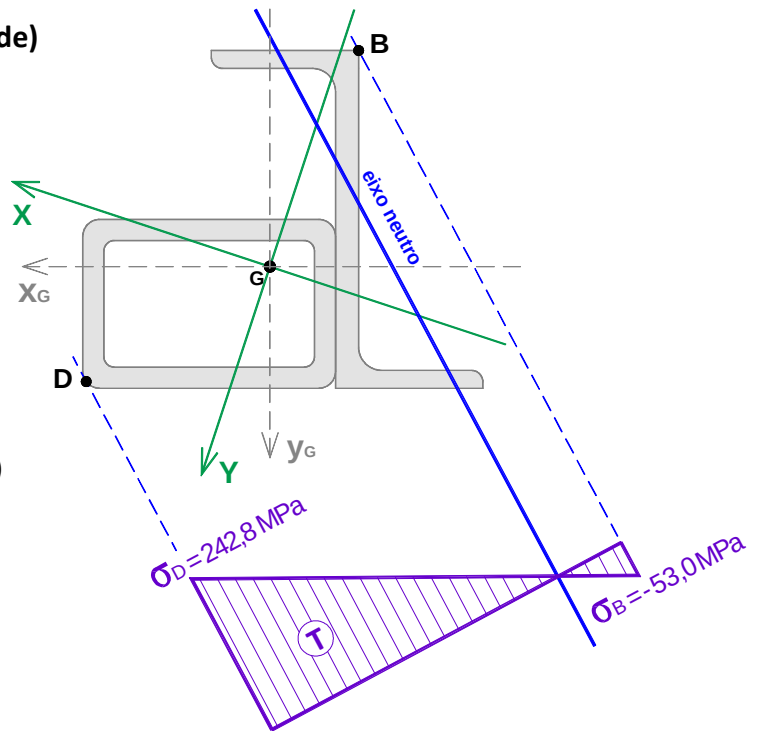
$$\sigma_G = \frac{500}{62,4 \times 10^{-4}} = 80128,2 \text{ kPa}$$

$$\sigma_G = 80,1 \text{ MPa (tracção)}$$

• **Tensões máximas**

Perfil Z: $\begin{cases} \sigma_B = -53,0 \text{ MPa (compressão)} \\ \sigma_F = 81,2 \text{ MPa (tracção)} \end{cases}$

Perfil tubular: $\sigma_D = 242,8 \text{ MPa (tracção)}$



Alínea b)

Como o perfil tubular só está sujeito a tracções (ver diagrama de tensões), no seu fabrico poderá ser utilizado um material sem capacidade resistente à compressão.

Alínea c)

• **Perfil Z**

$$\sigma_{k,B} = 53,0 \text{ MPa (compressão)} \quad - \text{ Tensão característica (não majorada)}$$

$$\sigma_{Ed,B} = 1,35 \times \sigma_{k,B} = 71,6 \text{ MPa (compressão)} \quad - \text{ Tensão de cálculo (majorada)}$$

$$\sigma_{Ed,máx}^{compressão} \leq \sigma_{Rd,compressão} \Rightarrow \sigma_{Rd,compressão} \geq 71,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{k,F} = 81,2 \text{ MPa (tracção)} \quad - \text{ Tensão característica (não majorada)}$$

$$\sigma_{Ed,F} = 1,35 \times \sigma_{k,B} = 109,6 \text{ MPa (tracção)} \quad - \text{ Tensão de cálculo (majorada)}$$

$$\sigma_{Ed,máx}^{tracção} \leq \sigma_{Rd,tracção} \Rightarrow \sigma_{Rd,tracção} \geq 109,6 \text{ MPa}$$

• **Perfil tubular**

$$\sigma_{k,D} = 242,8 \text{ MPa (tracção)} \quad - \text{ Tensão característica (não majorada)}$$

$$\sigma_{Ed,F} = 1,35 \times \sigma_{k,B} = 327,8 \text{ MPa (tracção)} \quad - \text{ Tensão de cálculo (majorada)}$$

$$\sigma_{Ed,máx}^{tracção} \leq \sigma_{Rd,tracção} \Rightarrow \sigma_{Rd,tracção} \geq 327,8 \text{ MPa}$$

Alínea d)

• **Coordenadas dos pontos B e C no sistema de eixos (X; Y)**

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18,22^\circ) & \sin(-18,22^\circ) \\ -\sin(-18,22^\circ) & \cos(-18,22^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4,2134 \\ -10,2372 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_B = -0,801 \text{ cm} = -0,00801 \text{ m} \\ Y_B = -11,041 \text{ cm} = -0,11041 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18,22^\circ) & \sin(-18,22^\circ) \\ -\sin(-18,22^\circ) & \cos(-18,22^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8,8866 \\ -2,2372 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_D = 9,141 \text{ cm} = 0,09141 \text{ m} \\ Y_D = 0,654 \text{ cm} = 0,00654 \text{ m} \end{cases}$$

• **Eixo neutro a passar em B e C**

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_X}{I_X} Y - \frac{M_Y}{I_Y} X = 0$$

Como não é referido se a força de 100 kN é de compressão ou de tracção, vamos analisar os dois casos separadamente.

Força de 100 kN de tracção $\Rightarrow N = 100 \text{ kN}$

$$\text{eixo neutro: } \frac{100}{62,4 \times 10^{-4}} + \frac{M_X}{1636,85 \times 10^{-8}} Y - \frac{M_Y}{1455,10 \times 10^{-8}} X = 0$$

$$\begin{cases} \text{Ponto } \underline{B} \left\{ \frac{100}{62,4 \times 10^{-4}} + \frac{M_X}{1636,85 \times 10^{-8}} \times (-0,11041) - \frac{M_Y}{1455,10 \times 10^{-8}} \times (-0,00801) = 0 \right. \\ \text{Ponto } \underline{C} \left\{ \frac{100}{62,4 \times 10^{-4}} + \frac{M_X}{1636,85 \times 10^{-8}} \times 0,00654 - \frac{M_Y}{1455,10 \times 10^{-8}} \times 0,09141 = 0 \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_X = 2,60 \text{ kNm} \\ M_Y = 2,72 \text{ kNm} \end{cases}$$

Resultante $R = 100 \text{ kN (tracção)}$

$$\text{Ponto de aplicação } \underline{P} \text{ da resultante - sist. eixos (X; Y)} \begin{cases} X_P = -\frac{M_Y}{N} = -\frac{2,72}{100} = -0,0272 \text{ m} = -2,72 \text{ cm} \\ Y_P = \frac{M_X}{N} = \frac{2,60}{100} = 0,0260 \text{ m} = 2,60 \text{ cm} \end{cases}$$

Força de 100 kN de compressão $\Rightarrow N = -100$ kN

$$\text{eixo neutro: } \frac{-100}{62,4 \times 10^{-4}} + \frac{M_x}{1636,85 \times 10^{-8}} Y - \frac{M_y}{1455,10 \times 10^{-8}} X = 0$$

$$\begin{cases} \text{Ponto B} \left\{ \begin{aligned} \frac{-100}{62,4 \times 10^{-4}} + \frac{M_x}{1636,85 \times 10^{-8}} \times (-0,11041) - \frac{M_y}{1455,10 \times 10^{-8}} \times (-0,00801) &= 0 \\ \text{Ponto C} \left\{ \begin{aligned} \frac{-100}{62,4 \times 10^{-4}} + \frac{M_x}{1636,85 \times 10^{-8}} \times 0,00654 - \frac{M_y}{1455,10 \times 10^{-8}} \times 0,09141 &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \Rightarrow \begin{cases} M_x = -2,60 \text{ kNm} \\ M_y = -2,72 \text{ kNm} \end{cases} \end{cases}$$

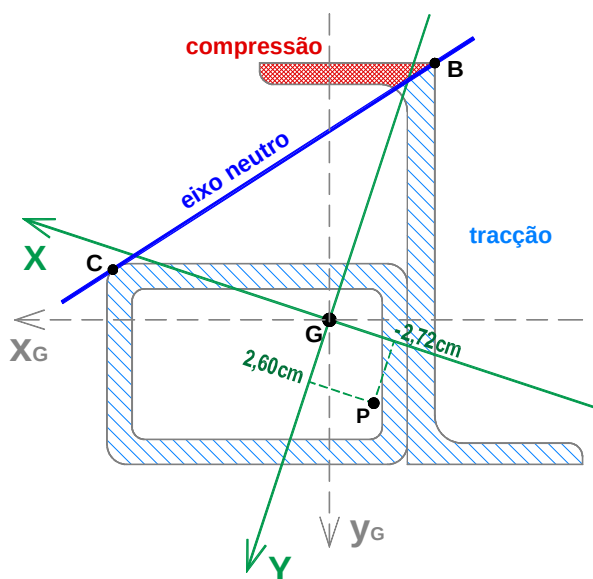
Resultante $R = -100$ kN (compressão)

Ponto de aplicação P da resultante – sist. eixos $(X; Y)$

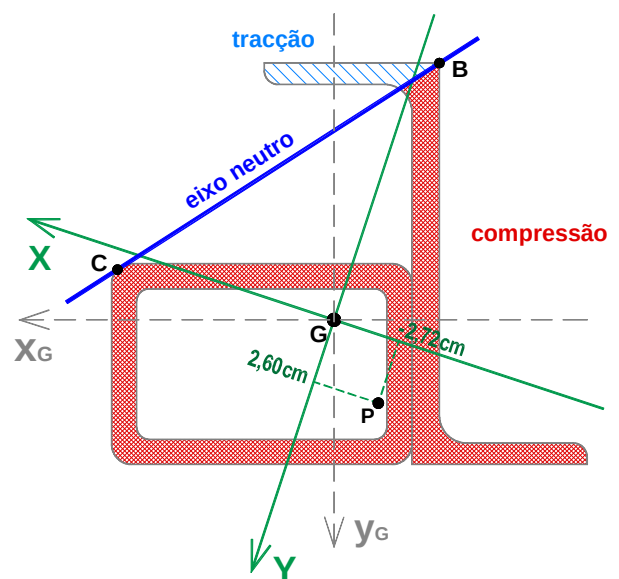
$$\begin{cases} X_p = -\frac{M_y}{N} = -\frac{-2,72}{-100} = -0,0272 \text{ m} = -2,72 \text{ cm} \\ Y_p = \frac{M_x}{N} = \frac{-2,60}{-100} = 0,0260 \text{ m} = 2,60 \text{ cm} \end{cases}$$

Conclusão: É indiferente se a resultante é de tracção ou de compressão: o ponto de aplicação é o mesmo nos dois casos.

O posicionamento das zonas comprimidas e traccionadas delimitadas pelo eixo neutro depende do tipo de força (ver figura).



Resultante: 100 kN (tracção)



Resultante: -100 kN (compressão)