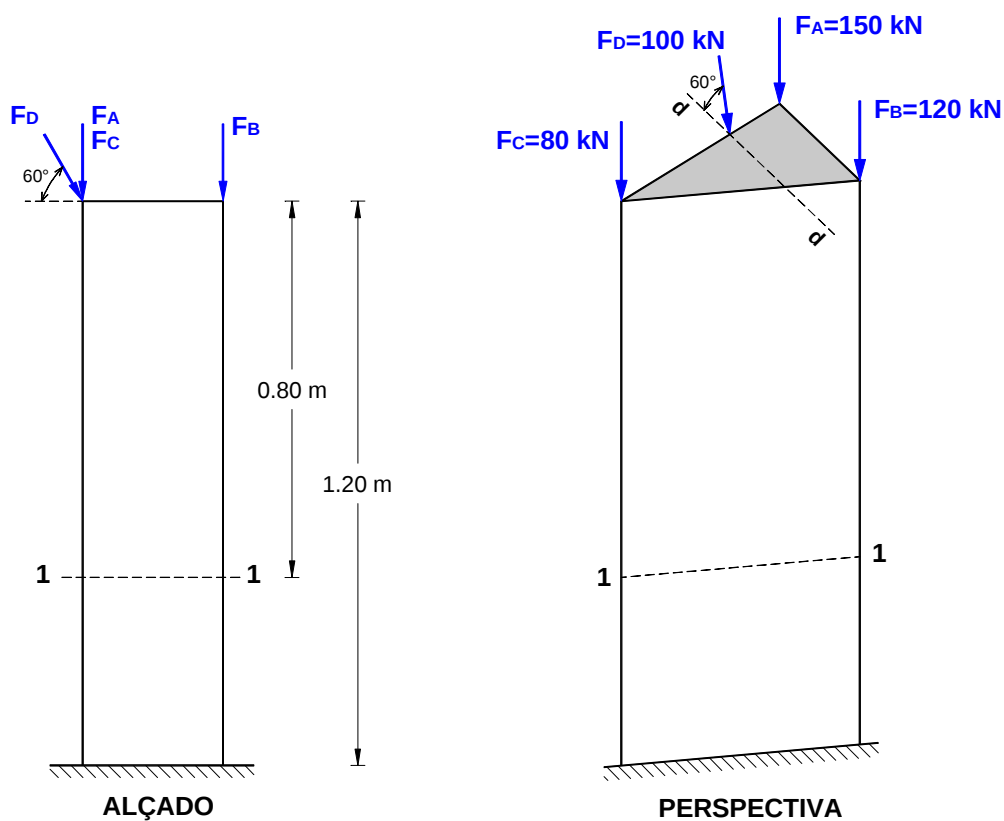


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

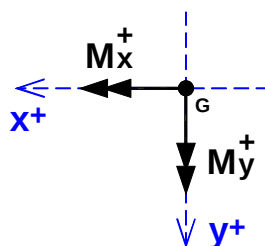
RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

(2014/2015)

FLEXÃO COMPOSTA EIXO NEUTRO, TENSÕES



RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO CONSIDERANDO A SEGUINTE CONVENÇÃO:



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

ISABEL ALVIM TELES

ENUNCIADO

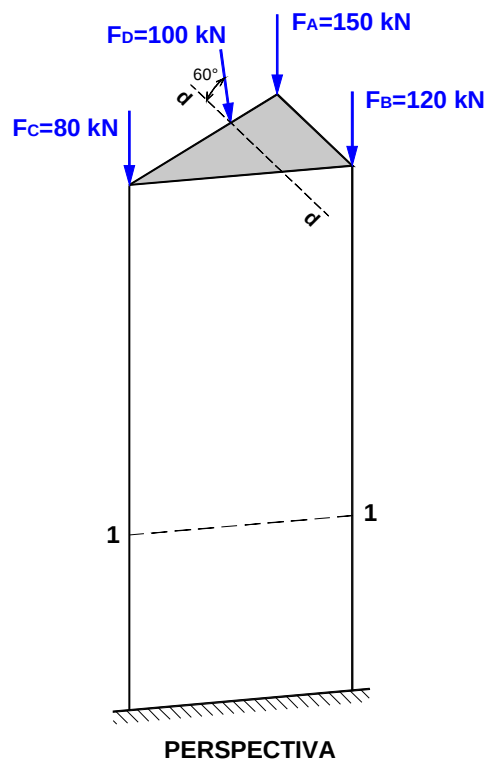
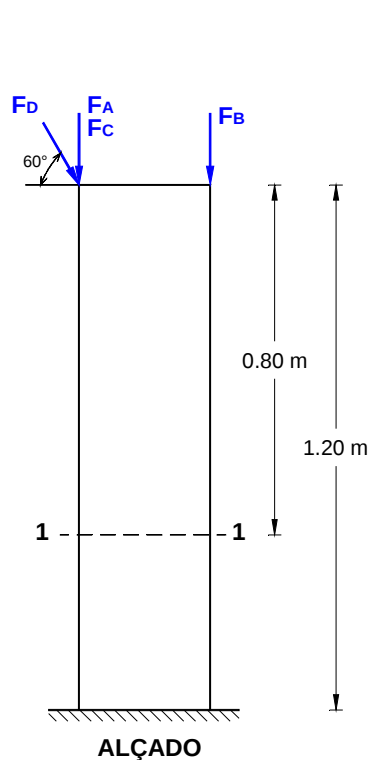
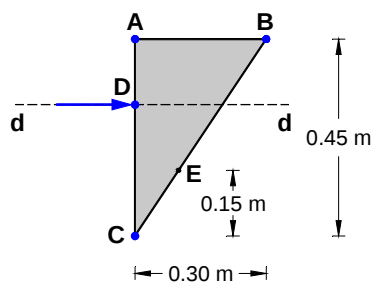
Considere o pilar de 1,20 m de altura representado na figura e sujeito às seguintes acções:

F_A , F_B , F_C – forças verticais aplicadas nos pontos respectivos.

F_D – força aplicada segundo o eixo baricêntrico **d-d** e com uma inclinação de 60° em relação à horizontal (ver figura).

Pretende-se estudar a secção transversal recta **STR 1-1**, localizada a 0,80 m do topo do pilar.

- Determine os esforços a actuar na **STR 1-1** do pilar;
- Determine quais deverão ser as tensões resistentes ($\sigma_{Rd, \text{tracção}}$ e $\sigma_{Rd, \text{compressão}}$) do material constituinte do pilar compatíveis com a verificação da estabilidade da estrutura na **STR 1-1**;
- Defina o eixo neutro e desenhe-o na figura;
- Determine qual deve ser o ponto de aplicação da resultante do sistemas de forças para que o eixo neutro passe nos pontos **A** e **E**.



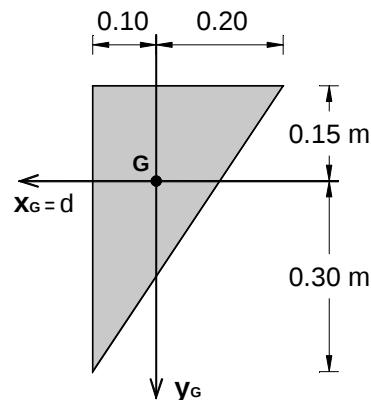
RESOLUÇÃO

Alínea a)

- Área da secção transversal

$$A = \frac{0,30 \times 0,45}{2} = 0,0675 \text{ m}^2$$

- Posição do centro de gravidade (ver figura)



- Determinação dos momentos e produto de inércia em relação aos eixos (x_G ; y_G)

$$I_{x_G} = \frac{0,30 \times 0,45^3}{36} = 759,375 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{y_G} = \frac{0,45 \times 0,30^3}{36} = 337,5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{x_G y_G} = \frac{0,30^2 \times 0,45^2}{72} = 253,125 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

- Eixos e momentos principais centrais de inércia

$$I_1 = \frac{I_{x_G} + I_{y_G}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_G} - I_{y_G})^2 + 4 I_{x_G y_G}^2}$$

$$I_1 = \frac{759,375 \times 10^{-6} + 337,5 \times 10^{-6}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(759,375 \times 10^{-6} - 337,5 \times 10^{-6})^2 + 4 \times (253,125 \times 10^{-6})^2}$$

$$I_1 = 877,93 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_2 = \frac{I_{x_G} + I_{y_G}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_G} - I_{y_G})^2 + 4 I_{x_G y_G}^2}$$

$$I_2 = \frac{759,375 \times 10^{-6} + 337,5 \times 10^{-6}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(759,375 \times 10^{-6} - 337,5 \times 10^{-6})^2 + 4 \times (253,125 \times 10^{-6})^2}$$

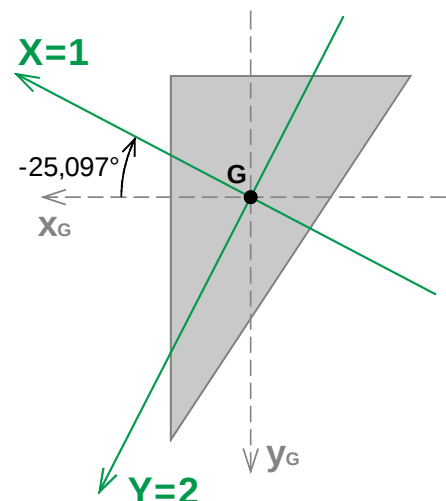
$$I_2 = 218,94 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 I_{x_G y_G}}{I_{x_G} - I_{y_G}} \right)$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 \times 253,125 \times 10^{-6}}{759,375 \times 10^{-6} - 337,5 \times 10^{-6}} \right) = -25,097^\circ$$

$$I_{x_G} > I_{y_G} \Rightarrow I_1 \text{ mais próximo de } I_{x_G}$$

$$\begin{cases} I_x = I_1 = 877,93 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \\ I_y = I_2 = 218,94 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \end{cases}$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS (2014-2015)

FLEXÃO COMPOSTA

ISABEL ALVIM TELES

• **Topo do pilar**

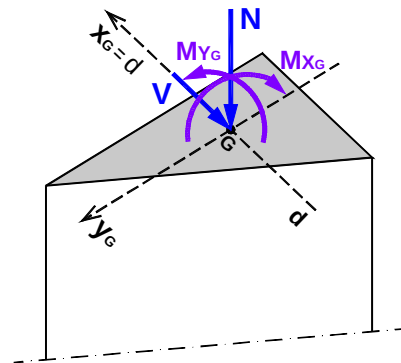
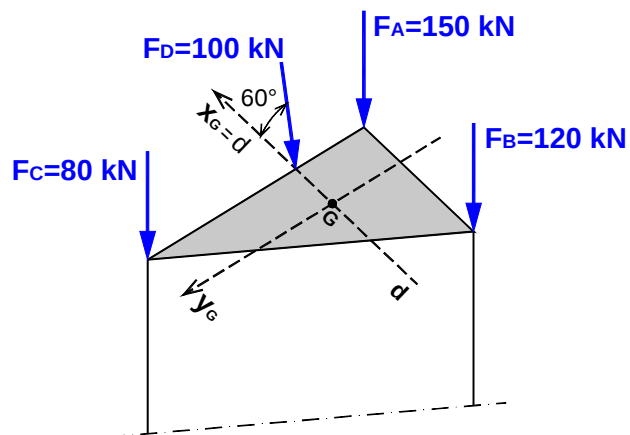
Solicitação equivalente com ponto de aplicação no centro de gravidade

$$N = -150 - 120 - 80 - 100 \sin 60^\circ = -436,60 \text{ kN}$$

$$V = 100 \cos 60^\circ = 50 \text{ kN}$$

$$M_{X_G} = (150 + 120) \times 0,15 - 80 \times 0,30 = 16,50 \text{ kNm}$$

$$M_{Y_G} = -120 \times 0,20 + (150 + 80 + 100 \sin 60^\circ) \times 0,10 = 7,66 \text{ kNm}$$



• **Esforços na secção 1-1**

$$N = -436,60 \text{ kN}$$

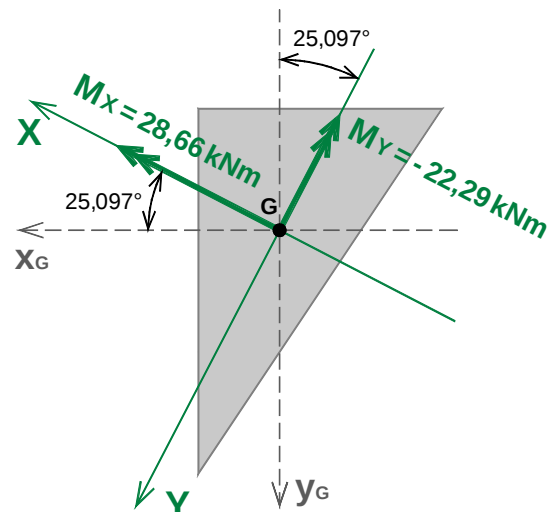
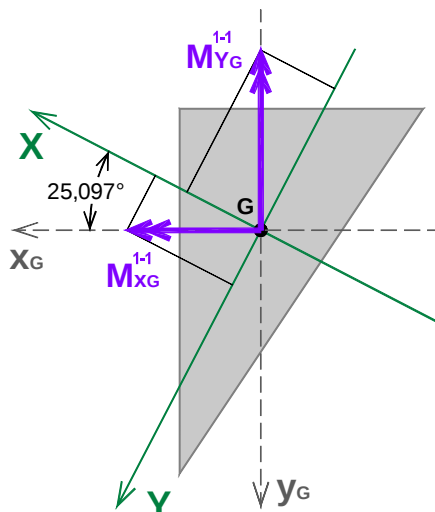
$$V = 50 \text{ kN}$$

$$M_{X_G}^{1-1} = 16,50 \text{ kNm}$$

$$M_{Y_G}^{1-1} = 7,66 - 100 \cos 60^\circ \times 0,80 = 7,66 - 50 \times 0,80 = -32,34 \text{ kNm}$$

$$M_X = 16,5 \cos 25,097^\circ + 32,34 \sin 25,097^\circ = 28,66 \text{ kNm}$$

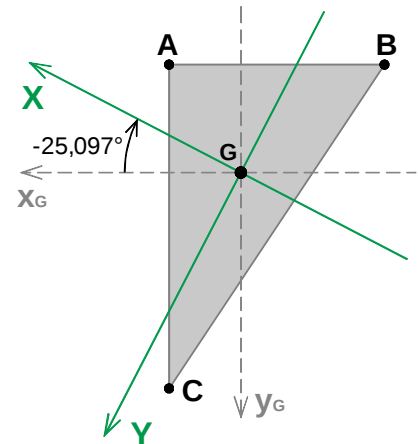
$$M_Y = 16,5 \sin 25,097^\circ - 32,34 \cos 25,097^\circ = -22,29 \text{ kNm}$$



• **Expressão das tensões**

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} Y - \frac{M_y}{I_y} X$$

$$\sigma = \frac{-436,60}{0,0675} + \frac{28,66}{877,93 \times 10^{-6}} Y - \frac{-22,29}{218,94 \times 10^{-6}} X$$



• **Coordenadas dos pontos A, B e C no sistema de eixos (X; Y)**

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-25,097^\circ) & \sin(-25,097^\circ) \\ -\sin(-25,097^\circ) & \cos(-25,097^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-25,097^\circ) & \sin(-25,097^\circ) \\ -\sin(-25,097^\circ) & \cos(-25,097^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,10 \\ -0,15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 0,154 \text{ m} \\ Y_A = -0,0934 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-25,097^\circ) & \sin(-25,097^\circ) \\ -\sin(-25,097^\circ) & \cos(-25,097^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,20 \\ -0,15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_B = -0,117 \text{ m} \\ Y_B = -0,221 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-25,097^\circ) & \sin(-25,097^\circ) \\ -\sin(-25,097^\circ) & \cos(-25,097^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,30 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_C = -0,0367 \text{ m} \\ Y_C = 0,314 \text{ m} \end{cases}$$

• **Tensão no ponto A**

$$\sigma_A = \frac{-436,60}{0,0675} + \frac{28,66}{877,93 \times 10^{-6}} \times (-0,0934) + \frac{22,29}{218,94 \times 10^{-6}} \times 0,154 = 6161 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{k,A} = 6,2 \text{ MPa (tração)} - \text{Tensão característica (não majorada)}$$

$$\sigma_{Ed,A} = 1,5 \times \sigma_{k,A} = 9,2 \text{ MPa (tração)} - \text{Tensão de cálculo (majorada)}$$

• **Tensão no ponto B**

$$\sigma_B = \frac{-436,60}{0,0675} + \frac{28,66}{877,93 \times 10^{-6}} \times (-0,221) + \frac{22,29}{218,94 \times 10^{-6}} \times (-0,117) = -25594 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{k,B} = -25,6 \text{ MPa (compressão)} - \text{Tensão característica (não majorada)}$$

$$\sigma_{Ed,B} = 1,5 \times \sigma_{k,B} = -38,4 \text{ MPa (compressão)} - \text{Tensão de cálculo (majorada)}$$

• **Tensão no ponto C**

$$\sigma_C = \frac{-436,60}{0,0675} + \frac{28,66}{877,93 \times 10^{-6}} \times 0,314 + \frac{22,29}{218,94 \times 10^{-6}} \times (-0,0367) = 46 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{k,C} = 0,046 \text{ MPa (tração)} - \text{Tensão característica (não majorada)}$$

$$\sigma_{Ed,C} = 1,5 \times \sigma_{k,C} = 0,07 \text{ MPa (tração)} - \text{Tensão de cálculo (majorada)}$$

Alínea b)

• Dimensionamento

$$\begin{cases} \sigma_{\text{Ed,máx}}^{\text{compressão}} \leq \sigma_{\text{Rd,compressão}} \\ \sigma_{\text{Ed,máx}}^{\text{tracção}} \leq \sigma_{\text{Rd,tracção}} \end{cases}$$

Máxima tensão de cálculo à compressão: $\sigma_{\text{Ed,B}} = 38,4 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{\text{Rd,compressão}} \geq 38,4 \text{ MPa}$

Máxima tensão de cálculo à tracção: $\sigma_{\text{Ed,A}} = 9,2 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{\text{Rd,tracção}} \geq 9,2 \text{ MPa}$

Alínea c)

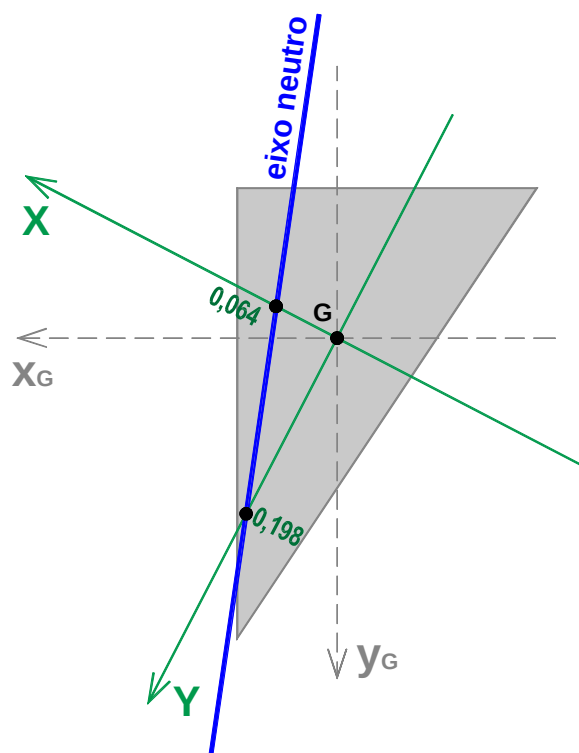
• Eixo neutro

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} Y - \frac{M_y}{I_y} X = 0 \Rightarrow \frac{-436,60}{0,0675} + \frac{28,66}{877,93 \times 10^{-6}} Y - \frac{-22,29}{218,94 \times 10^{-6}} X = 0$$

Eixo neutro: **15,74 X + 5,05 Y = 1**

X = 0 $\Rightarrow$ Y = 0,198 - ponto onde o e.n. intercepta o **eixo Y**

Y = 0 $\Rightarrow$ X = 0,064 - ponto onde o e.n. intercepta o **eixo X**



Alínea d)

- Coordenadas dos pontos **A** e **E** no sistema de eixos **(X; Y)**

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-25,097^\circ) & \sin(-25,097^\circ) \\ -\sin(-25,097^\circ) & \cos(-25,097^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,10 \\ -0,15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 0,1542 \text{ m} \\ Y_A = -0,0934 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-25,097^\circ) & \sin(-25,097^\circ) \\ -\sin(-25,097^\circ) & \cos(-25,097^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0,15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_E = 0,0636 \text{ m} \\ Y_E = 0,1358 \text{ m} \end{cases}$$

- Eixo neutro a passar em **A** e **E**

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_X}{I_X} Y - \frac{M_Y}{I_Y} X = 0 \Rightarrow \frac{-436,60}{0,0675} + \frac{M_X}{877,93 \times 10^{-6}} Y - \frac{M_Y}{218,94 \times 10^{-6}} X = 0$$

$$\begin{cases} \text{Ponto A} & \left\{ \begin{aligned} \frac{-436,60}{0,0675} + \frac{M_X}{877,93 \times 10^{-6}} \times (-0,0934) - \frac{M_Y}{218,94 \times 10^{-6}} \times 0,1542 &= 0 \\ M_X &= 82,45 \text{ kNm} \end{aligned} \right. \\ \text{Ponto E} & \left\{ \begin{aligned} \frac{-436,60}{0,0675} + \frac{M_X}{877,93 \times 10^{-6}} \times 0,1358 - \frac{M_Y}{218,94 \times 10^{-6}} \times (-0,0636) &= 0 \\ M_Y &= -21,64 \text{ kNm} \end{aligned} \right. \end{cases} \Rightarrow$$

Resultante $R = 436,60 \text{ kN} (\downarrow)$

Ponto de aplicação P da resultante - sistema de eixos **(X; Y)**

$$\begin{cases} X_P = -\frac{M_Y}{N} = -\frac{-21,64}{-436,6} = -0,050 \text{ m} \\ Y_P = \frac{M_X}{N} = \frac{82,45}{-436,6} = -0,189 \text{ m} \end{cases}$$

