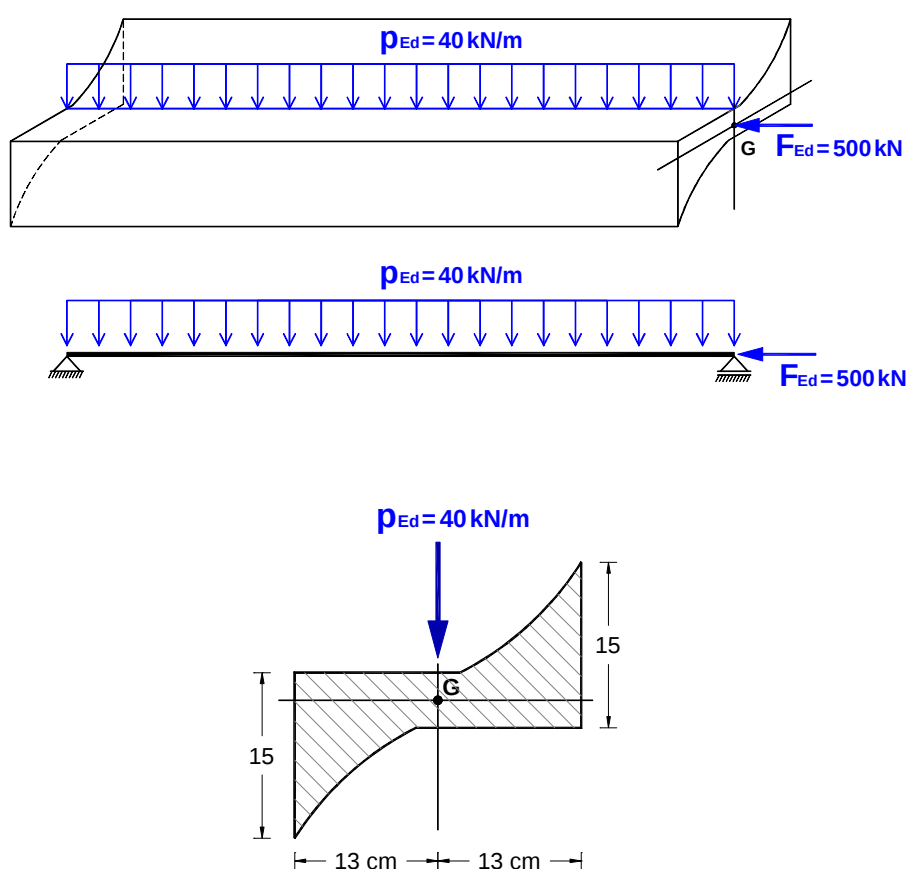


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

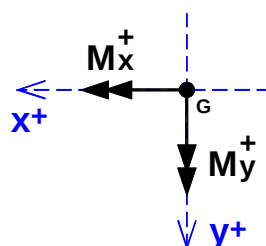
RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

(2014/2015)

FLEXÃO COMPOSTA – EXAME 19/JANEIRO/2014



RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO CONSIDERANDO A SEGUINTE CONVENÇÃO:



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

ISABEL ALVIM TELES

ENUNCIADO

Considere a viga pré-fabricada, simplesmente apoiada com 3 metros de vão, representada na *Figura 1*, cuja secção transversal está representada na *Figura 2*.

As características da secção transversal da viga indicadas na *Figura 3*, foram retiradas do catálogo do fornecedor.

O carregamento da viga é constituído por uma carga uniformemente distribuída $p_{Ed}=40\text{ kN/m}$ (valor majorado e incluindo o peso próprio) e uma força $F_{Ed}=500\text{ kN}$ (valor majorado), sendo o plano de solicitação baricêntrico (ver *Figura 1*).

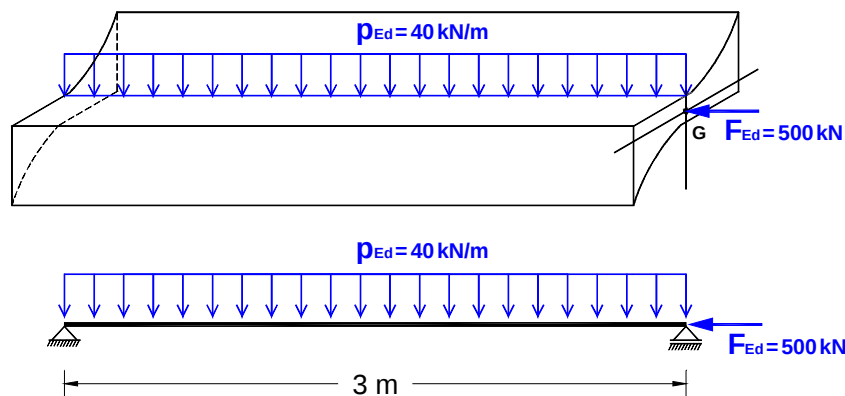
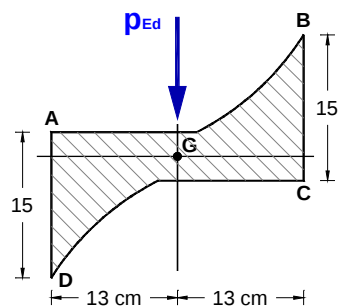


Figura 1



SECÇÃO TRANSVERSAL DA VIGA

Figura 2

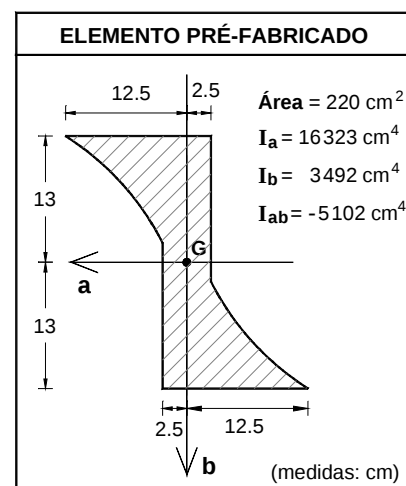


Figura 3

- Para a secção da viga com maiores esforços de flexão, determine os momentos actuates M_x e M_y referentes aos eixos principais centrais de inércia e represente-os graficamente.
- Calcule as tensões normais a actuar nos pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Determine quais deverão ser as tensões resistentes à compressão ($\sigma_{Rd,comp}$) e à tracção ($\sigma_{Rd,trac}$) do material constituinte da viga, compatíveis com a verificação de segurança.

RESOLUÇÃO

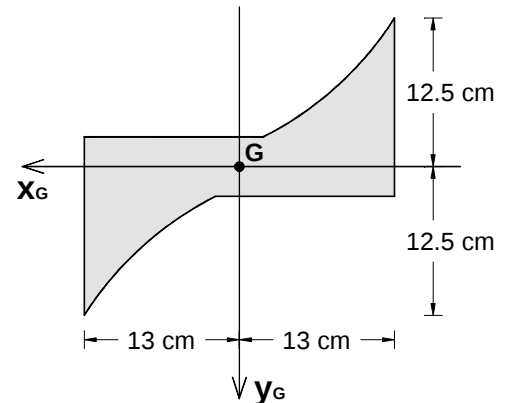
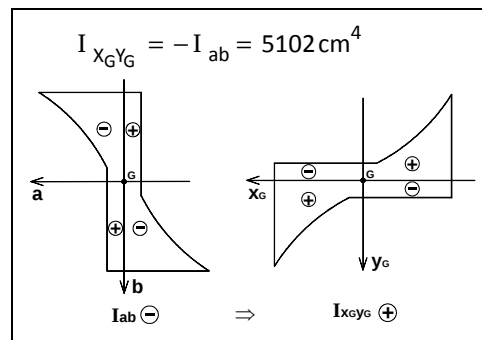
Alínea a)

• GEOMETRIA DE MASSAS

$$\text{Área} = 220 \text{ cm}^2$$

$$I_{X_G} = I_b = 3492 \text{ cm}^4$$

$$I_{Y_G} = I_a = 16323 \text{ cm}^4$$



• Eixos e momentos principais centrais de inércia

$$I_1 = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4 I_{XY}^2}$$

$$I_1 = \frac{3492 + 16323}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(3492 - 16323)^2 + 4 \times 5102^2} = 18104,39 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{I_X + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4 I_{XY}^2}$$

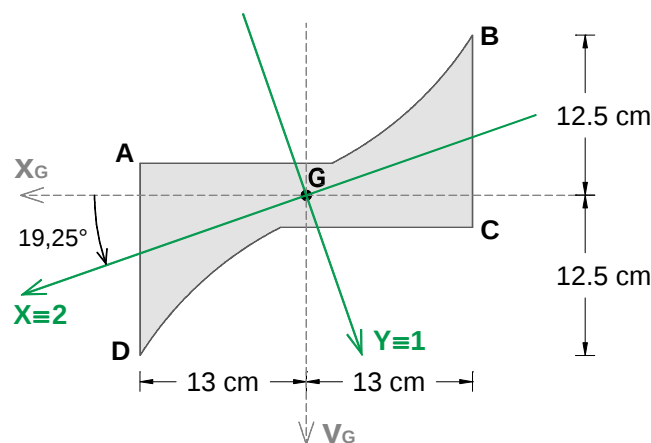
$$I_2 = \frac{3492 + 16323}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(3492 - 16323)^2 + 4 \times 5102^2} = 1710,61 \text{ cm}^4$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 I_{XY}}{I_X - I_Y} \right) \Rightarrow \alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 \times 5104}{3492 - 16323} \right) = 19,25^\circ$$

$$I_{Y_G} = 16323 \text{ cm}^4 > I_{X_G} = 3492 \text{ cm}^4 \Rightarrow I_1 \text{ mais próximo de } I_{Y_G}$$

Eixos principais centrais de inércia (**X**; **Y**)

$$\begin{cases} I_X = I_2 = 1710,61 \times 10^{-8} \text{ m}^4 \\ I_Y = I_1 = 18104,39 \times 10^{-8} \text{ m}^4 \end{cases}$$

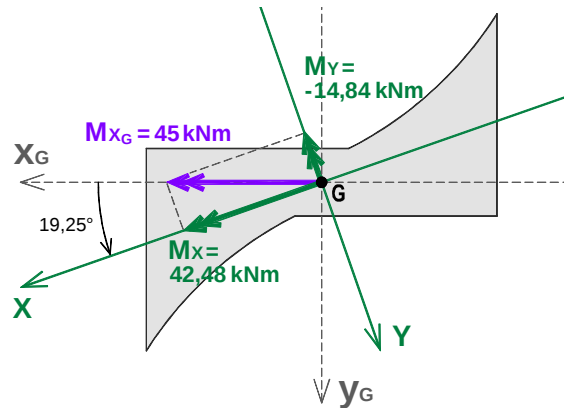


- Secção com maiores esforços de flexão $\Rightarrow$ secção a meio vão

$$M_{x_G} = \frac{p l^2}{8} = \frac{40 \times 3^2}{8} = 45 \text{ kNm}$$

Eixos principais centrais de inércia (**X; Y**)

$$\begin{cases} M_X = 45 \cos 19,25^\circ = 42,48 \text{ kNm} \\ M_Y = -45 \sin 19,25^\circ = -14,84 \text{ kNm} \end{cases}$$



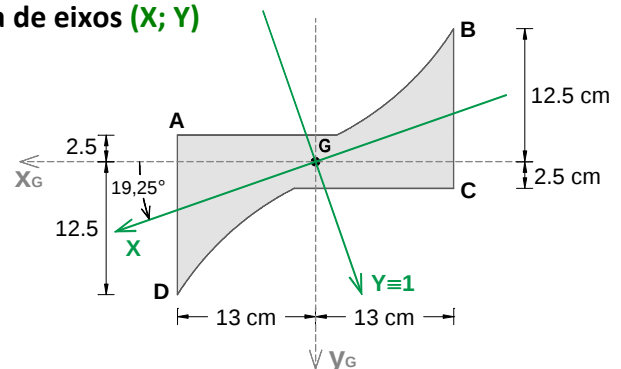
Solicitação (majorada) – **EPCI (X; Y)**:

$$\begin{cases} N = -500 \text{ kN} \\ M_X = 42,48 \text{ kNm} \\ M_Y = -14,84 \text{ kNm} \end{cases}$$

Alínea b)

- Coordenadas dos pontos **A**, **B**, **C** e **D** no sistema de eixos (**X; Y**)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 19,25^\circ & \sin 19,25^\circ \\ -\sin 19,25^\circ & \cos 19,25^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 19,25^\circ & \sin 19,25^\circ \\ -\sin 19,25^\circ & \cos 19,25^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ -2,5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 11,45 \text{ cm} = 0,1145 \text{ m} \\ Y_A = -6,65 \text{ cm} = -0,0665 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 19,25^\circ & \sin 19,25^\circ \\ -\sin 19,25^\circ & \cos 19,25^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -13 \\ -12,5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_B = -16,39 \text{ cm} = -0,1639 \text{ m} \\ Y_B = -7,52 \text{ cm} = -0,0752 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 19,25^\circ & \sin 19,25^\circ \\ -\sin 19,25^\circ & \cos 19,25^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -13 \\ 2,5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_C = -11,45 \text{ cm} = -0,1145 \text{ m} \\ Y_C = 6,65 \text{ cm} = 0,0665 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 19,25^\circ & \sin 19,25^\circ \\ -\sin 19,25^\circ & \cos 19,25^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ 12,5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_D = 16,39 \text{ cm} = 0,1639 \text{ m} \\ Y_D = 7,52 \text{ cm} = 0,0752 \text{ m} \end{cases}$$

• **Expressão das tensões**

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} Y - \frac{M_y}{I_y} X$$

$$\sigma = \frac{-500}{220 \times 10^{-4}} + \frac{42,48}{1710,61 \times 10^{-8}} Y - \frac{-14,84}{18104,39 \times 10^{-8}} X$$

• **Tensão no ponto A**

$$\sigma_A = \frac{-500}{220 \times 10^{-4}} + \frac{42,48}{1710,61 \times 10^{-8}} \times (-0,0665) + \frac{14,84}{18104,39 \times 10^{-8}} \times 0,1145 = -178483 \text{ kPa}$$

$$\sigma_A = -178,5 \text{ MPa (compressão)}$$

• **Tensão no ponto B**

$$\sigma_B = \frac{-500}{220 \times 10^{-4}} + \frac{42,48}{1710,61 \times 10^{-8}} \times (-0,0752) + \frac{14,84}{18104,39 \times 10^{-8}} \times (-0,1639) = -222908 \text{ kPa}$$

$$\sigma_B = -222,9 \text{ MPa (compressão)}$$

• **Tensão no ponto C**

$$\sigma_C = \frac{-500}{220 \times 10^{-4}} + \frac{42,48}{1710,61 \times 10^{-8}} \times 0,0665 + \frac{14,84}{18104,39 \times 10^{-8}} \times (-0,1145) = 133028 \text{ kPa}$$

$$\sigma_C = 133,0 \text{ MPa (tracção)}$$

• **Tensão no ponto D**

$$\sigma_D = \frac{-500}{220 \times 10^{-4}} + \frac{42,48}{1710,61 \times 10^{-8}} \times 0,0752 + \frac{14,84}{18104,39 \times 10^{-8}} \times 0,1639 = 177453 \text{ kPa}$$

$$\sigma_D = 177,5 \text{ MPa (tracção)}$$

• **Compressão**

$$\sigma_{Ed,m\acute{a}x}^{compress\tilde{a}o} = \sigma_{Ed,B} = 222,9 \text{ MPa (compress\~ao)} \quad - \text{ Tens\~ao de c\~alculo (majorada)}$$

$$\sigma_{Ed,m\acute{a}x}^{compress\tilde{a}o} \leq \sigma_{Rd,compress\tilde{a}o} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{Rd,compress\tilde{a}o} \geq 222,9 \text{ MPa}$$

• **Tracção**

$$\sigma_{Ed,m\acute{a}x}^{trac\tilde{c}\tilde{a}o} = \sigma_{Ed,D} = 177,5 \text{ MPa (trac\~c\~ao)} \quad - \text{ Tens\~ao de c\~alculo (majorada)}$$

$$\sigma_{Ed,m\acute{a}x}^{trac\tilde{c}\tilde{a}o} \leq \sigma_{Rd,trac\tilde{c}\tilde{a}o} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{Rd,trac\tilde{c}\tilde{a}o} \geq 177,5 \text{ MPa}$$