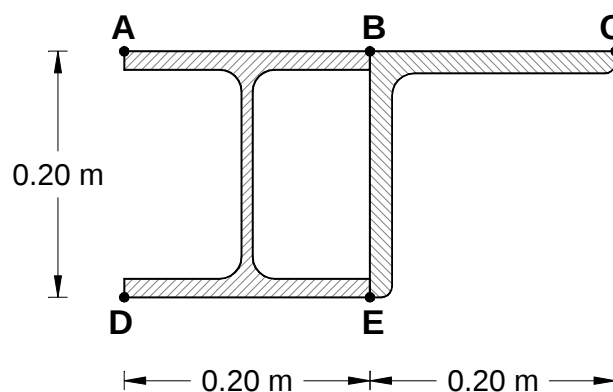


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

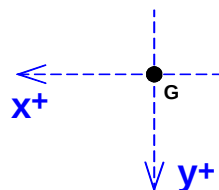
RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

(2014/2015)

NÚCLEO CENTRAL, EIXO NEUTRO



RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO CONSIDERANDO A SEGUINTE CONVENÇÃO:



ISABEL ALVIM TELES

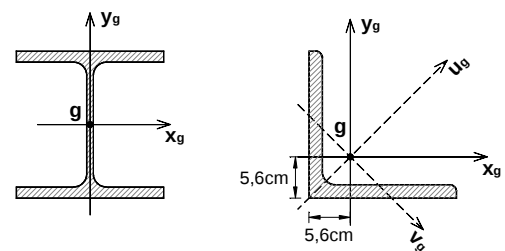
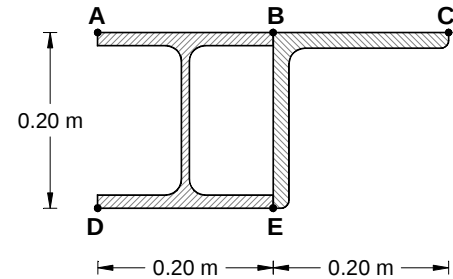
ENUNCIADO

Considere a peça vertical cuja secção transversal é constituída por um perfil HEB200 e uma cantoneira L200x200x18, cujas características se indicam abaixo.

- Determine o núcleo central;
- Sabendo que na secção actua uma única força vertical de tracção, determine o seu ponto de aplicação para que o eixo neutro passe nos pontos C e D.

PERFIL	Área (cm ²)	I _{xg} (cm ⁴)	I _{yg} (cm ⁴)
HEB 200	78,1	5696	2003

PERFIL	Área (cm ²)	I _{ug} (cm ⁴)	I _{vg} (cm ⁴)	I _{xg} = I _{yg} (cm ⁴)
200x200x18	69,1	4130	1070	2600



RESOLUÇÃO

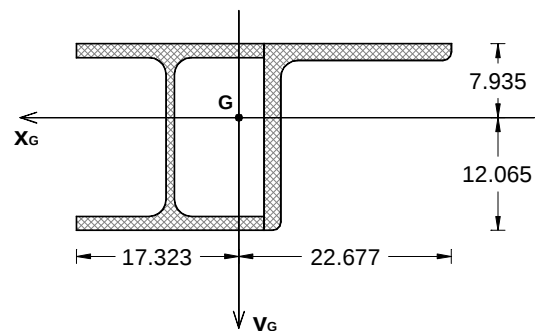
Alínea a)

• POSIÇÃO DO CENTRO DE GRAVIDADE

$$\text{Área} = 78,1 + 69,1 = 147,2 \text{ cm}^2$$

$$x_G = \frac{10 \times 78,1 + 25,6 \times 69,1}{147,2} = 17,323 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{10 \times 78,1 + (20 - 5,6) \times 69,1}{147,2} = 12,065 \text{ cm}$$



• DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA I_{xG}

$$I_{x_G}^{HEB} = 5696 + 78,1 \times 2,065^2 = 6029,036 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_G}^{CAN} = 2600 + 69,1 \times (7,935 - 5,6)^2 = 2976,749 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_G} = I_{x_G}^{HEB} + I_{x_G}^{CAN} = 9005,78 \text{ cm}^4$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS (2014-2015)

NÚCLEO CENTRAL, EIXO NEUTRO

ISABEL ALVIM TELES

• **DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA I_{Y_G}**

$$I_{Y_G}^{HEB} = 2003 + 78,1 \times 7,323^2 = 6191,216 \text{ cm}^4$$

$$I_{Y_G}^{CAN} = 2600 + 69,1 \times (25,6 - 17,323)^2 = 7333,953 \text{ cm}^4$$

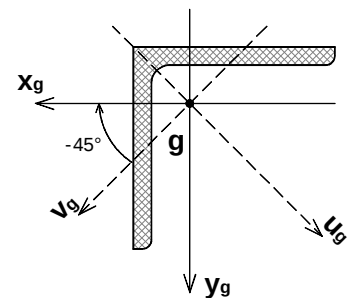
$$I_{Y_G} = I_{Y_G}^{HEB} + I_{Y_G}^{CAN} = 13525,17 \text{ cm}^4$$

• **DETERMINAÇÃO DO PRODUTO DE INÉRCIA $I_{X_G Y_G}$**

$$I_{X_G Y_G}^{HEB} = 0 + 78,1 \times 7,323 \times 2,065 = 1181,028 \text{ cm}^4$$

Para os eixos que passam no centro de gravidade da cantoneira ($x_g; y_g$):

$$\begin{aligned} I_{x_g y_g}^{CAN} &= \frac{I_{v_g} - I_{u_g}}{2} \sin 2\alpha + I_{u_g v_g} \cos 2\alpha = \\ &= \frac{1070 - 4130}{2} \sin(-90^\circ) + 0 \times \cos(-90^\circ) = 1530 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$



Para os eixos que passam no centro de gravidade da secção ($X_G; Y_G$):

$$I_{X_G Y_G}^{CAN} = I_{x_g y_g}^{CAN} + a \cdot b \cdot S = 1530 + 69,1 \times (-25,6 + 17,323) \times (-7,935 + 5,6) = 2865,482 \text{ cm}^4$$

$$I_{X_G Y_G} = I_{X_G Y_G}^{HEB} + I_{X_G Y_G}^{CAN} = 4046,51 \text{ cm}^4$$

• **EIXOS E MOMENTOS PRINCIPAIS CENTRAIS DE INÉRCIA**

$$I_1 = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4 I_{XY}^2}$$

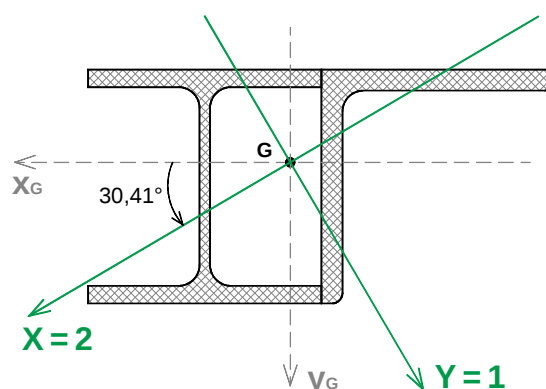
$$I_1 = \frac{9005,78 + 13525,17}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(9005,78 - 13525,17)^2 + 4 \times 4046,51^2} = 15900,2 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{I_X + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4 I_{XY}^2}$$

$$I_2 = \frac{9005,78 + 13525,17}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(9005,78 - 13525,17)^2 + 4 \times 4046,51^2} = 6630,8 \text{ cm}^4$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 I_{XY}}{I_X - I_Y} \right) \Rightarrow \alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 \times 4046,51}{9005,78 - 13525,17} \right) = 30,41^\circ$$

$$I_{Y_G} = 13525,17 \text{ cm}^4 > I_{X_G} = 9005,78 \text{ cm}^4 \Rightarrow I_1 \text{ mais próximo de } I_{Y_G}$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS (2014-2015)

NÚCLEO CENTRAL, EIXO NEUTRO

ISABEL ALVIM TELES

• **RAIOS DE GIRAÇÃO**

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \Rightarrow i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{6630,8}{147,2} = 45,05 \text{ cm}^2$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \Rightarrow i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{15900,2}{147,2} = 108,02 \text{ cm}^2$$

• **EQUAÇÃO DO EIXO NEUTRO**

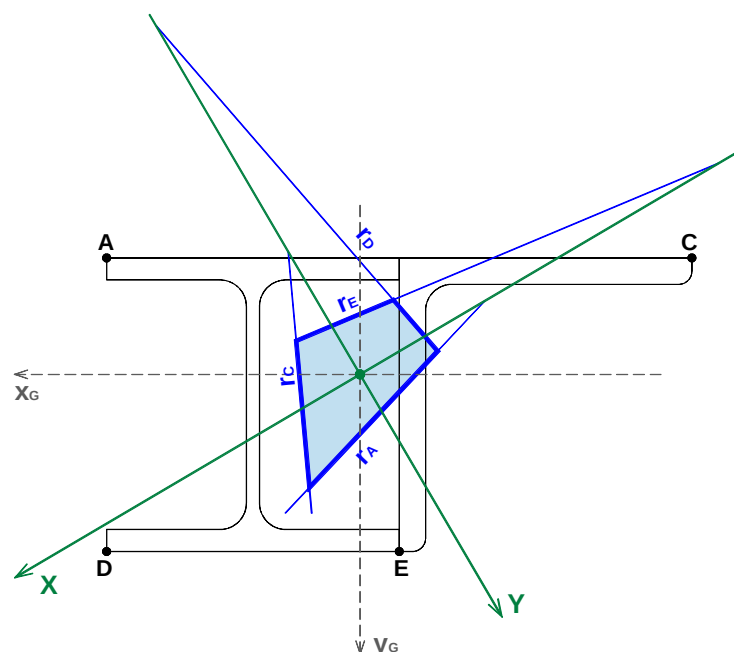
$$1 + \frac{x_0}{i_y^2} X + \frac{y_0}{i_x^2} Y = 0$$

• **DETERMINAÇÃO DAS RECTAS QUE DELIMITAM O NÚCLEO CENTRAL (MÉTODO 1)**

$$1 + \frac{x_0}{i_y^2} X + \frac{y_0}{i_x^2} Y = 0 \Rightarrow 1 + \frac{x_0}{108,02} X + \frac{y_0}{45,05} Y = 0 \quad (\text{cm})$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30,41^\circ & \sin 30,41^\circ \\ -\sin 30,41^\circ & \cos 30,41^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \end{bmatrix}$$

Ptos	Sistema de eixos (X _G ; Y _G)		Sistema de eixos (X; Y)		Rectas unidades: cm	Ptos de intersecção com os eixos (X; Y)	
	X _G (cm)	Y _G (cm)	X ₀ (cm)	Y ₀ (cm)		Y=0 X (cm)	X=0 Y (cm)
A	-17,323	-7,935	10,923	-15,612	1 + 0,1011 X - 0,3466 Y = 0	-9,889	2,885
C	-22,677	-7,935	-23,574	4,635	1 - 0,2182 X + 0,1026 Y = 0	4,582	-9,718
E	-2,677	12,065	3,798	11,760	1 + 0,0351 X + 0,2611 Y = 0	-28,438	-3,830
D	17,323	12,065	21,047	1,637	1 + 0,1949 X + 0,0363 Y = 0	-5,132	-27,525



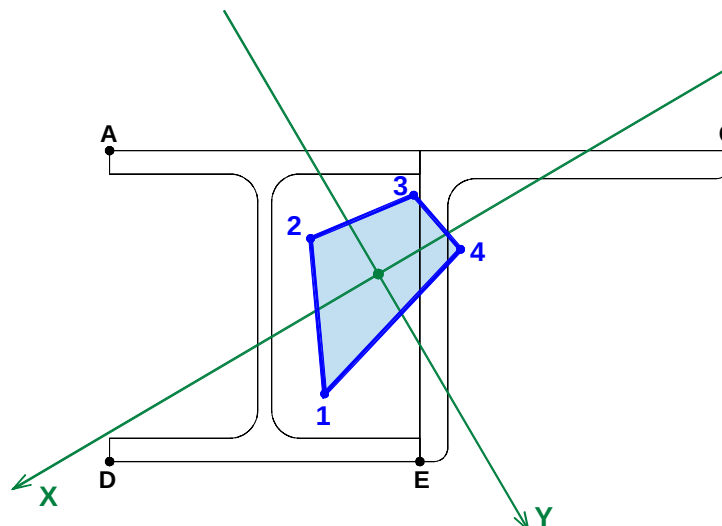
• **DETERMINAÇÃO DOS VÉRTICES DO NÚCLEO CENTRAL (MÉTODO 2)**

$$\overline{P_1 P_2} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{x_0}{i_y^2} x_{P_1} + \frac{y_0}{i_x^2} y_{P_1} = 0 \\ 1 + \frac{x_0}{i_y^2} x_{P_2} + \frac{y_0}{i_x^2} y_{P_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{x_0}{108,02} x_{P_1} + \frac{y_0}{45,05} y_{P_1} = 0 \\ 1 + \frac{x_0}{108,02} x_{P_2} + \frac{y_0}{45,05} y_{P_2} = 0 \end{cases} \quad (\text{cm})$$

Exemplo para o lado **AC** $\Rightarrow$ **Vértice 1:**

$$\begin{cases} 1 + \frac{x_0}{108,02} \times 10,923 + \frac{y_0}{45,05} \times (-15,612) = 0 \\ 1 + \frac{x_0}{108,02} \times (-23,574) + \frac{y_0}{45,05} \times 4,635 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 6,891 \text{ cm} \\ y_0 = 4,896 \text{ cm} \end{cases}$$

Lados	Sistema de eixos (X; Y)				
	X (cm)	Y (cm)	VÉRTICES		
			Nº	X ₀ (cm)	Y ₀ (cm)
AC	X _A = 10,923 X _C = -23,574	Y _A = -15,612 Y _C = 4,635	1	6,891	4,896
CE	X _C = -23,574 X _E = 3,798	Y _C = 4,635 Y _E = 11,760	2	2,610	-4,182
ED	X _E = 3,798 X _D = 21,047	Y _E = 11,760 Y _D = 1,637	3	-4,532	-3,220
DA	X _D = 21,047 X _A = 10,923	Y _D = 1,637 Y _A = -15,612	4	-5,378	1,316



Alínea b) – resolução 1

• **EQUAÇÃO CARTESIANA DA RECTA CD - EPCI: (X; Y)**

$$\mathbf{C} \Rightarrow (X_C; Y_C) = (-23,574; 4,635) \text{ cm} = (-0,23574; 0,04635) \text{ m}$$

$$\mathbf{D} \Rightarrow (X_D; Y_D) = (21,047; 1,637) \text{ cm} = (0,21047; 0,01637) \text{ m}$$

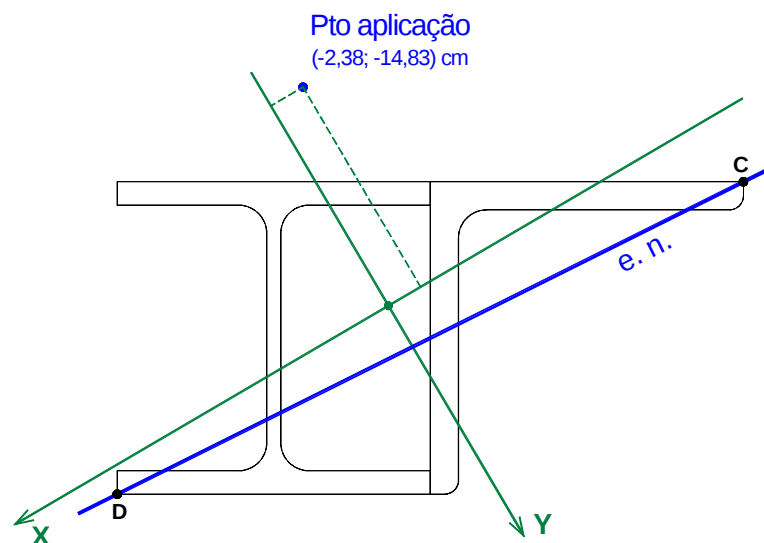
$$\text{Recta } \underline{\mathbf{CD}} \Rightarrow 1 + a.X + b.Y = 0$$

$$\begin{cases} 1 + a \times (-0,23574) + b \times 0,04635 = 0 \\ 1 + a \times 0,21047 + b \times 0,01637 = 0 \end{cases} \quad (\text{m}) \Rightarrow \begin{cases} a = -2,205 \\ b = -32,792 \end{cases}$$

$$\text{Recta } \underline{\mathbf{CD}} \Rightarrow 1 - 2,205 X - 32,792 Y = 0 \quad (\text{m})$$

$$\text{Eixo neutro} \Rightarrow 1 + \frac{x_0}{i_Y^2} X + \frac{y_0}{i_X^2} Y = 0 \Rightarrow 1 + \frac{x_0}{108,02 \times 10^{-4}} X + \frac{y_0}{45,05 \times 10^{-4}} Y = 0 \quad (\text{m})$$

$$\boxed{\text{Recta } \underline{\mathbf{CD}} = \text{Eixo neutro}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_0}{108,02 \times 10^{-4}} = -2,205 \\ \frac{y_0}{45,05 \times 10^{-4}} = -32,792 \end{cases} \quad (\text{m}) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -0,0238 \text{ m} = -2,38 \text{ cm} \\ y_0 = -0,1483 \text{ m} = -14,83 \text{ cm} \end{cases}$$



Alínea b) – resolução 2

• **EIXO NEUTRO**

$$1 + \frac{x_0}{i_Y^2} X + \frac{y_0}{i_X^2} Y = 0 \Rightarrow 1 + \frac{x_0}{108,02 \times 10^{-4}} X + \frac{y_0}{45,05 \times 10^{-4}} Y = 0 \quad (\text{m})$$

$$\mathbf{C} \Rightarrow (X_C; Y_C) = (-23,574; 4,635) \text{ cm} = (-0,23574; 0,04635) \text{ m}$$

$$\mathbf{D} \Rightarrow (X_D; Y_D) = (21,047; 1,637) \text{ cm} = (0,21047; 0,01637) \text{ m}$$

$$\begin{cases} 1 + \frac{x_0}{108,02 \times 10^{-4}} X_C + \frac{y_0}{45,05 \times 10^{-4}} Y_C = 0 \\ 1 + \frac{x_0}{108,02 \times 10^{-4}} X_D + \frac{y_0}{45,05 \times 10^{-4}} Y_D = 0 \end{cases} \quad (\text{m})$$

$$\begin{cases} 1 + \frac{x_0}{108,02 \times 10^{-4}} \times (-0,23574) + \frac{y_0}{45,05 \times 10^{-4}} \times 0,04635 = 0 \\ 1 + \frac{x_0}{108,02 \times 10^{-4}} \times 0,21047 + \frac{y_0}{45,05 \times 10^{-4}} \times 0,01637 = 0 \end{cases} \quad (\text{m})$$

$$\begin{cases} x_0 = -0,0238 \text{ m} = -2,38 \text{ cm} \\ y_0 = -0,1483 \text{ m} = -14,83 \text{ cm} \end{cases}$$

