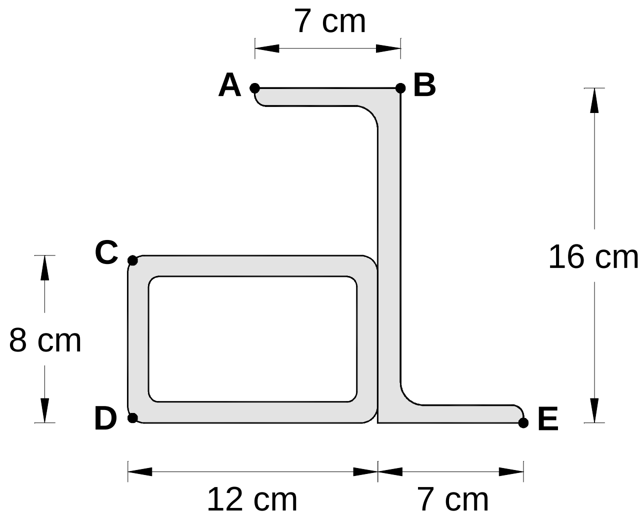
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

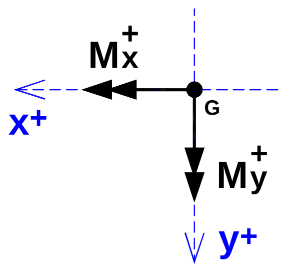
RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

(2014/2015)

NÚCLEO CENTRAL, EIXO NEUTRO



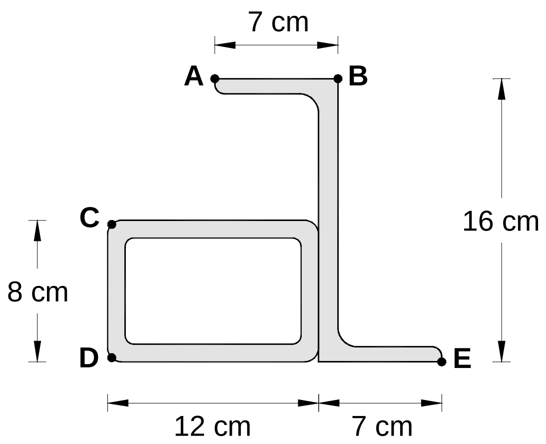
RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO CONSIDERANDO A SEGUINTE CONVENÇÃO:



ISABEL ALVIM TELES

ENUNCIADO

Considere a secção transversal recta representada na figura, constituída por um perfil **Z** e um perfil tubular 120x80, cujas características se indicam abaixo.



a) Determine o núcleo central.

b) Determine o ponto de aplicação da resultante de um sistema de forças para que o eixo neutro passe nos pontos **B** e **E**.

c) Determine o ponto de aplicação da resultante de um sistema de forças para que o eixo neutro passe nos pontos **B** e **D**.

d) Considere que no ponto **A** está a actuar uma força de tracção de 100 kN e no ponto **B** está a actuar uma força de compressão de 200 kN.

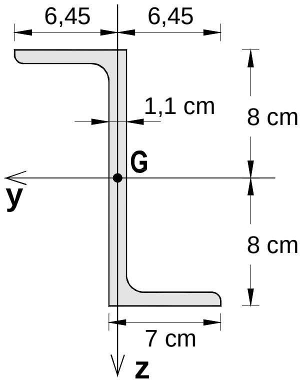
Determine a maior força a aplicar no ponto **D** para que toda a secção esteja submetida a compressões.

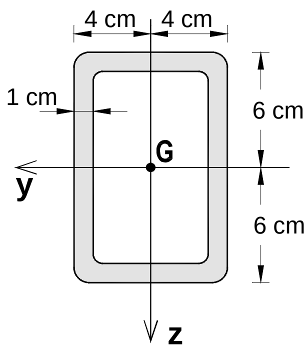
e) Considere que no ponto **B** está a actuar uma força de tracção de 60 kN e no ponto **E** está a actuar uma força de tracção de 80 kN.

Determine a menor força a aplicar no ponto **C** para que toda a secção esteja traccionada.

f) Considere que no ponto **E** está a actuar uma força de compressão de 120 kN.

Determine entre que valores poderá variar uma força a aplicar no ponto **A** para que toda a secção esteja comprimida.





PERFIL Z	Área (cm^2)	I_Y (cm^4)	I_Z (cm^4)	I_{YZ} (cm^4)
	27,5	1060	204	-349

PERFIL TUBULAR 120 x 80	Área (cm^2)	I_Y (cm^4)	I_Z (cm^4)
	34,9	609	313

RESOLUÇÃO

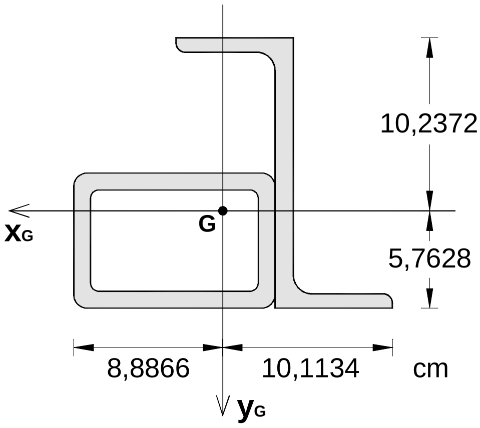
Alínea a)

- **POSIÇÃO DO CENTRO DE GRAVIDADE**

Área = 34,9 + 27,5 = 62,4 cm^2

$$x_G = \frac{34{,}9 \times 6 + 27{,}5 \times (12 + \frac{1{,}1}{2})}{62{,}4} = 8{,}8866 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{34{,}9 \times 4 + 27{,}5 \times 8}{62{,}4} = 5{,}7628 \text{ cm}$$



- **DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA I_{XG}**

$$I_{X_G}^{tub} = 313 + 34{,}9 \times (5{,}7628 - 4)^2 = 421{,}45 \text{ cm}^4$$

$$I_{X_G}^{perf.Z} = 1060 + 27{,}5 \times (8 - 5{,}7628)^2 = 1197{,}64 \text{ cm}^4$$

$$I_{X_G} = I_{X_G}^{tub} + I_{X_G}^{perf.Z} = 1619{,}09 \text{ cm}^4$$

- **DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA I_{YG}**

$$I_{Y_G}^{tub} = 609 + 34{,}9 \times (8{,}8866 - 6)^2 = 899{,}80 \text{ cm}^4$$

$$I_{Y_G}^{perf.Z} = 204 + 27{,}5 \times (10{,}1134 - 6{,}45)^2 = 573{,}06 \text{ cm}^4$$

$$I_{Y_G} = I_{Y_G}^{tub} + I_{Y_G}^{perf.Z} = 1472{,}86 \text{ cm}^4$$

- **DETERMINAÇÃO DO PRODUTO DE INÉRCIA I_{XGYG}**

$$I_{X_GY_G}^{tub} = 0 + 34{,}9 \times 2{,}8866 \times 1{,}7628 = 177{,}59 \text{ cm}^4$$

$$I_{X_GY_G}^{perf.Z} = -349 + 27{,}5 \times (-3{,}6634) \times (-2{,}2372) = -123{,}62 \text{ cm}^4$$

$$I_{X_GY_G} = I_{X_GY_G}^{tub} + I_{X_GY_G}^{perf.Z} = 53{,}97 \text{ cm}^4$$

- **EIXOS E MOMENTOS PRINCIPAIS CENTRAIS DE INÉRCIA**

$$I_1 = \frac{I_X + I_Y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4\ I_{XY}^2}$$

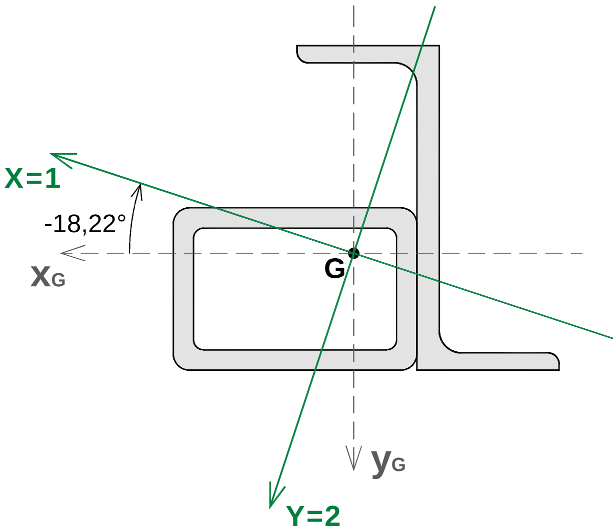
$$I_1 = \frac{1619{,}09 + 1472{,}86}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1619{,}09 - 1472{,}86)^2 + 4 \times 53{,}97^2} = 1636{,}85\,\text{cm}^4$$

$$I_2 = \frac{I_X + I_Y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4\ I_{XY}^2}$$

$$I_2 = \frac{1619{,}09 + 1472{,}86}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1619{,}09 - 1472{,}86)^2 + 4 \times 53{,}97^2} = 1455{,}10\,\text{cm}^4$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(-\frac{2\,I_{XY}}{I_X - I_Y}\right) \Rightarrow \alpha_p = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(-\frac{2 \times 53{,}97}{1619{,}09 - 1472{,}86}\right) = -18{,}22^\circ$$

$$I_{X_G} = 1619{,}09\,\text{cm}^4 > I_{Y_G} = 1472{,}86\,\text{cm}^4 \Rightarrow I_1 \text{ mais próximo de } I_{X_G}$$



- **RAIOS DE GIRAÇÃO**

$$i_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}} \Rightarrow i_X^2 = \frac{I_X}{A} = \frac{1636{,}85}{62{,}4} = 26{,}23\,\text{cm}^2$$

$$i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} \Rightarrow i_Y^2 = \frac{I_Y}{A} = \frac{1455{,}10}{62{,}4} = 23{,}32\,\text{cm}^2$$

- **EQUAÇÃO DO EIXO NEUTRO**

$$\frac{N}{A} + \frac{M_X}{I_X}Y + \frac{M_Y}{I_Y}X = 0 \Rightarrow 1 + \frac{x_0}{i_Y^2}X + \frac{y_0}{i_X^2}Y = 0$$

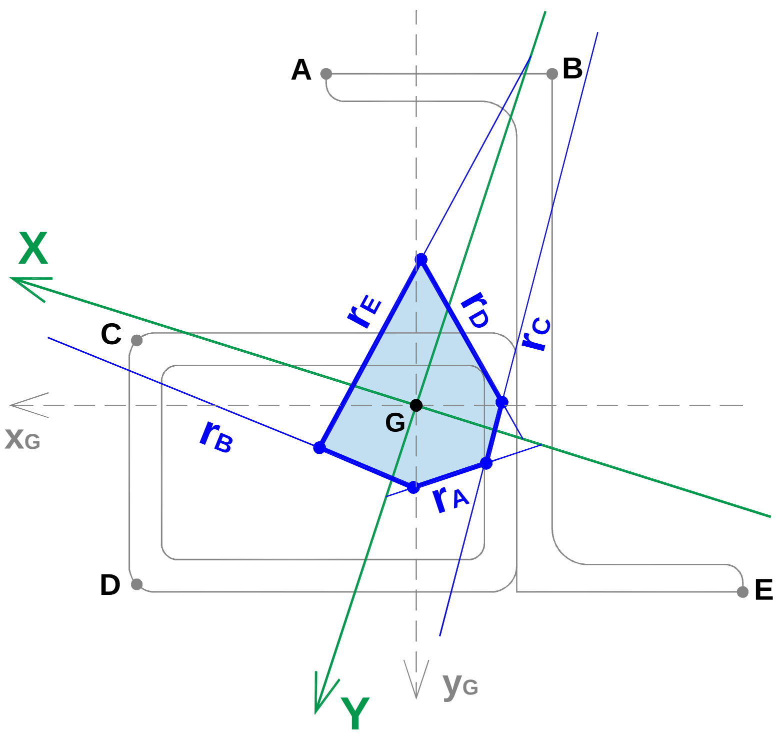
- **DETERMINAÇÃO DAS RECTAS QUE DELIMITAM O NÚCLEO CENTRAL (MÉTODO 1)**

$$1+\frac{x_0}{i_Y^2}X+\frac{y_0}{i_X^2}Y=0 \quad\Rightarrow\quad 1+\frac{x_0}{23{,}32}X+\frac{y_0}{26{,}23}Y=0 \qquad \text{coordenadas em } cm$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18{,}22^\circ) & \text{sen}(-18{,}22^\circ) \\ -\text{sen}(-18{,}22^\circ) & \cos(-18{,}22^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \end{bmatrix}$$

Pontos	Sistema de eixos (X_G; Y_G)		Sistema de eixos **(X; Y)**		Rectas unidades: cm	Ptos de intersecção com os eixos **(X; Y)**	
	X_G (cm)	Y_G (cm)	X_0 (cm)	Y_0 (cm)		Y=0 **X** (cm)	X=0 **Y** (cm)
A	2,7866	–10,2372	5,848	–8,853	1 + 0,2508 **X** – 0,3375 **Y** = 0	–3,988	2,963
B	–4,2134	–10,2372	–0,801	–11,041	1 – 0,0344 **X** – 0,4209 **Y** = 0	29,101	2,376
E	–10,1134	5,7628	–11,408	2,312	1 – 0,4892 **X** + 0,0881 **Y** = 0	2,044	–11,347
D	8,8866	5,7628	6,639	8,252	1 + 0,2847 **X** + 0,3146 **Y** = 0	–3,513	–3,179
C	8,8866	–2,2372	9,141	0,654	1 + 0,3920 **X** + 0,0249 **Y** = 0	–2,551	–40,140

Nota: Para facilitar o traçado das rectas, as duas últimas colunas da tabela ilustram os seus pontos de intersecção com os eixos **X** e **Y**.



- **DETERMINAÇÃO DOS VÉRTICES DO NÚCLEO CENTRAL (MÉTODO 2)**

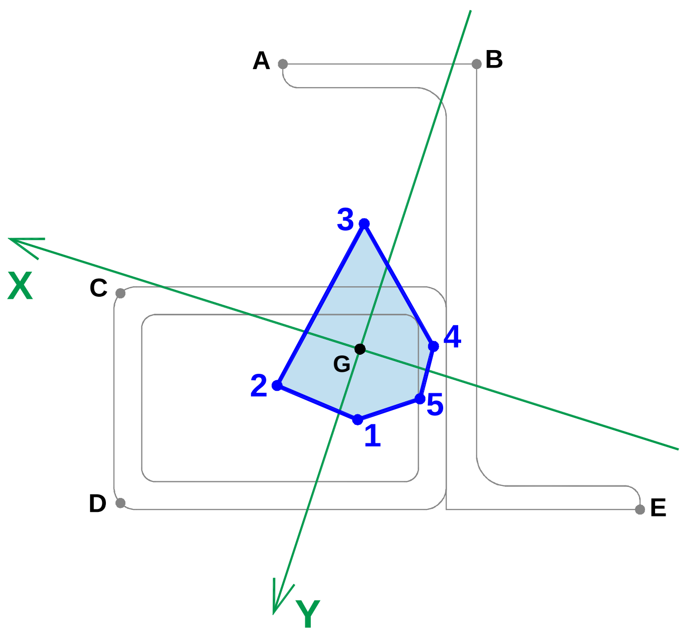
$$\overline{P_1 P_2} \Rightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{x_0}{i_Y^2}x_{P_1} + \dfrac{y_0}{i_X^2}y_{P_1} = 0 \\ 1+\dfrac{x_0}{i_Y^2}x_{P_2} + \dfrac{y_0}{i_X^2}y_{P_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{x_0}{23,32}x_{P_1} + \dfrac{y_0}{26,23}y_{P_1} = 0 \\ 1+\dfrac{x_0}{23,32}x_{P_2} + \dfrac{y_0}{26,23}y_{P_2} = 0 \end{cases}$$

coordenadas em *cm*

Exemplo para o lado **AB** $\Rightarrow$ **Vértice 1**:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{x_0}{23,32}\times(-5,848) + \dfrac{y_0}{26,23}\times(-8,853) = 0 \\ 1+\dfrac{x_0}{23,32}\times(-0,801) + \dfrac{y_0}{23,23}\times(-11,041) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0,712\,\text{cm} \\ y_0 = 2,434\,\text{cm} \end{cases}$$

Lados	Sistema de eixos (X; Y)				
	X (cm)	Y (cm)	VÉRTICES		
			Nº	X_0 (cm)	Y_0 (cm)
AB	$X_A =$ 5,848 $X_B =$ − 0,801	$Y_A =$ − 8,853 $Y_B =$ −11,041	**1**	−0,712	2,434
BE	$X_B =$ − 0,801 $X_E =$ −11,408	$Y_B =$ −11,041 $Y_E =$ 2,312	**2**	2,436	2,177
ED	$X_E =$ −11,408 $X_D =$ 6,639	$Y_E =$ 2,312 $Y_D =$ 8,252	**3**	1,266	−4,324
DC	$X_D =$ 6,639 $X_C =$ 9,141	$Y_D =$ 8,252 $Y_C =$ 0,654	**4**	−2,492	−0,923
CA	$X_C =$ 9,141 $X_A =$ 5,848	$Y_C =$ 0,654 $Y_A =$ − 8,853	**5**	−2,616	1,019



Alínea b) Determinação do ponto de aplicação da resultante de um sistema de forças para que o eixo neutro passe nos pontos **B** e **E**.

A recta **BE** coincide com um limite exterior da secção transversal, pelo que na alínea anterior já foi calculado o vértice que lhe corresponde: à recta **BE** corresponde o **vértice 2** do núcleo central, ou seja, a uma força que actua no **vértice 2** corresponde um eixo neutro que passa nos pontos **B** e **E**.

Conclusão: O ponto de aplicação da resultante do sistema de forças para que o eixo neutro passe nos pontos **B** e **E** teria que ser o **vértice 2**, ou seja, o ponto de coordenadas (2,436 cm; 2,177 cm) no sistema de eixos **(X; Y).**

Alínea c)

- **Recta BD**

Ponto **B** $\begin{cases} X_B = -0{,}801\,\text{cm} \\ Y_B = -11{,}041\,\text{cm} \end{cases}$ Ponto **D** $\begin{cases} X_D = 6{,}639\,\text{cm} \\ Y_D = 8{,}252\,\text{cm} \end{cases}$

recta: 1 + a X + b Y =0

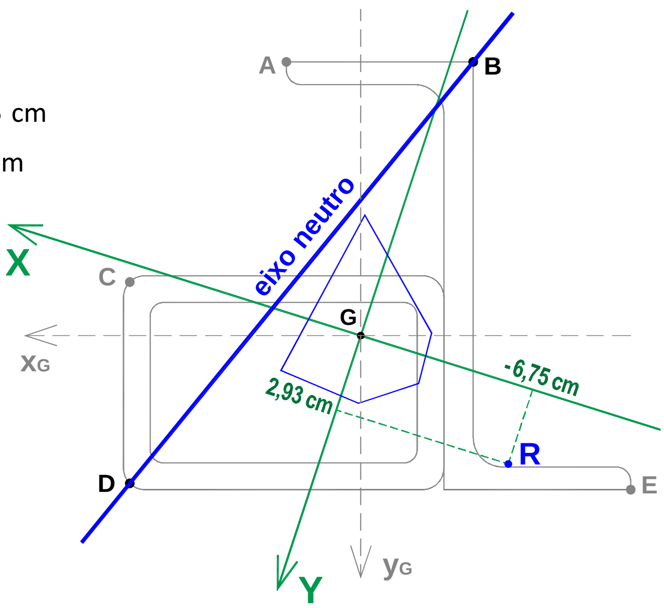
Recta BD $\Rightarrow$ $\begin{matrix} B \\ D \end{matrix} \begin{cases} 1 + a \times (-0{,}801) + b \times (-11{,}041) = 0 \\ 1 + a \times 6{,}639 + b \times 8{,}252 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0{,}2893 \\ b = 0{,}1116 \end{cases}$ coordenadas em *cm*

Recta BD $\Rightarrow$ $1 - 0{,}2893\,X + 0{,}1116\,Y = 0$ coordenadas em *cm*

- **Eixo neuto**: $1 + \dfrac{x_0}{i_Y^2} X + \dfrac{y_0}{i_X^2} Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \dfrac{x_0}{23{,}32} X + \dfrac{y_0}{26{,}23} Y = 0$ (cm)

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{23{,}32} = -\,0{,}2893 \\ \dfrac{y_0}{26{,}23} = 0{,}1116 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\,6{,}75\text{ cm} \\ y_0 = 2{,}93\text{ cm} \end{cases}$$

R - ponto de aplicação da resultante: $\begin{cases} X_R = -6{,}75\text{ cm} \\ Y_R = 2{,}93\text{ cm} \end{cases}$



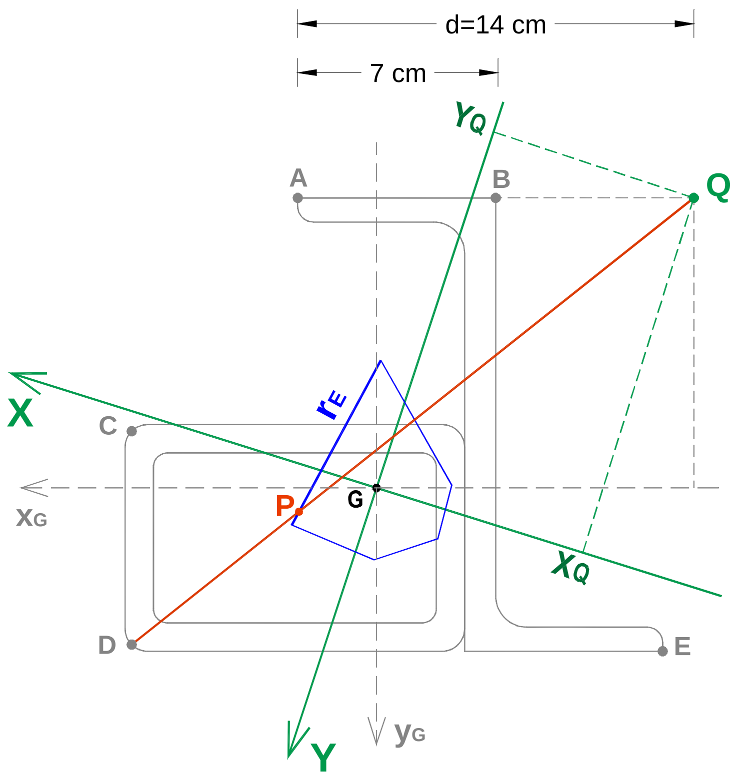
Alínea d)

$$\begin{cases} F_A = 100\,\text{kN} \\ F_B = -200\,\text{kN} \end{cases} \Rightarrow \text{substituir por resultante} \Rightarrow R_1 = -100\,\text{kN}$$

Q - ponto de aplicação da resultante R_1:

$$\sum M_A^{F_A+F_B} = \sum M_A^{R_1}$$

$$-200 \times 7\text{cm} = -100 \times d \Rightarrow d = 14\,\text{cm}$$



- **Coordenadas do ponto Q**

No sistema de eixos (x_G; y_G): (–11,2134; –10,2372) *(cm)*

No sistema de eixos (**X**; **Y**):

$$\begin{bmatrix} X_Q \\ Y_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18{,}22^\circ) & \text{sen}(-18{,}22^\circ) \\ -\text{sen}(-18{,}22^\circ) & \cos(-18{,}22^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -11{,}2134 \\ -10{,}2372 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_Q = -7{,}450\text{ cm} \\ Y_Q = -13{,}230\text{ cm} \end{cases}$$

- **Recta DQ**

Ponto **D** $\begin{cases} X_D = 6{,}639\,\text{cm} \\ Y_D = 8{,}252\,\text{cm} \end{cases}$ Ponto **Q** $\begin{cases} X_Q = -7{,}450\,\text{cm} \\ Y_Q = -13{,}230\,\text{cm} \end{cases}$

recta: 1 + a X + b Y =0

Recta DQ $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} D \\ Q \end{array}\begin{cases} 1 + a \times 6{,}639 + b \times 8{,}252 = 0 \\ 1 + a \times (-7{,}450) + b \times (-13{,}230) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0{,}81505 \\ b = 0{,}53455 \end{cases}$ coordenadas em *cm*

Recta DQ $\Rightarrow$ 1 – 0,81508 X + 0,53455 Y = 0 coordenadas em *cm*

- **Ponto P - intersecção da recta r_E com a recta DQ**

$$\begin{cases} 1 - 0{,}4892\ X + 0{,}0881\ Y = 0 \\ 1 - 0{,}81508\ X + 0{,}53455\ Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Ponto P} \begin{cases} X_P = 2{,}3535 \text{ cm} \\ Y_P = 1{,}7179 \text{ cm} \end{cases}$$

- **Comprimento do segmento DP** $= \sqrt{(6{,}639-2{,}3535)^2 + (8{,}252-1{,}7179)^2} = 7{,}81$ cm

- **Comprimento do segmento PQ** $= \sqrt{(2{,}3535+7{,}450)^2 + (1{,}7179+13{,}230)^2} = 17{,}88$ cm

- **Determinação de F_Q**

O sistema de forças (**R_1 + F_Q**) deverá ser equivalente a uma **Resultante R** com ponto de aplicação em **P**.

$$\sum M_P^{R_1+F_D} = \sum M_P^{R} = 0$$

R_1 x **PQ** - **F_D** x **DQ** = 0 $\Rightarrow$ -100 x 17,88 – F_D x 7,81 = 0 $\Rightarrow$ $F_D = -228{,}9$ kN (força de compressão)

Alínea e)

- **Solicitação equivalente a (F_B + F_E) com ponto de aplicação no centro de gravidade**

Sistema de eixos (X_G; Y_G)

N = 60 + 80 = 140 kN

$M_{XG} = 60 \times (-10{,}2372 \times 10^{-2}) + 80 \times 5{,}7628 \times 10^{-2} = -1{,}532$ kNm

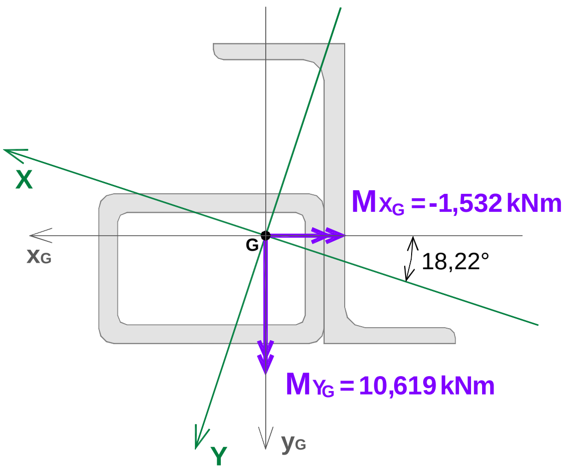
$M_{YG} = 60 \times 4{,}2134 \times 10^{-2} + 80 \times 10{,}1134 \times 10^{-2} = 10{,}619$ kNm

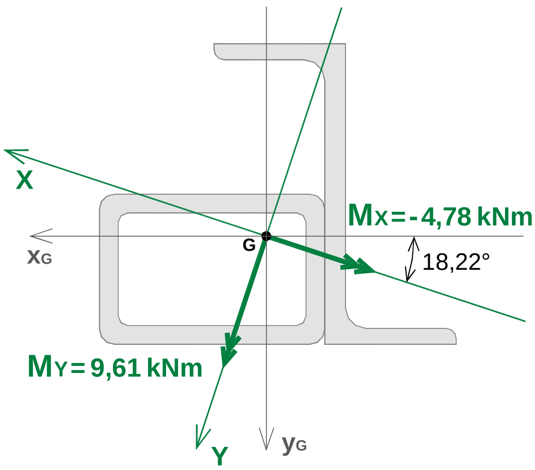
Sistema de eixos (X; Y)

N = 140 kN

$M_X = -1{,}532 \cos 18{,}22^o - 10{,}619 \text{ sen } 18{,}22^o = -4{,}78$ kNm

$M_Y = -1{,}532 \text{ sen } 18{,}22^o + 10{,}619 \cos 18{,}22^o = 9{,}61$ kNm

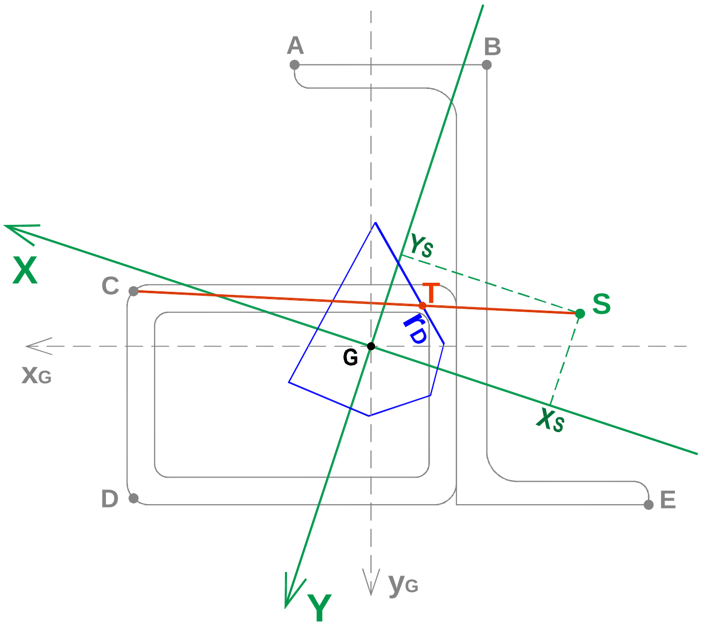




- **S - ponto de aplicação da resultante R_2 no sistema de eixos (X; Y)**

Resultante: $R_2 = N = 140$ kN

$$\begin{cases} X_S = -\dfrac{M_Y}{N} \\ Y_S = \dfrac{M_X}{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_S = -\dfrac{9{,}61}{140} = -6{,}86\times10^{-2}\ \text{m} = -6{,}86\ \text{cm} \\ Y_S = \dfrac{-4{,}78}{140} = -3{,}41\times10^{-2}\ \text{m} = -3{,}41\ \text{cm} \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Ponto S } (-6{,}86; -3{,}41)\ \text{cm}$$



- **Recta CS**

Ponto **C** $\begin{cases} X_C = 9{,}141\,\text{cm} \\ Y_C = 0{,}654\,\text{cm} \end{cases}$

Ponto **S** $\begin{cases} X_S = -6{,}86\,\text{cm} \\ Y_S = -3{,}81\,\text{cm} \end{cases}$

recta: $1 + a\,X + b\,Y = 0$

Recta $\underline{CS}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{c} C \\ S \end{array}\begin{cases} 1 + a\times 9{,}141 + b\times 0{,}654 = 0 \\ 1 + a\times(-6{,}86) + b\times(-3{,}81) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0{,}1471 \\ b = 0{,}5274 \end{cases}$ coordenadas em *cm*

Recta $\underline{CS}$ $\Rightarrow$ $1 - 0{,}1471\,X + 0{,}5274\,Y = 0$ coordenadas em *cm*

- **Ponto T - intersecção da recta r_D com a recta $\underline{CS}$**

$$\begin{cases} 1 + 0{,}2847\ X + 0{,}3146\ Y = 0 \\ 1 - 0{,}1471\ X + 0{,}5274\ Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Ponto T} \begin{cases} X_T = -1{,}083\ \text{cm} \\ Y_T = -2{,}198\ \text{cm} \end{cases}$$

- **Comprimento do segmento $\underline{CT}$** $= \sqrt{(9{,}141+1{,}083)^2 + (0{,}654+2{,}198)^2} = 10{,}614$ cm

- **Comprimento do segmento $\underline{TS}$** $= \sqrt{(-1{,}083+6{,}86)^2 + (-2{,}198+3{,}41)^2} = 5{,}903$ cm

- **Determinação de F_C**

O sistema de forças (**R_2** + **F_C**) deverá ser equivalente a uma **Resultante R** com ponto de aplicação em **T**.

$$\sum M_T^{R_2+F_C} = \sum M_T^{R} = 0$$

R_2 x $\underline{\mathbf{TS}}$ - **F_C** x $\underline{\mathbf{CT}}$ = 0 $\Rightarrow$ 140 x 5,903 - **F_C** x 10,614 = 0 $\Rightarrow$ **F_C** = 77,86 kN (força de tracção)

Alínea f)

Para que a secção esteja totalmente submetida a compressões, a resultante do sistema de forças (**F_A** + **F_E**) deverá ter ponto de aplicação dentro do núcleo central.

Por outro lado, o ponto de aplicação da resultante do sistema de forças (**F_A** + **F_E**) terá que estar sobre a recta **AE**.

Como a recta **AE** não intercepta o núcleo central, não existe qualquer força **F_A** que actuando conjuntamente com a força **F_E** , leve a que só existam tensões de compressão na secção transversal.