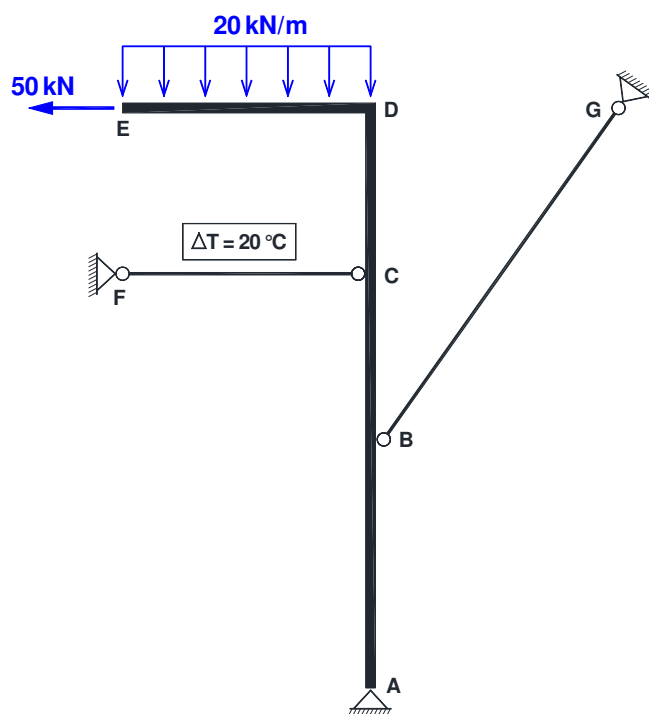


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

# RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

## ESTRUTURA HIPERESTÁTICA



RESOLUÇÃO DO EXAME DE 25 / FEVEREIRO / 2015

ISABEL ALVIM TELES

**RESISTÊNCIA DE MATERIAIS**

EXAME 25/FEV/2015 – EST. HIPERESTÁTICA

ISABEL ALVIM TELES

**ENUNCIADO**

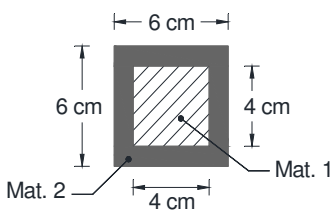
Considere a estrutura representada na figura.

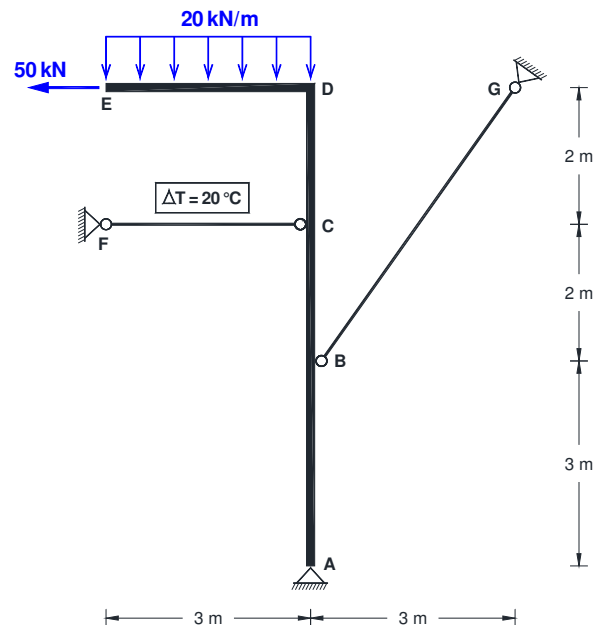
O corpo **ABCDE** é um elemento rígido.

As barras **FC** e **BG** são bi-articuladas e apresentam as secções transversais abaixo indicadas.

A estrutura está sujeita às seguintes ações:

- força distribuída de 20 kN/m no tramo **ED**;
- força concentrada de 50 kN no ponto **E**;
- variação de temperatura de **20°C** na barra **FC**.

| <b>Barra FC</b>         | $A = 5 \text{ cm}^2$<br>$E = 80 \text{ GPa}$<br>$\alpha = 1,5 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$                                                                                                                                                                                   |        |        |                         |                         |
|-------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|--------|-------------------------|-------------------------|
| <b>Barra BG</b>         | <table border="1"> <thead> <tr> <th>Mat. 1</th><th>Mat. 2</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>E_1 = 200 \text{ GPa}</math></td><td><math>E_2 = 100 \text{ GPa}</math></td></tr> </tbody> </table>  | Mat. 1 | Mat. 2 | $E_1 = 200 \text{ GPa}$ | $E_2 = 100 \text{ GPa}$ |
| Mat. 1                  | Mat. 2                                                                                                                                                                                                                                                                                      |        |        |                         |                         |
| $E_1 = 200 \text{ GPa}$ | $E_2 = 100 \text{ GPa}$                                                                                                                                                                                                                                                                     |        |        |                         |                         |



- a)** Calcule a tensão instalada na barra **FC** e as tensões instaladas em cada um dos materiais (**Mat.1** e **Mat.2**) constituintes da barra **BG**.
- b)** Caracterize completamente o deslocamento no ponto **E**.

**RESOLUÇÃO**

**Alínea a)**

$$\text{Barra BG} \begin{cases} A_{\text{mat 1}} = 4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2 = 16 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ A_{\text{mat 2}} = 6 \times 6 - 4 \times 4 = 20 \text{ cm}^2 = 20 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \end{cases}$$

## RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

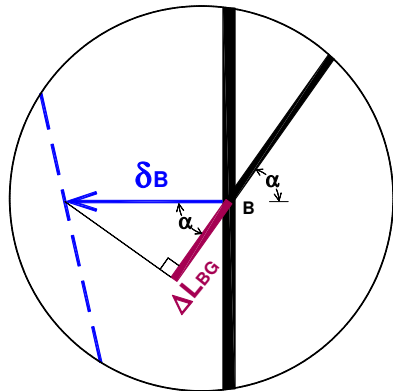
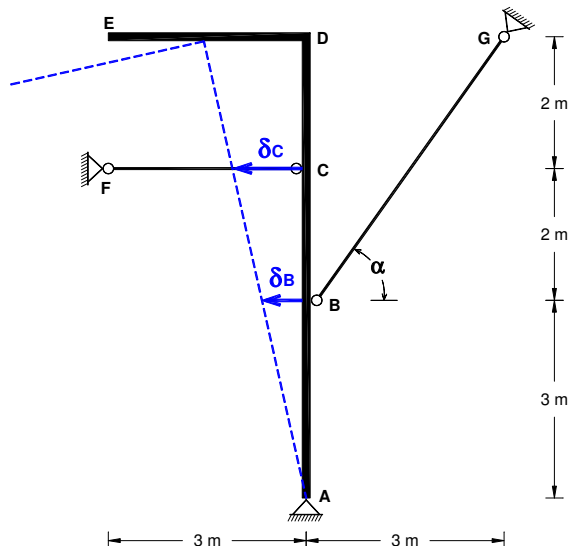
**EXAME 25/FEV/2015 – EST. HIPERESTÁTICA**

ISABEL ALVIM TELES

Equação de compatibilidade:  $\sum M_A = 0$

$$5 R_F + 50 \times 7 + 60 \times 1,5 = 0,6 R_G \times 3$$

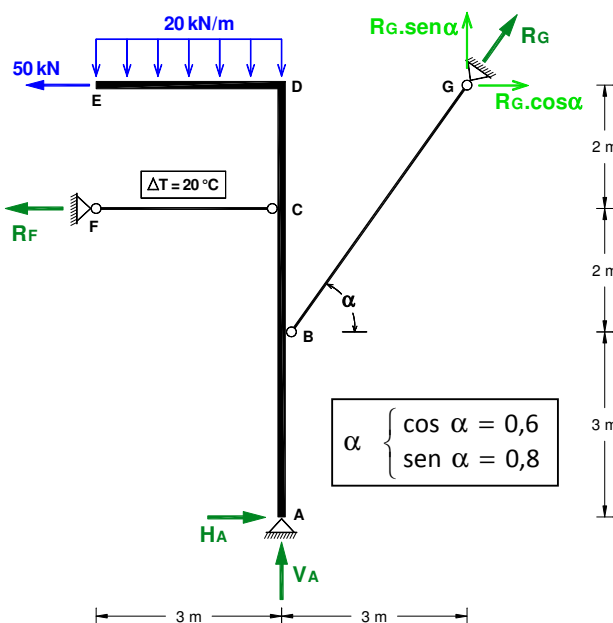
$$5 R_E - 1,8 R_G = -440$$



$$\text{Barra FC} \left\{ \begin{array}{l} \text{Área} = 5 \text{ cm}^2 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ E = 80 \times 10^6 \text{ kPa} \\ \alpha = 1,5 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \end{array} \right.$$

$$\text{Barra BG} \left\{ \begin{array}{l} A_{\text{hom mat 2}} = A_2 + A_1 \times \frac{E_1}{E_2} = 20 + 16 \times \frac{200}{100} = 52 \text{ cm}^2 = 52 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ E_2 = 100 \times 10^6 \text{ kPa} \end{array} \right.$$

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} + \alpha \cdot L \cdot \Delta T \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta L_{BG} = \frac{R_G \times 5}{100 \times 10^6 \times 52 \times 10^{-4}} = \frac{5 R_G}{520\,000} \\ \Delta L_{FC} = \frac{R_F \times 3}{80 \times 10^6 \times 5 \times 10^{-4}} + 1,5 \times 10^{-5} \times 3 \times 20 = \frac{3 R_F}{40\,000} + 90 \times 10^{-5} \end{cases}$$



### Equação de compatibilidade

$$\frac{\delta_B}{3} = \frac{\delta_C}{5} \Rightarrow 5\delta_B = 3\delta_C$$

$$\begin{cases} \delta_B = \frac{\Delta L_{BG}}{\cos \alpha} = \frac{\Delta L_{BF}}{0,6} \\ \delta_C = -\Delta L_{FC} \end{cases}$$

### Equação de compatibilidade

$$5\delta_B = 3\delta_C$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{5}{0.6} \Delta L_{BG} = -3 \Delta L_{FC}$$

**RESISTÊNCIA DE MATERIAIS**

EXAME 25/FEV/2015 – EST. HIPERESTÁTICA

ISABEL ALVIM TELES

**Equação de compatibilidade:**  $\frac{5}{0,6} \Delta L_{BG} = -3 \Delta L_{FC} \Rightarrow \frac{5}{0,6} \times \frac{5 R_G}{520\,000} = -3 \left( \frac{3 R_F}{40\,000} + 90 \times 10^{-5} \right)$

**Sistema de equações:** 
$$\begin{cases} 5 R_F - 1,8 R_G = -440 \\ \frac{9 R_F}{40\,000} + \frac{25 R_G}{312\,000} = -270 \times 10^{-5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_F = -49,79 \text{ kN } (\rightarrow) \\ R_G = 106,13 \text{ kN } (\nearrow) \end{cases}$$

**Tensão instalada na barra FC**

$\sigma_{FC} = \frac{N_{RC}}{A_{FC}} = \frac{-49,79}{5 \times 10^{-4}} = -99\,580 \text{ kPa} = -99,6 \text{ MPa (compressão)}$

**Tensão instalada na barra BG**

**Material 2**  $\sigma_{mat\,2} = \frac{N_{BG}}{A_{hom\,mat\,2}} = \frac{106,13}{52 \times 10^{-4}} = 20\,409,6 \text{ kPa} = 20,4 \text{ MPa (tração)}$

**Material 1**  $\sigma_{mat\,1} = \frac{N_{BG}}{A_{hom\,mat\,1}} = \frac{E_1}{E_2} \sigma_{mat\,2} = \frac{200}{100} \times 20,4 = 40,8 \text{ MPa (tração)}$

**Alínea b)**

$\delta_C = \Delta L_{FC} = \frac{3 R_F}{40\,000} + 90 \times 10^{-5} = \frac{3 \times (-49,79)}{40\,000} + 90 \times 10^{-5} = -2,834 \times 10^{-3} \text{ m}$

$\text{tg } \theta = \frac{\delta_C}{5} = \frac{\delta_E}{EA}$

$\text{tg } \theta = \frac{\delta_C}{5} = \frac{2,834 \times 10^{-3}}{5} = 5,67 \times 10^{-4}$

$\text{tg } \theta = \frac{\delta_E}{EA} \Rightarrow \delta_E = 5,67 \times 10^{-4} \times \sqrt{7^2 + 3^2}$

$\delta_E = 4,32 \times 10^{-3} \text{ m} = 4,32 \text{ mm}$

$\beta = \arctg\left(\frac{3}{7}\right) = 23,20^\circ$

$$\begin{cases} \delta_E^h = \delta_E \cos \beta = 4,32 \cos 23,20^\circ \\ \delta_E^v = \delta_E \sin \beta = 4,32 \sin 23,20^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_E^h = 3,97 \text{ mm } (\leftarrow) \\ \delta_E^v = 1,70 \text{ mm } (\downarrow) \end{cases}$$