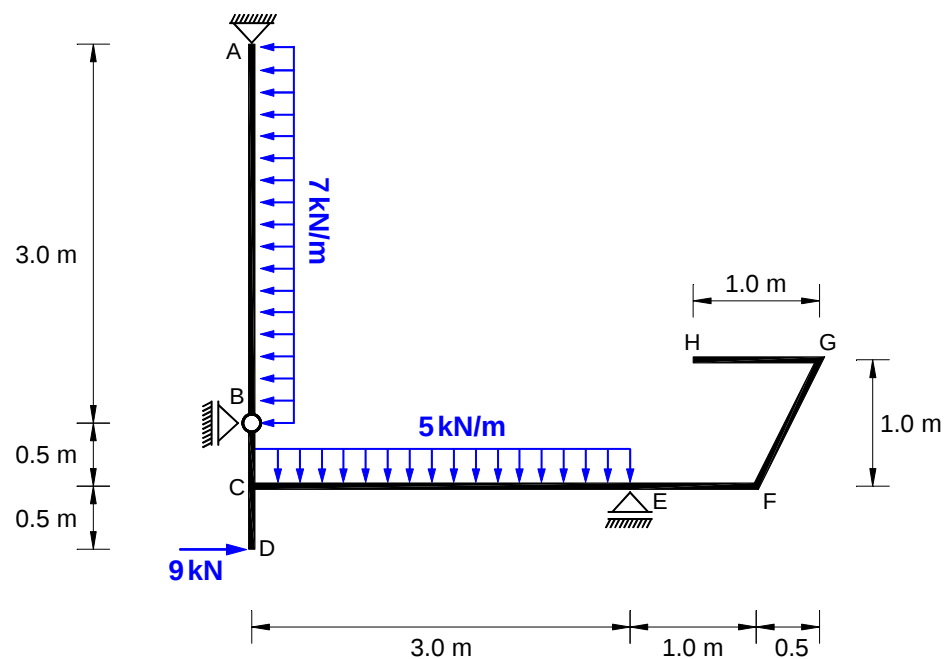


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS



DEFORMAÇÃO (FLEXÃO PLANA)

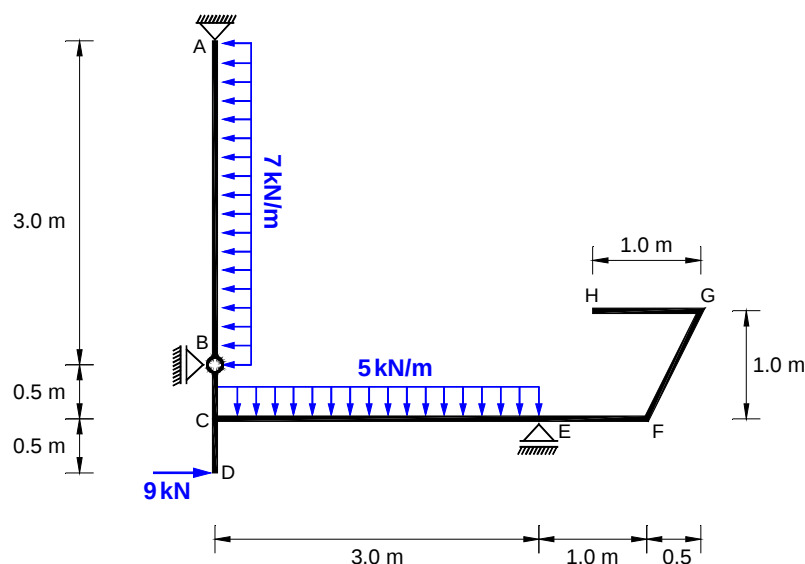
INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

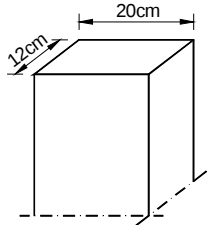
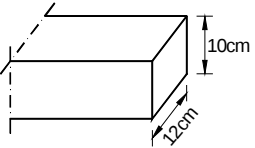
RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO

ISABEL ALVIM TELES

ENUNCIADO

Considere a estrutura representada na figura.



CARACTERÍSTICAS DAS BARRAS		
Barras AB, BC e CD	$E = 50 \text{ GPa}$	Secção: 
Barras CE, EF, FG e GH	$E = 100 \text{ GPa}$	Secção: 

Resolva as alíneas seguintes desprezando a deformabilidade axial das barras.

- Determine o deslocamento linear máximo do tramo **AB**;
- Determine o deslocamento angular e deslocamento linear da secção **C**;
- Determine o deslocamento angular e linear de uma secção da barra **CE** que dista **0,8 m** de **C**;
- Determine o deslocamento angular e deslocamento linear da secção **D**;
- Determine a rotação das barras **AB** e **BC** em torno da rótula **B**;
- Esboce a deformada da estrutura, indicando os deslocamentos na barra **CE**;
- Determine o deslocamento linear da secção **H**;
- Determine a intensidade e sentido do momento a aplicar em **C** que actuando conjuntamente com as acções ilustradas na figura, provoca um deslocamento vertical da secção **G** de 2mm ($\downarrow$).

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

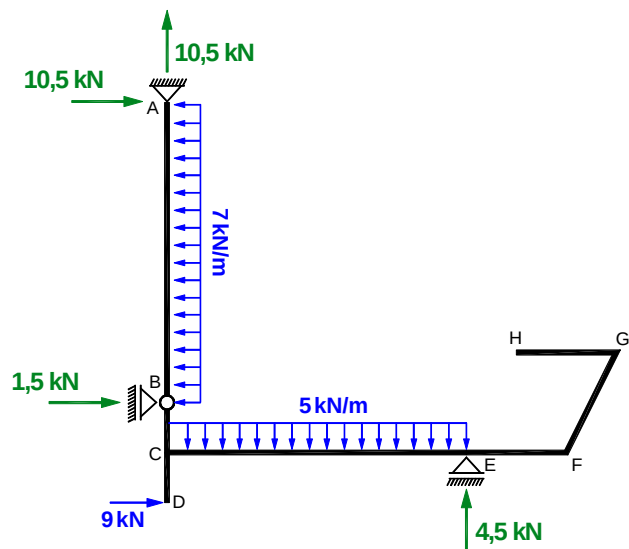
ISABEL ALVIM TELES

RESOLUÇÃO

Cálculo das reacções

$$\begin{aligned} \text{Toda a estrutura} \quad & \begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A + H_B - 21 + 9 = 0 \\ V_A + V_E = 15 \\ 21 \times 1,5 - 3H_A + 9 \times 1 - 15 \times 1,5 + 3V_E = 0 \end{cases} \\ \text{Corpo AB} \quad & \sum M_B = 0 \Rightarrow 21 \times 1,5 - 3H_A = 0 \end{aligned}$$

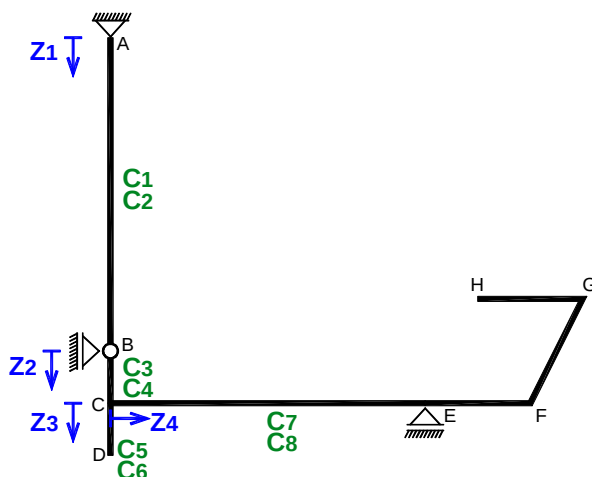
$$\text{Reacções} \quad \begin{cases} H_A = 10,5 \text{ kN} \quad (\rightarrow) \\ V_A = 10,5 \text{ kN} \quad (\uparrow) \\ H_B = 1,5 \text{ kN} \quad (\rightarrow) \\ V_E = 4,5 \text{ kN} \quad (\uparrow) \end{cases}$$



Características das barras

$$\begin{aligned} \text{Barras AB, BC, CD} \quad & \begin{cases} b = 0,12 \text{ m} \\ h = 0,20 \text{ m} \end{cases} \quad E = 50 \text{ GPa} \quad EI = 50 \times 10^6 \times \frac{0,12 \times 0,20^3}{12} = 4000 \text{ kNm}^2 \\ \text{Barras CE, EF, FG, GH} \quad & \begin{cases} b = 0,12 \text{ m} \\ h = 0,10 \text{ m} \end{cases} \quad E = 100 \text{ GPa} \quad EI = 100 \times 10^6 \times \frac{0,12 \times 0,10^3}{12} = 1000 \text{ kNm}^2 \end{aligned}$$

Referenciais e constantes de integração



$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{M(z)}{EI} \\ EI y' &= -\int_0^z M(z) dz + C_1 \\ EI y &= -\int_0^z \int_0^z M(z) dz + C_1 z + C_2 \end{aligned}$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

ISABEL ALVIM TELES

a) Deslocamento linear máximo do tramo AB

$$\begin{array}{l|l} \text{Tramo AB} & \begin{aligned} M(z_1) &= 10,5 Z_1 - 3,5 Z_1^2 \\ EI y'' &= 3,5 Z_1^2 - 10,5 Z_1 \\ EI y' &= \frac{3,5}{3} Z_1^3 - \frac{10,5}{2} Z_1^2 + C_1 \\ EI y &= \frac{3,5}{12} Z_1^4 - \frac{10,5}{6} Z_1^3 + C_1 Z_1 + C_2 \end{aligned} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{Condições fronteira} & \begin{aligned} y_A^{AB} = 0 &\Rightarrow C_2 = 0 \\ y_B^{AB} = 0 &\Rightarrow \frac{3,5}{12} 3^4 - \frac{10,5}{6} 3^3 + 3 C_1 + 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 7,875 \end{aligned} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{Tramo AB} & \begin{aligned} \theta = y' &= \frac{1}{4000} \left(\frac{3,5}{3} Z_1^3 - \frac{10,5}{2} Z_1^2 + 7,875 \right) \\ \delta = y &= \frac{1}{4000} \left(\frac{3,5}{12} Z_1^4 - \frac{10,5}{6} Z_1^3 + 7,875 Z_1 \right) \end{aligned} \end{array}$$

Deslocamento linear máximo $\Rightarrow y' = 0$

$$y' = \frac{1}{4000} \left(\frac{3,5}{3} Z_1^3 - \frac{10,5}{2} Z_1^2 + 7,875 \right) = 0 \Rightarrow \frac{3,5}{3} Z_1^3 - \frac{10,5}{2} Z_1^2 + 7,875 = 0 \Rightarrow Z_1 = 1,5 \text{ m}$$

$$\delta_{\text{máx}} = y_{(Z_1=1,5)} = \frac{1}{4000} \left(\frac{3,5}{12} 1,5^4 - \frac{10,5}{6} 1,5^3 + 7,875 \times 1,5 \right) = 1,846 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,846 \text{ mm} (\leftarrow)$$

b) Deslocamento angular e deslocamento linear da secção C

$$\begin{array}{l|l} \text{Tramo CE} & \begin{aligned} M(z_4) &= -9 + 10,5 Z_4 - 2,5 Z_4^2 \\ EI y'' &= 2,5 Z_4^2 - 10,5 Z_4 + 9 \\ EI y' &= \frac{2,5}{3} Z_4^3 - \frac{10,5}{2} Z_4^2 + 9 Z_4 + C_7 \\ y' &= \frac{1}{1000} \left(\frac{2,5}{3} Z_4^3 - \frac{10,5}{2} Z_4^2 + 9 Z_4 + C_7 \right) \\ EI y &= \frac{2,5}{12} Z_4^4 - \frac{10,5}{6} Z_4^3 + 4,5 Z_4^2 + C_7 Z_4 + C_8 \\ y &= \frac{1}{1000} \left(\frac{2,5}{12} Z_4^4 - \frac{10,5}{6} Z_4^3 + 4,5 Z_4^2 + C_7 Z_4 + C_8 \right) \end{aligned} \end{array}$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

ISABEL ALVIM TELES

Condições fronteira $\left| \begin{array}{l} y_C^{CE} = 0 \Rightarrow C_8 = 0 \\ y_E^{CE} = 0 \Rightarrow \frac{2,5}{12} 3^4 - \frac{10,5}{6} 3^3 + 4,5 \times 3^2 + 3 C_7 + 0 = 0 \Rightarrow C_7 = -3,375 \end{array} \right.$

Tramo CE $\left| \begin{array}{l} \theta = y' = \frac{1}{1000} \left(\frac{2,5}{3} Z_4^3 - \frac{10,5}{2} Z_4^2 + 9 Z_4 - 3,375 \right) \\ \delta = y = \frac{1}{1000} \left(\frac{2,5}{12} Z_4^4 - \frac{10,5}{6} Z_4^3 + 4,5 Z_4^2 - 3,375 Z_4 \right) \end{array} \right.$

Tramo BC $\left| \begin{array}{l} M(Z_2) = -9Z_2 \\ EI y'' = 9Z_2 \\ EI y' = \frac{9}{2} Z_2^2 + C_3 \Rightarrow y' = \frac{1}{4000} (4,5 Z_2^2 + C_3) \\ EI y = \frac{9}{6} Z_2^3 + C_3 Z_2 + C_4 \Rightarrow y = \frac{1}{4000} (1,5 Z_2^3 + C_3 Z_2 + C_4) \end{array} \right.$

Condições fronteira $\left| \begin{array}{l} y_B^{BC} = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \\ \theta_C^{BC} = \theta_C^{CE} \Rightarrow \frac{1}{4000} (4,5 Z_2^2 + C_3) = \frac{1}{1000} \left(\frac{2,5}{3} Z_4^3 - \frac{10,5}{2} Z_4^2 + 9 Z_4 - 3,375 \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{4000} (4,5 \times 0,5^2 + C_3) = -\frac{3,375}{1000} \Rightarrow C_3 = -14,625 \end{array} \right.$

Tramo BC $\left| \begin{array}{l} \theta = y' = \frac{1}{4000} (4,5 Z_2^2 - 14,625) \\ \delta = y = \frac{1}{4000} (1,5 Z_2^3 - 14,625 Z_2) \end{array} \right.$

Secção C $\left| \begin{array}{l} \theta_C^{BC} = \theta_{(Z_2=0,5)}^{BC} = \frac{1}{4000} (4,5 \times 0,5^2 - 14,625) = -3,375 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \curvearrowright \\ \text{ou } \theta_C^{CE} = \theta_{(Z_4=0)}^{CE} = -\frac{3,375}{1000} = -3,375 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \triangleleft \\ \delta_{\text{horiz}} = y_C^{BC} = \frac{1}{4000} (1,5 \times 0,5^3 - 14,625 \times 0,5) = -1,78125 \times 10^{-3} \text{ m} = -1,78125 \text{ mm } (\rightarrow) \\ \delta_{\text{vert}} = 0 \end{array} \right.$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

ISABEL ALVIM TELES

c) Deslocamento angular e linear de uma secção da barra CE que dista 0,80 m de C

Secção E

$$\theta_{(Z_4=0,8)}^{CE} = \frac{1}{1000} \left(\frac{2,5}{3} 0,8^3 - \frac{10,5}{2} 0,8^2 + 9 \times 0,8 - 3,375 \right) = 0,892 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \curvearrowright$$

$$\delta_{\text{horiz}} = y_C^{BC} = -1,78125 \times 10^{-3} \text{ m} = -1,78125 \text{ mm} (\rightarrow)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{vert}} = y_{(Z_4=0,8)}^{CE} &= \frac{1}{1000} \left(\frac{2,5}{12} 0,8^4 - \frac{10,5}{6} 0,8^3 + 4,5 \times 0,8^2 - 3,375 \times 0,8 \right) = \\ &= -0,631 \times 10^{-3} \text{ m} = -0,631 \text{ mm} (\uparrow) \end{aligned}$$

d) Deslocamento angular e deslocamento linear da secção D

Tramo CD

$$M(Z_3) = 4,5 - 9Z_3$$

$$EI y'' = 9Z_3 - 4,5$$

$$EI y' = \frac{9}{2} Z_3^2 - 4,5Z_3 + C_5 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{4000} \left(\frac{9}{2} Z_3^2 - 4,5Z_3 + C_5 \right)$$

$$EI y = \frac{9}{6} Z_3^3 - \frac{4,5}{2} Z_3^2 + C_5 Z_3 + C_6 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4000} \left(\frac{9}{6} Z_3^3 - \frac{4,5}{2} Z_3^2 + C_5 Z_3 + C_6 \right)$$

Condições fronteira

$$y_C^{CD} = y_C^{BC} \Rightarrow \frac{C_6}{4000} = \frac{1}{4000} (1,5 \times 0,5^3 - 14,625 \times 0,5) \Rightarrow C_6 = -7,125$$

$$\theta_C^{CD} = \theta_C^{BC} \Rightarrow \frac{C_5}{4000} = \frac{1}{4000} (4,5 Z_3^2 - 14,625) \Rightarrow C_5 = -13,5$$

Tramo CD

$$\theta = y' = \frac{1}{4000} (4,5 Z_3^2 - 4,5 Z_3 - 13,5)$$

$$\delta = y = \frac{1}{4000} \left(1,5 Z_3^3 - \frac{4,5}{2} Z_3^2 - 13,5 Z_3 - 7,125 \right)$$

Secção D

$$\theta_D^{CD} = \theta_{(Z_3=0,5)}^{CD} = \frac{1}{4000} (4,5 \times 0,5^2 - 4,5 \times 0,5 - 13,5) = -3,65625 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \curvearrowright$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{horiz}} = y_D^{CD} &= \frac{1}{4000} \left(1,5 \times 0,5^3 - \frac{4,5}{2} \times 0,5^2 - 13,5 \times 0,5 - 7,125 \right) = -3,5625 \times 10^{-3} \text{ m} = \\ &= -3,5625 \text{ mm} (\rightarrow) \end{aligned}$$

$$\delta_{\text{vert}} = 0$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

ISABEL ALVIM TELES

e) Rotação das barras AB e BC em torno da rótula B

Barra AB $\theta_B^{AB} = \gamma'_{(z_1=3)} = \frac{1}{4000} \left(\frac{3,5}{3} 3^3 - \frac{10,5}{2} 3^2 + 7,875 \right) = -1,969 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 

Barra BC $\theta_B^{BC} = \gamma'_{(z_2=0)} = \frac{1}{4000} (4,5 Z_2^2 - 14,625) = -3,656 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 

f) Deformada da estrutura

Secção C

$$\theta_C^{CE} = \theta_{(z_4=0)}^{CE} = -\frac{3,375}{1000} = -3,375 \times 10^{-3} \text{ rad}$$


$$\delta_{\text{horiz}} = \gamma_C^{BC} = \frac{1}{4000} (1,5 \times 0,5^3 - 14,625 \times 0,5) = -1,78125 \times 10^{-3} \text{ m} = -1,78125 \text{ mm } (\rightarrow)$$

$$\delta_{\text{vert}} = 0$$

Secção E

$$\theta_E^{CE} = \theta_{(z_4=3)}^{CE} = \frac{1}{1000} \left(\frac{2,5}{3} 3^3 - \frac{10,5}{2} 3^2 + 9 \times 3 - 3,375 \right) = -1,125 \times 10^{-3} \text{ rad}$$


$$\delta_{\text{horiz}} = \gamma_C^{BC} = -1,78125 \times 10^{-3} \text{ m} = -1,78125 \text{ mm } (\rightarrow)$$

$$\delta_{\text{vert}} = 0$$

Deslocamento linear máximo $\Rightarrow \gamma' = 0$

$$\gamma' = \frac{1}{1000} \left(\frac{2,5}{3} Z_4^3 - \frac{10,5}{2} Z_4^2 + 9 Z_4 - 3,375 \right) = 0 \Rightarrow \frac{2,5}{3} Z_4^3 - \frac{10,5}{2} Z_4^2 + 9 Z_4 - 3,375 = 0$$

$$\Rightarrow Z_4 = 0,51939 \text{ m} \quad \text{e} \quad Z_4 = 2,14448 \text{ m}$$

$$\delta_{\text{máx}} = \gamma_{(Z_4=0,52)} = \frac{1}{1000} \left(\frac{2,5}{12} Z_4^4 - \frac{10,5}{6} Z_4^3 + 4,5 Z_4^2 - 3,375 Z_4 \right) = -0,769 \times 10^{-3} \text{ m} = -0,769 \text{ mm } (\uparrow)$$

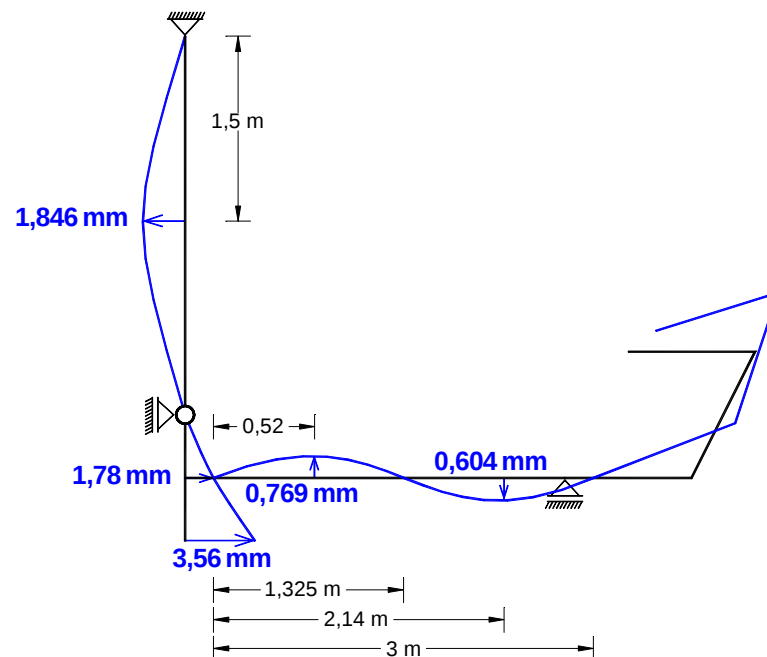
$$\delta_{\text{máx}} = \gamma_{(Z_4=2,14)} = \frac{1}{1000} \left(\frac{2,5}{12} Z_4^4 - \frac{10,5}{6} Z_4^3 + 4,5 Z_4^2 - 3,375 Z_4 \right) = 0,6044 \times 10^{-3} \text{ m} = 0,6044 \text{ mm } (\downarrow)$$

$$\delta = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{1000} \left(\frac{2,5}{12} Z_4^4 - \frac{10,5}{6} Z_4^3 + 4,5 Z_4^2 - 3,375 Z_4 \right) = 0 \Rightarrow Z_4 = 1,325 \text{ m}$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

ISABEL ALVIM TELES



g) Deslocamento linear da secção H

$$\theta_E^{CE} = -1,125 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\text{tg } \theta_E \approx \theta_E$$

$$\alpha \begin{cases} \cos \alpha = \frac{0,5}{\sqrt{1,25}} \\ \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1,25}} \end{cases}$$

$$\frac{\delta_H}{\sqrt{1,25}} = \text{tg } \theta_E \approx \theta_E$$

$$\frac{\delta_H}{\sqrt{1,25}} = 1,125 \times 10^{-3}$$

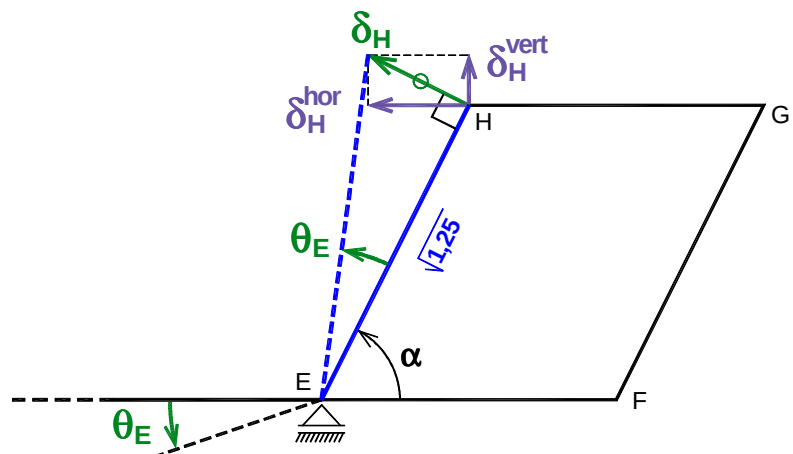
$$\delta_H = \sqrt{1,25} \times 1,125 \times 10^{-3} = 1,258 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,258 \text{ mm} \quad (\leftarrow)$$

$$\delta_H^{\text{vert}} = \delta_H \cos \alpha = \sqrt{1,25} \times 1,125 \times 10^{-3} \times \frac{0,5}{\sqrt{1,25}} = 0,5625 \times 10^{-3} \text{ m} = 0,5625 \text{ mm} \quad (\uparrow)$$

$$\delta_H^{\text{hor, total}} = \delta_C + \delta_H^{\text{hor}} =$$

$$= 1,78125 \text{ mm} (\rightarrow) + \delta_H \sin \alpha (\leftarrow) =$$

$$= 1,78125 \text{ mm} - \sqrt{1,25} \times 1,125 \times 10^{-3} \times \frac{1}{\sqrt{1,25}} = 0,65625 \times 10^{-3} \text{ m} = 0,65625 \text{ mm} (\rightarrow)$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

ISABEL ALVIM TELES

- h) Momento em C que juntamente com as restantes cargas provoca um deslocamento vertical da G igual a 2mm (↓)

Deslocamento da secção G devido as cargas iniciais

$$\theta_E^{CE} = -1,125 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \nabla$$

$$\text{tg } \theta_E \approx \theta_E$$

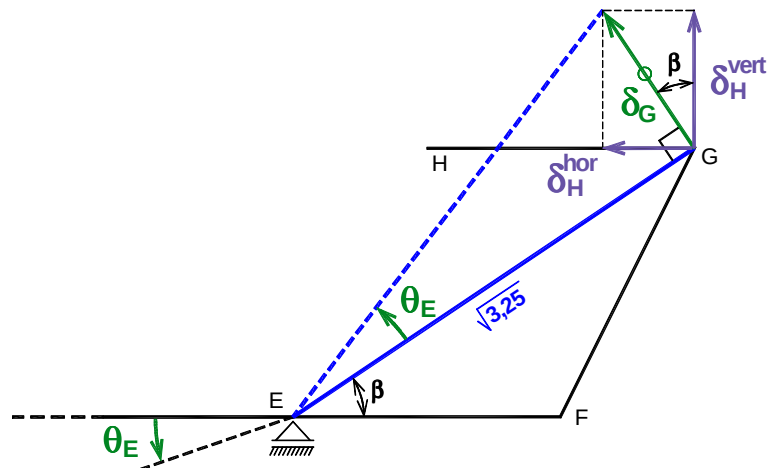
$$\beta \begin{cases} \cos \beta = \frac{1,5}{\sqrt{3,25}} \\ \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3,25}} \end{cases}$$

$$\frac{\delta_G}{\sqrt{3,25}} = \text{tg } \theta_E \approx \theta_E$$

$$\frac{\delta_G}{\sqrt{3,25}} = 1,125 \times 10^{-3}$$

$$\delta_G = \sqrt{3,25} \times 1,125 \times 10^{-3} = 2,028 \times 10^{-3} \text{ m} = 2,028 \text{ mm}$$

$$\delta_G^{\text{vert}} = \delta_G \cos \beta = \sqrt{3,25} \times 1,125 \times 10^{-3} \times \frac{1,5}{\sqrt{3,25}} = 1,6875 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,6875 \text{ mm} (\uparrow)$$



Para que a secção **G** tenha um deslocamento vertical de 2 mm (↓), o **momento M** a actuar em **C** deverá introduzir um deslocamento vertical de **3,6875 mm (↓)**.

Relação entre deslocamento vertical de G e rotação em E

$$\frac{\delta_G}{\sqrt{3,25}} = \theta_E \Rightarrow \delta_G = \sqrt{3,25} \theta_E$$

$$\delta_G^{\text{vert}} = \delta_G \cos \beta = \sqrt{3,25} \theta_E \times \frac{1,5}{\sqrt{3,25}} \Rightarrow \delta_G^{\text{vert}} = \theta_E \times 1,5 \Rightarrow \theta_E = \frac{\delta_G^{\text{vert}}}{1,5}$$

$$\theta_E^{CE} \nabla \Rightarrow \delta_G^{\text{vert}} (\uparrow)$$

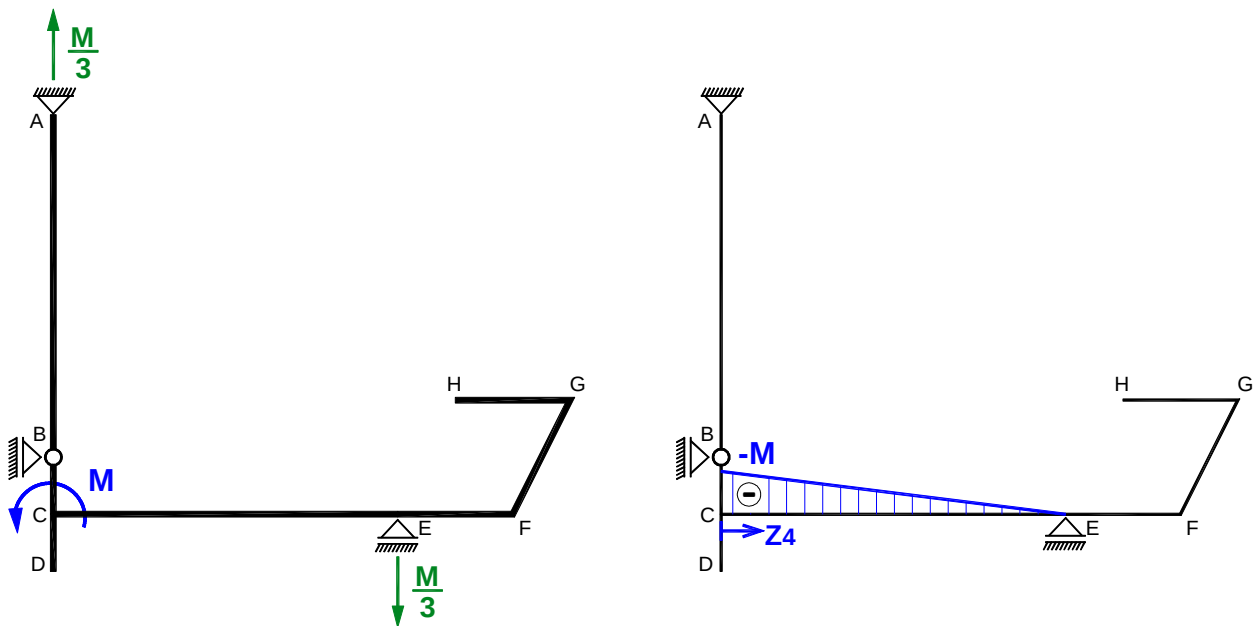
$$\delta_G^{\text{vert}} = 3,6875 \times 10^{-3} \text{ m} (\downarrow) \Rightarrow \theta_E^{CE} = \frac{\delta_G^{\text{vert}}}{1,5} = 2,458 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \nabla$$

O **momento M** a actuar em **C** deverá introduzir uma rotação em **E** de valor: **$\theta_E = 2,458 \times 10^{-3} \text{ rad}$** .

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

ISABEL ALVIM TELES



Tramo CE

$$M(z_4) = -M + \frac{M}{3}z_4$$

$$EI y'' = -\frac{M}{3}z_4 + M$$

$$EI y' = -\frac{M}{6}z_4^2 + M z_4 + C_1$$

$$EI y = -\frac{M}{18}z_4^3 + \frac{M}{2}z_4^2 + C_1 z_4 + C_2$$

Condições fronteira

$$y_{C(z_4=0)}^{CE} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y_E^{CE}(z_4=3) = 0 \Rightarrow -\frac{M}{18}3^3 + \frac{M}{2}3^2 + 3 C_1 + 0 = 0 \Rightarrow C_1 = -M$$

Tramo CE

$$\theta = y' = \frac{1}{1000} \left(-\frac{M}{6}z_4^2 + M z_4 - M \right)$$

$$\delta = y = \frac{1}{1000} \left(-\frac{M}{18}z_4^3 + \frac{M}{2}z_4^2 - M z_4 \right)$$

$$\theta_E = 2,458 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_E^{CE}(z_4=3) = \frac{1}{1000} \left(-\frac{M}{6}3^2 + 3 M - M \right) = 2,458 \times 10^{-3} \Rightarrow M = 4,916 \text{ kNm (U)}$$