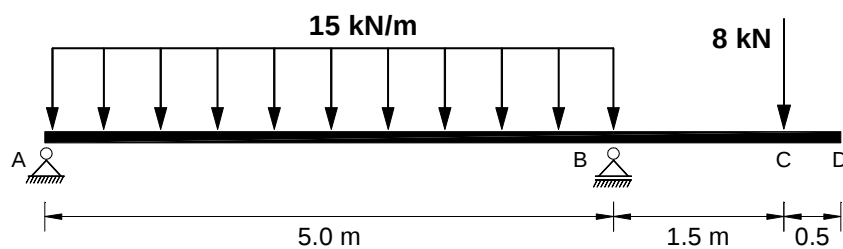


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS



DEFORMAÇÃO DE VIGAS (FLEXÃO PLANA)

INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO

ISABEL ALVIM TELES

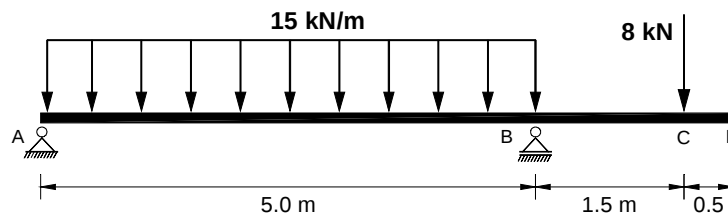
RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO DE VIGAS – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

ISABEL ALVIM TELES

ENUNCIADO

Considere a viga representada na figura, constituída por um perfil metálico IPN220 ($E_{aço} = 200 \text{ GPa}$).



Determine:

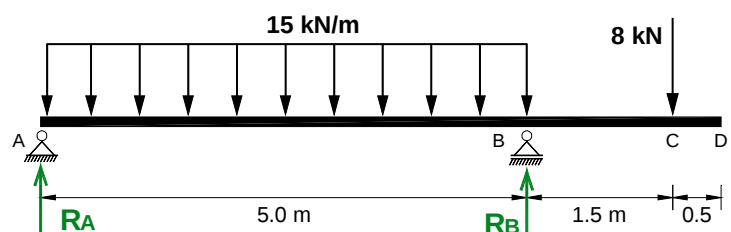
- Deslocamento angular da secção A;
- Deslocamento angular da secção B;
- Deslocamento angular e deslocamento linear da secção a meio do troço AB;
- Deslocamento linear máximo do troço AB;
- Deslocamento angular e linear na secção C;
- Deslocamento angular e linear na secção D;
- Determine a intensidade e sentido da força vertical a aplicar na secção D para que o deslocamento linear desse ponto se anule;
- Determine a intensidade e sentido da força vertical a aplicar na secção D para que o deslocamento linear do ponto C se anule;
- Determine a intensidade e sentido do momento a aplicar em D para que o deslocamento linear da secção a meio do troço AB seja 5mm ($\uparrow$);
- Determine a intensidade e sentido do momento a aplicar em B para que a deformada nesse ponto seja tangente ao traçado da barra descarregada.

RESOLUÇÃO

Cálculo das reacções

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B = 47,9 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A = 35,1 \text{ kN } (\uparrow)$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO DE VIGAS – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

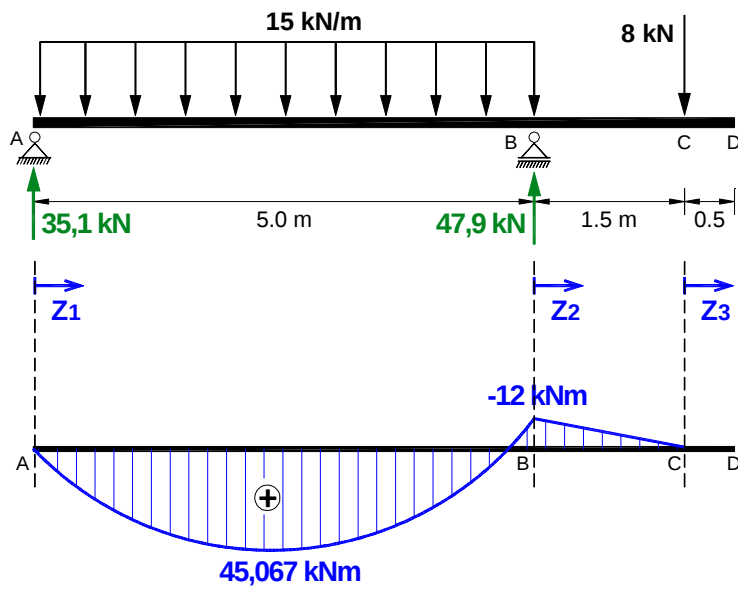
ISABEL ALVIM TELES

Diagrama de momentos flectores

Tramo AB $\begin{cases} V(z_1) = 35,1 - 15 Z_1 \\ M(z_1) = -7,5 Z_1^2 + 35,1 Z_1 \end{cases} \quad V(z_1) = 0 \Rightarrow Z_1 = 2,34 \text{ m} \Rightarrow M_{\text{máx}} = 41,067 \text{ kNm}$

Tramo BC $M(z_2) = 8 Z_2 - 12$

Tramo CD $M(z_3) = 0$



$$y'' = -\frac{M(z)}{EI}$$

$$EI y' = -\int_0^z M(z) dz + C_1$$

$$EI y = -\int_0^z \int_0^z M(z) dz + C_1 Z + C_2$$

$$\text{IPN 220} \Rightarrow I_{xG} = 3060 \text{ cm}^4 = 30,60 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^6 \text{ kPa}$$

$$EI = 6120 \text{ kNm}^2$$

Tramo AB

$$M(z_1) = -7,5 Z_1^2 + 35,1 Z_1$$

$$EI y'' = 7,5 Z_1^2 - 35,1 Z_1$$

$$EI y' = \frac{7,5}{3} Z_1^3 - \frac{35,1}{2} Z_1^2 + C_1$$

$$EI y = \frac{7,5}{12} Z_1^4 - \frac{35,1}{6} Z_1^3 + C_1 Z_1 + C_2$$

Tramo BC

$$M(z_2) = 8 Z_2 - 12$$

$$EI y'' = -8 Z_2 + 12$$

$$EI y' = -4 Z_2^2 + 12 Z_2 + C_3$$

$$EI y = -\frac{4}{3} Z_2^3 + 6 Z_2^2 + C_3 Z_2 + C_4$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO DE VIGAS – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

ISABEL ALVIM TELES

Tramo CD

$$\begin{aligned} M(z_3) &= 0 \\ EI y'' &= 0 \\ EI y' &= C_5 \\ EI y &= C_5 z_3 + C_6 \end{aligned}$$

Condições fronteira

$$\begin{aligned} y_A^{AB} = 0 &\Rightarrow C_2 = 0 \\ y_B^{AB} = 0 &\Rightarrow \frac{7,5}{12} 5^4 - \frac{35,1}{6} 5^3 + C_1 z_1 + 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 68,125 \\ y_B^{BC} = 0 &\Rightarrow C_4 = 0 \\ \theta_B^{AB} = \theta_B^{BC} &\Rightarrow \frac{7,5}{3} 5^3 - \frac{35,1}{2} 5^2 + 68,125 = C_3 \Rightarrow C_3 = -58,125 \\ y_C^{BC} = y_C^{CD} &\Rightarrow -\frac{4}{3} 1,5^3 + 61,5^2 - 58,125 \times 1,5 + 0 = C_6 \Rightarrow C_6 = -78,1875 \\ \theta_C^{BC} = \theta_C^{CD} &\Rightarrow -4 \times 1,5^2 + 12 \times 1,5 z_2 - 58,125 = C_5 \Rightarrow C_5 = -49,125 \end{aligned}$$

Tramo AB

$$\begin{aligned} \theta = y' &= \frac{1}{6120} \left(\frac{7,5}{3} z_1^3 - \frac{35,1}{2} z_1^2 + 68,125 \right) \\ \delta = y &= \frac{1}{6120} \left(\frac{7,5}{12} z_1^4 - \frac{35,1}{6} z_1^3 + 68,125 z_1 \right) \end{aligned}$$

Tramo BC

$$\begin{aligned} \theta = y' &= \frac{1}{6120} \left(-4 z_2^2 + 12 z_2 - 58,125 \right) \\ \delta = y &= \frac{1}{6120} \left(-\frac{4}{3} z_2^3 + 6 z_2^2 - 58,125 z_2 \right) \end{aligned}$$

Tramo CD

$$\begin{aligned} \theta = y' &= \frac{-49,125}{6120} = -8,03 \times 10^{-3} \\ \delta = y &= \frac{1}{6120} (-49,125 z_3 - 78,1875) \end{aligned}$$

a) Deslocamento angular da secção A

$$\theta_A = y'_{A(z_1=0)} = \frac{68,125}{6120} = 11,13 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \nabla$$

b) Deslocamento angular da secção B

$$\theta_B^{AB} = y'_{B(z_1=5)} = \frac{1}{6120} \left(\frac{7,5}{3} 5^3 - \frac{35,1}{2} 5^2 + 68,125 \right) = -9,50 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \nabla$$

$$\text{ou } \theta_B^{BC} = y'_{B(z_2=0)} = \frac{1}{6120} (-4 \times 0 + 12 \times 0 - 58,125) = -9,50 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \nabla$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO DE VIGAS – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

ISABEL ALVIM TELES

c) Deslocamento angular e deslocamento linear da secção a meio do troço AB

$$\theta_{\text{meio vão}} = \gamma'_{(z_1=2,5)} = \frac{1}{6120} \left(\frac{7,5}{3} 2,5^3 - \frac{35,1}{2} 2,5^2 + 68,125 \right) = -0,408 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \triangleleft$$

$$\delta_{\text{meio vão}} = \gamma_{(z_1=2,5)} = \frac{1}{6120} \left(\frac{7,5}{12} 2,5^4 - \frac{35,1}{6} 2,5^3 + 68,125 \times 2,5 \right) = 1,688 \times 10^{-2} \text{ m} = 1,688 \text{ cm} \quad (\downarrow)$$

d) Deslocamento linear máximo do troço AB

Deslocamento linear máximo $\Rightarrow \gamma' = 0$

$$\gamma' = \frac{1}{6120} \left(\frac{7,5}{3} z_1^3 - \frac{35,1}{2} z_1^2 + 68,125 \right) = 0 \Rightarrow \frac{7,5}{3} z_1^3 - \frac{35,1}{2} z_1^2 + 68,125 = 0 \Rightarrow z_1 = 2,4389 \text{ m}$$

$$\delta_{\text{máx}} = \gamma_{(z_1=2,4389)} = \frac{1}{6120} \left(\frac{7,5}{12} 2,4389^4 - \frac{35,1}{6} 2,4389^3 + 68,125 \times 2,4389 \right) = 1,689 \times 10^{-2} \text{ m} = 1,689 \text{ cm} \quad (\downarrow)$$

e) Deslocamento angular e deslocamento linear da secção C

$$\theta_{\text{C}}^{\text{BC}} = \gamma'_{(z_2=1,5)} = \frac{1}{6120} \left(-4 \times 1,5^2 + 12 \times 1,5 - 58,125 \right) = -8,03 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \nabla$$

$$\delta_{\text{C}}^{\text{BC}} = \gamma_{(z_2=1,5)} = \frac{1}{6120} \left(-\frac{4}{3} \times 1,5^3 + 6 \times 1,5^2 - 58,125 \times 1,5 \right) = -1,28 \times 10^{-2} \text{ m} = -1,28 \text{ cm} \quad (\uparrow)$$

ou

$$\theta_{\text{C}}^{\text{CD}} = \gamma'_{(z_3=0)} = -8,03 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \triangleleft$$

$$\delta_{\text{C}}^{\text{CD}} = \gamma_{(z_3=0)} = \frac{1}{6120} \left(-49,125 \times 0 - 78,1875 \right) = -1,28 \times 10^{-2} \text{ m} = -1,28 \text{ cm} \quad (\uparrow)$$

f) Deslocamento angular e deslocamento linear da secção D

$$\theta_{\text{D}} = -8,03 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \nabla$$

$$\delta_{\text{D}} = \gamma_{(z_3=0,5)} = \frac{1}{6120} \left(-49,125 \times 0,5 - 78,1875 \right) = -1,68 \times 10^{-2} \text{ m} = -1,68 \text{ cm} \quad (\uparrow)$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO DE VIGAS – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

ISABEL ALVIM TELES

g) Força vertical a aplicar na secção D para que o deslocamento linear desse ponto se anule

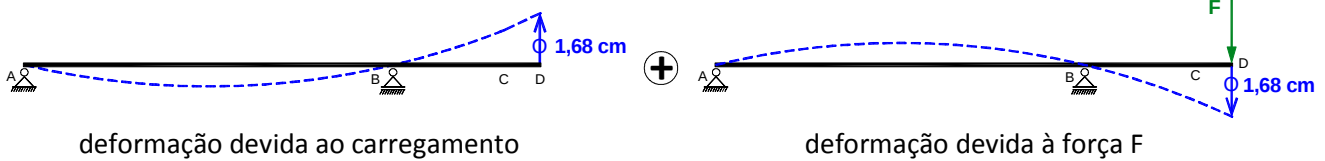
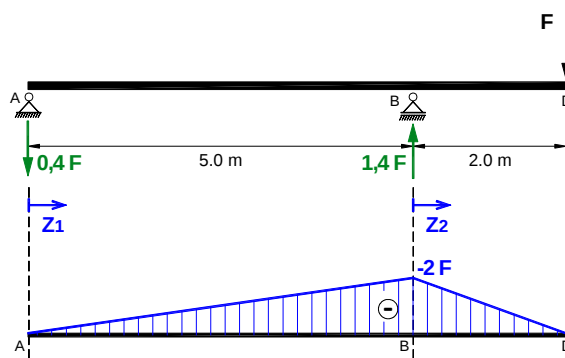


Diagrama de momentos flectores



Tramo AB

$$\begin{aligned} M(z_1) &= -0,4 F \times z_1 \\ EI y'' &= 0,4 F \times z_1 \\ EI y' &= 0,2 F \times z_1^2 + C_1 \\ EI y &= \frac{0,2}{3} F \times z_1^3 + C_1 z_1 + C_2 \end{aligned}$$

Tramo BD

$$\begin{aligned} M(z_2) &= -2 F + F \times z_2 \\ EI y'' &= -F \times z_2 + 2 F \\ EI y' &= -\frac{F}{2} z_2^2 + 2 F \times z_2 + C_3 \\ EI y &= -\frac{F}{6} z_2^3 + F \times z_2^2 + C_3 z_2 + C_4 \end{aligned}$$

Condições fronteira

$$\begin{aligned} y_A^{AB} &= 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ y_B^{AB} &= 0 \Rightarrow \frac{0,2}{3} F \times 5^3 + C_1 \times 5 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{5}{3} F \\ y_B^{BD} &= 0 \Rightarrow C_4 = 0 \\ \theta_B^{AB} &= \theta_B^{BD} \Rightarrow 0,2 F \times 5^2 + -\frac{5}{3} F = C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{10}{3} F \end{aligned}$$

Tramo BD

$$\delta = y = \frac{1}{6120} \left(-\frac{F}{6} z_2^3 + F \times z_2^2 + \frac{10}{3} F \times z_2 \right)$$

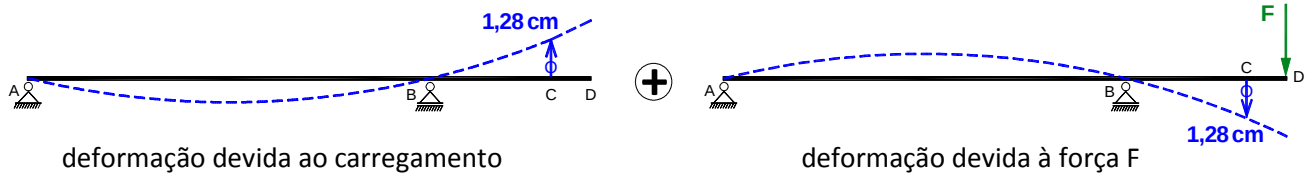
$$\delta_D = y_{(z_2=2)} = \frac{1}{6120} \left(-\frac{F}{6} 2^3 + F \times 2^2 + \frac{10}{3} F \times 2 \right) = 1,68 \times 10^{-2} \Rightarrow F = 11,016 \text{ kN } (\downarrow)$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO DE VIGAS – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

ISABEL ALVIM TELES

h) Força vertical a aplicar na secção D para que o deslocamento linear do ponto C se anule



$$\text{Tramo BD} \quad \delta = y = \frac{1}{6120} \left(-\frac{F}{6} Z_2^3 + F \times Z_2^2 + \frac{10}{3} F \times Z_2 \right)$$

$$\delta_C = y_{(Z_2=1,5)} = \frac{1}{6120} \left(-\frac{F}{6} 1,5^3 + F \times 1,5^2 + \frac{10}{3} F \times 1,5 \right) = 1,28 \times 10^{-2} \Rightarrow F = 11,71 \text{ kN } (\downarrow)$$

i) Momento a aplicar na secção D para que o deslocamento da secção a meio de AB seja 5 mm (↑)

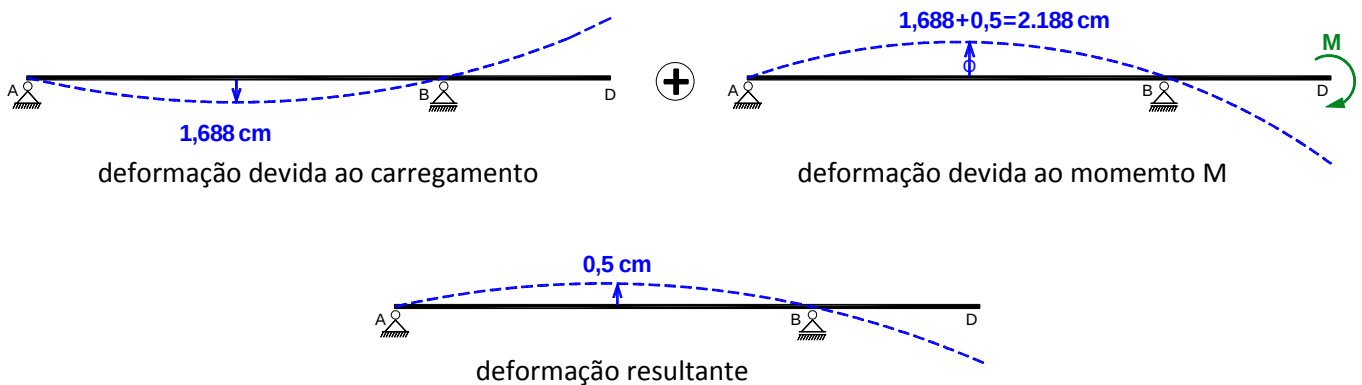
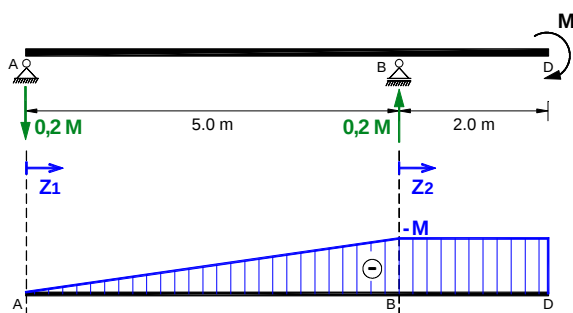


Diagrama de momentos flectores



$$\begin{aligned} \text{Tramo AB} \quad & M(Z_1) = -0,2 M \times Z_1 \\ & EI y'' = 0,2 M \times Z_1 \\ & EI y' = 0,1 M \times Z_1^2 + C_1 \\ & EI y = \frac{0,1}{3} M \times Z_1^3 + C_1 Z_1 + C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Condições fronteira} \quad & y_A^{AB} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ & y_B^{AB} = 0 \Rightarrow \frac{0,1}{3} M \times 5^3 + C_1 \times 5 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{2,5}{3} M \end{aligned}$$

$$\text{Tramo AB} \quad \delta = y = \frac{1}{6120} \left(\frac{0,1}{3} M \times Z_1^3 - \frac{2,5}{3} M \times Z_1 \right)$$

$$y_{(Z_1=2,5)} = \frac{1}{6120} \left(\frac{0,1}{3} M \times 2,5^3 - \frac{2,5}{3} M \times 2,5 \right) = 0,02188 \Rightarrow M = 85,7 \text{ kNm } (\curvearrowright)$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

DEFORMAÇÃO DE VIGAS – INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

ISABEL ALVIM TELES

j) **Momento a aplicar na secção B para que a def. em B seja tangente ao traçado da barra descarregada**

Deformada em B tangente ao traçado da barra descarregada $\Rightarrow \theta_B = 0$

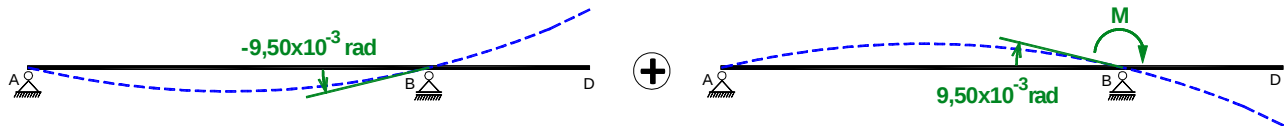
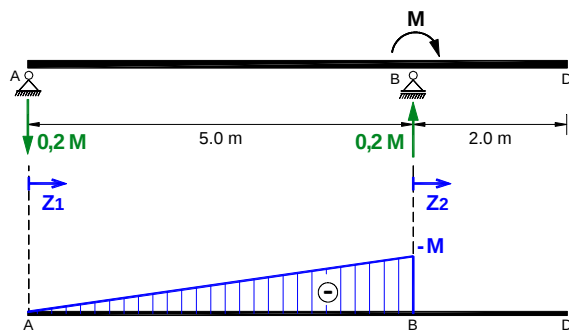


Diagrama de momentos flectores



Tramo AB

$$\begin{aligned} M(z_1) &= -0,2 M \times Z_1 \\ EI y'' &= 0,2 M \times Z_1 \\ EI y' &= 0,1 M \times Z_1^2 + C_1 \\ EI y &= \frac{0,1}{3} M \times Z_1^3 + C_1 Z_1 + C_2 \end{aligned}$$

Condições fronteira

$$\begin{aligned} y_A^{AB} &= 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ y_B^{AB} &= 0 \Rightarrow \frac{0,1}{3} M \times 5^3 + C_1 \times 5 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{2,5}{3} M \end{aligned}$$

Tramo AB

$$\theta = y' = \frac{1}{6120} \left(0,1 M \times Z_1^2 - \frac{2,5}{3} M \right)$$

$$\theta_B = y'(z_1=5) = \frac{1}{6120} \left(0,1 M \times 5^2 - \frac{2,5}{3} M \right) = 9,50 \times 10^{-3} \Rightarrow M = 34,88 \text{ kNm} \quad (\curvearrowright)$$