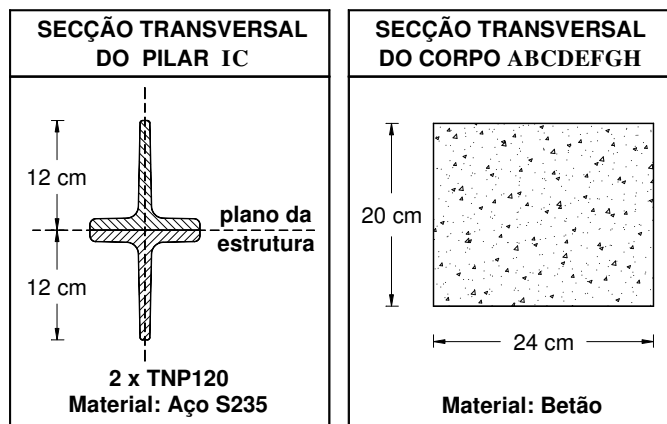
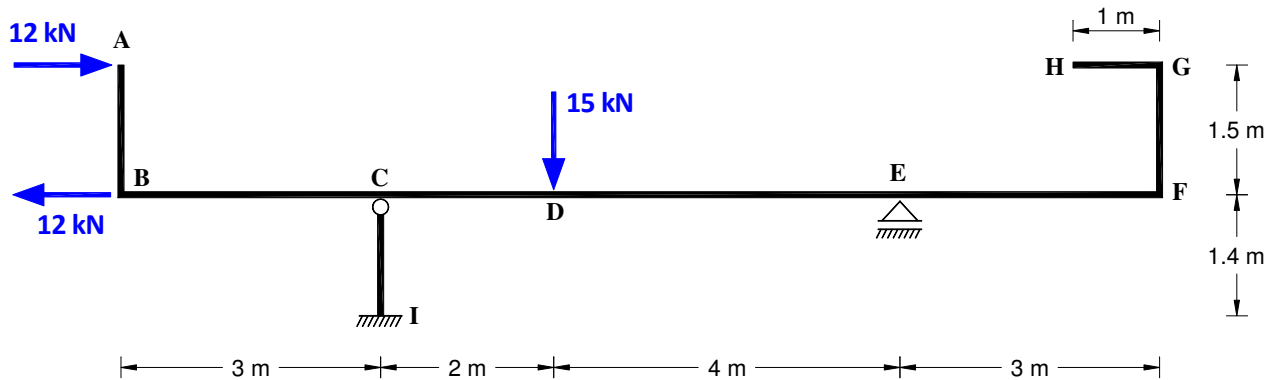


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS



RESOLUÇÃO DO EXAME DA ÉPOCA DE RECURSO (02/FEV/2017)

ENCURVADURA

DEFORMAÇÃO (INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA)

ISABEL ALVIM TELES

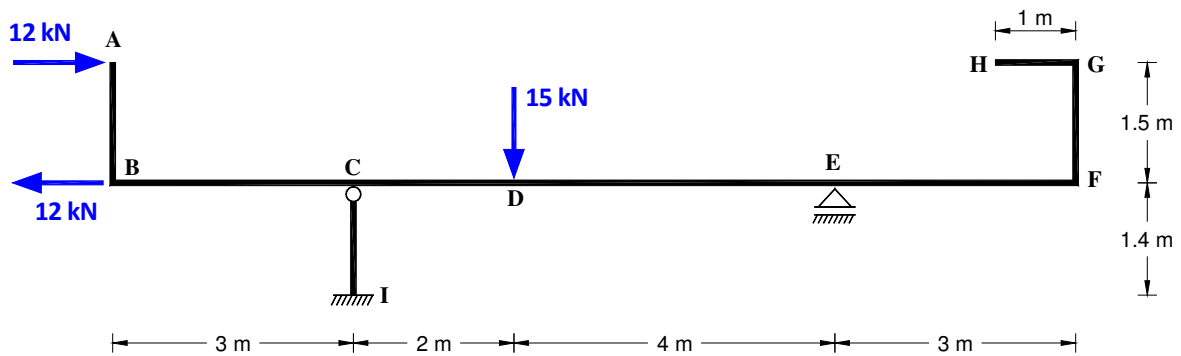
RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

Exame da Época de Recurso – 2/Fev/2017

ISABEL ALVIM TELES

ENUNCIADO

Considere a estrutura representada na figura abaixo e o carregamento aí ilustrado.



A secção transversal do pilar IC é constituída por dois perfis TNP120 soldados conforme representado no Quadro anexo.

O corpo ABCDEFGH é de betão, apresentando uma secção transversal retangular 24 cm x 20 cm (ver Quadro) e encontra-se impedido de se deslocar na perpendicular ao plano da estrutura.

| | |
|---|---|
| <p>SECÇÃO TRANSVERSAL DO PILAR IC</p> <p>2 x TNP120 Material: Aço S235</p> | <p>SECÇÃO TRANSVERSAL DO CORPO ABCDEFGH</p> <p>Material: Betão</p> |
|---|---|

Dados:

| | |
|-----------------------|---|
| Pilar IC | <ul style="list-style-type: none"> Material: Aço S235 Curvas de dimensionamento à encurvadura: curva "c", nas duas direcções |
| Corpo ABCDEFGH | <ul style="list-style-type: none"> Material: Betão Módulo de Elasticidade $E = 20 \text{ GPa}$ |

| Perfil | Massa M Kg/m | Área A cm ² | Dimensões | | | Características referidas ao eixo y - y | | Características referidas ao eixo z - z | | Posição do centro de gravidade c _s cm | |
|----------------|--------------------|------------------------------|-----------|---------|----------------------|--|---|--|---|--|--|
| | | | h mm | b mm | t ₁ mm | Mom. de inércia I _y cm ⁴ | Raio de giração i _y cm | Mom. de inércia I _z cm ⁴ | Raio de giração i _z cm | | |
| TNP 120 | 23,2 | 29,6 | 120 | 120 | 12,4 | 366 | 3,51 | 178 | 2,45 | 3,29 | |

- Determine o máximo valor de cálculo do esforço de compressão (N_{Rd}) que poderá atuar no pilar IC, compatível com a verificação da segurança pelo Eurocódigo 3.
- Desprezando a deformabilidade axial de todas as barras, determine o deslocamento horizontal e vertical da secção H.

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

Exame da Época de Recurso – 2/Fev/2017

ISABEL ALVIM TELES

RESOLUÇÃO

Alínea a

A secção transversal do pilar apresenta dois eixos de simetria, estando o centro de gravidade na intersecção desses eixos.

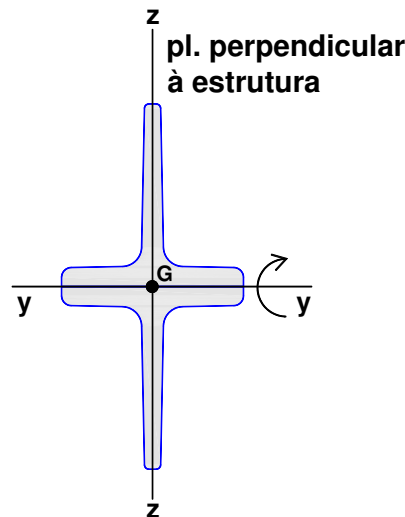
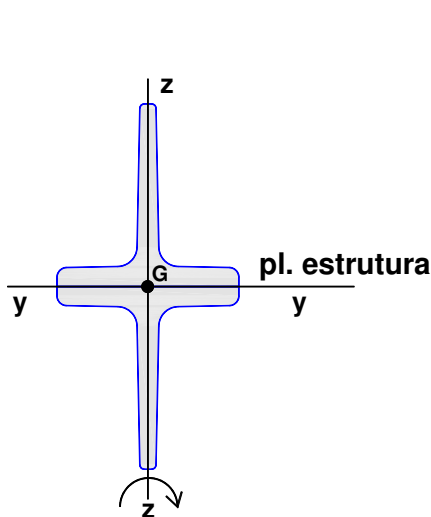
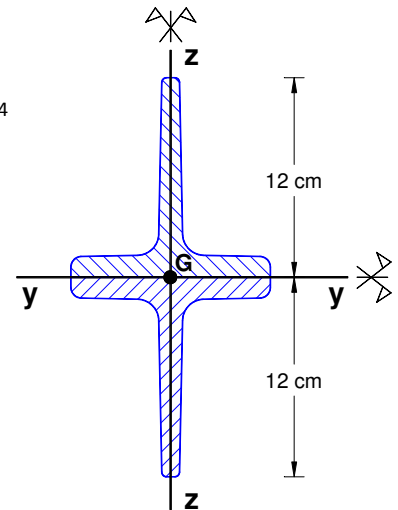
Área da secção transversal: $A = 2 \times 29,6 = 59,2 \text{ cm}^2$

Momentos de inércia

$$\left| \begin{aligned} I_y &= 2 \times (366 + 29,6 \times 3,29^2) = 1372,79 \text{ cm}^4 \\ I_z &= 2 \times 178 = 356 \text{ cm}^4 \end{aligned} \right.$$

Raios de giração

$$\left| \begin{aligned} i_y &= \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{1372,79}{59,2}} = 4,815 \text{ cm} \\ i_z &= \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{356}{59,2}} = 2,452 \text{ cm} \end{aligned} \right.$$

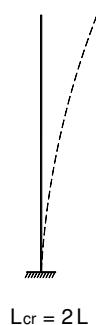


- **Estudo da encurvadura no plano da estrutura** \Rightarrow **encurvadura em relação ao eixo Z** (eixo de menor inércia – EC3)

$$L_{cr} = 2 L = 2,8 \text{ m} = 280 \text{ cm}$$

$$i_z = 2,452 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i} = \frac{280}{2,452} = 114,19$$

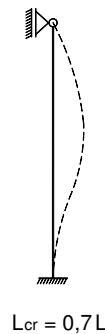


- Estudo da encurvadura no plano perpendicular à estrutura ⇒ encurvadura em relação ao eixo Y
(eixo de maior inércia – EC3)

$$L_{cr} = 0,7 L = 0,7 \times 1,4 = 0,98 \text{ m} = 98 \text{ cm}$$

$$i_y = 4,815 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i} = \frac{98}{4,815} = 20,35$$



CONCLUSÃO: A maior esbelteza é obtida quando se faz o estudo no plano da estrutura, ou seja, quando se faz o estudo da encurvadura em relação ao eixo Z (eixo de menor inércia segundo o EC3 - ver figuras acima).

A encurvadura em relação ao eixo Z vai ser condicionante porque a esbelteza em relação ao eixo Z é superior à esbelteza em relação ao eixo Y.

Encurvadura em relação ao eixo Z

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 114,19 \\ \lambda_1 = 93,91 \end{array} \right. \Rightarrow \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{114,19}{93,91} = 1,216$$

Curva c ⇒ $\alpha = 0,49$

$$\Phi = 0,5 \left[1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right] = 0,5 \left[1 + 0,49 (1,216 - 0,2) + 1,216^2 \right] = 1,488$$

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} = \frac{1}{1,488 + \sqrt{1,488^2 - 1,216^2}} = 0,426$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,426 \times 59,2 \times 10^{-4} \times 235000}{1} = 593,1 \text{ kN}$$

O máximo valor de cálculo do esforço de compressão que poderá atuar no pilar IC, compatível com a verificação da segurança pelo Eurocódigo 3, será **593,1 kN**.

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

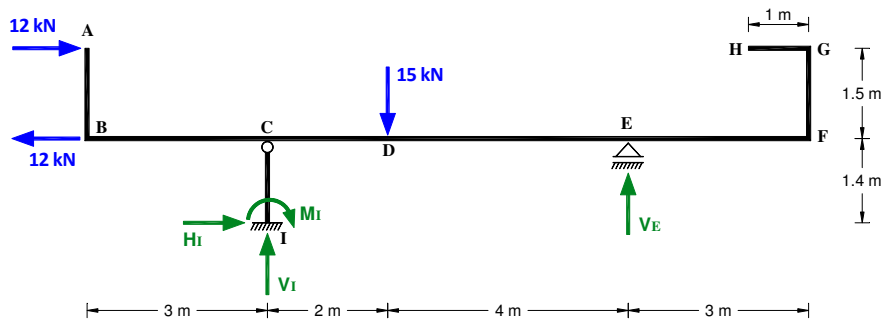
Exame da Época de Recurso – 2/Fev/2017

ISABEL ALVIM TELES

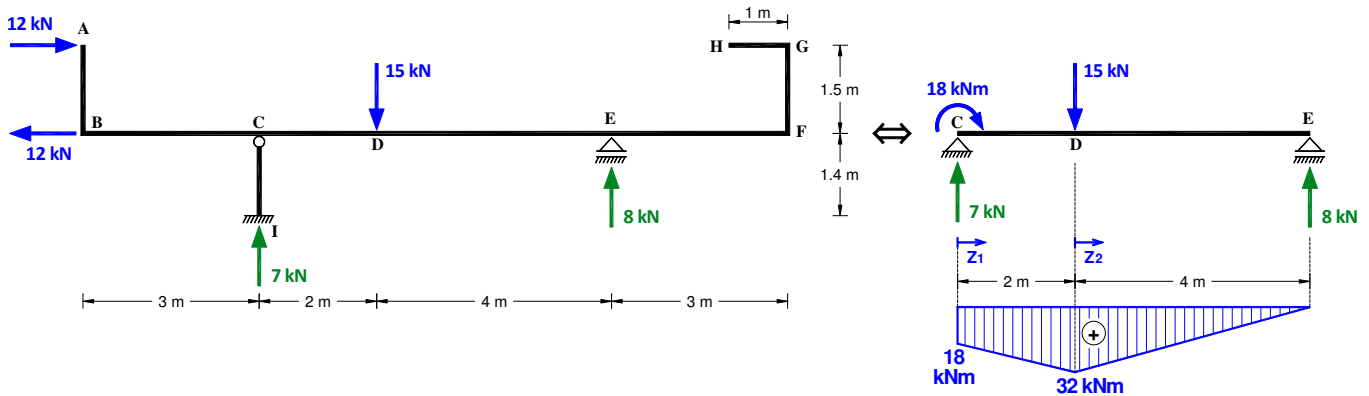
Alínea b

Cálculo das reacções

| | |
|------------------|--|
| Toda a estrutura | $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_E = 0$ |
| Corpo ABCDEFGH | $\sum M_C = 0$ |



$$\begin{cases} 12 - 12 + H_I = 0 \\ V_I + V_E - 15 = 0 \\ M_I + V_I \times 6 - H_I \times 1,4 + 12 \times 1,5 - 15 \times 4 = 0 \\ 12 \times 1,5 + 15 \times 2 - V_E \times 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Reacções} \begin{cases} H_I = 0 \\ V_I = 7 \text{ kN } (\uparrow) \\ M_I = 0 \\ V_E = 8 \text{ kN } (\uparrow) \end{cases}$$



Características das barras

$$\begin{cases} b=0,24 \text{ m} \\ h=0,20 \text{ m} \end{cases} \quad E = 20 \text{ GPa} \quad EI = 20 \times 10^6 \times \frac{0,24 \times 0,20^3}{12} = 3200 \text{ kNm}^2$$

INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA

| |
|--|
| $y'' = -\frac{M(z)}{EI}$ $EI y' = -\int_0^z M(z) dz + C_1$ $EI y = -\int_0^z \int_0^z M(z) dz + C_1 Z + C_2$ |
|--|

Barra CD

$$\begin{cases} M(z_1) = 16 + 7 z_1 \\ EI y'' = -18 - 7 z_1 \\ EI y' = -18 z_1 - 3,5 z_1^2 + C_1 \\ EI y = -9 z_1^2 - \frac{3,5}{3} z_1^3 + C_1 z_1 + C_2 \end{cases}$$

Barra DE

$$\begin{cases} M(z_2) = 32 - 8 z_2 \\ EI y'' = -32 + 8 z_2 \\ EI y' = -32 z_2 + 4 z_2^2 + C_3 \\ EI y = -16 z_2^2 + \frac{4}{3} z_2^3 + C_3 z_2 + C_4 \end{cases}$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS


Exame da Época de Recurso – 2/Fev/2017

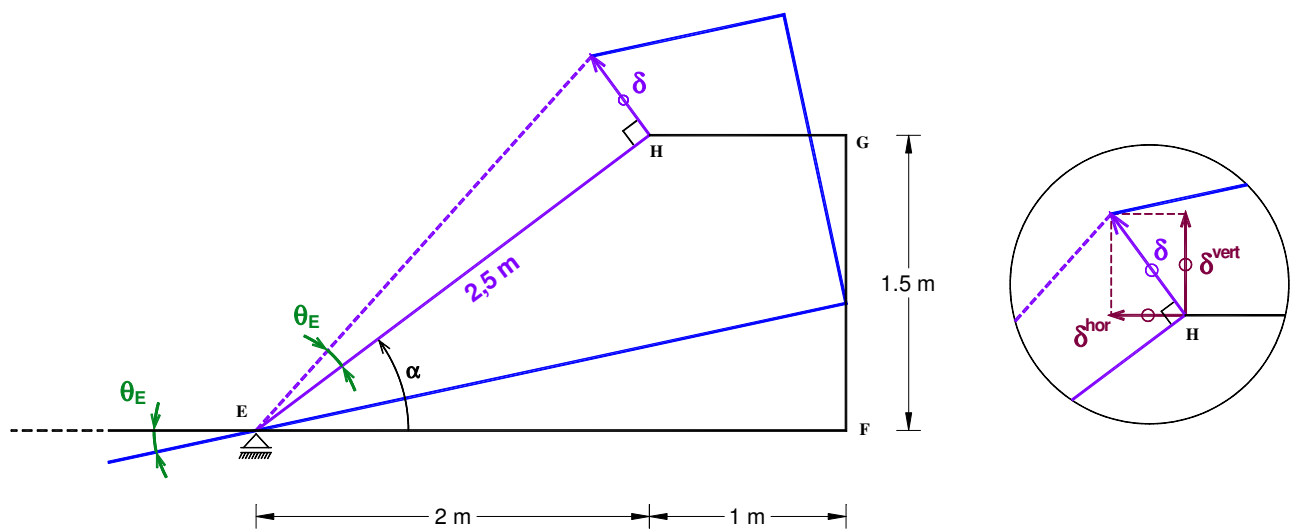
ISABEL ALVIM TELES

Condições fronteira $\left\{ \begin{array}{l} y_C^{CD} = 0 \\ y_D^{CD} = y_D^{DE} \\ \theta_D^{CD} = \theta_D^{DE} \\ y_E^{DE} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ -9 \times 2^2 - \frac{3,5}{3} 2^3 + 2C_1 + C_2 = C_4 \\ -18 \times 2 - 3,5 \times 2^2 + C_1 = C_3 \\ -16 \times 4^2 + \frac{4}{3} \times 4^3 + 4C_3 + C_4 = 0 \end{array} \right.$

Resolvendo o sistema de equações: $\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{208}{3} \\ C_2 = 0 \\ C_3 = \frac{58}{3} \\ C_4 = \frac{280}{3} \end{array} \right.$

Rotações na barra DE: $\theta^{DE} = \frac{1}{EI} \left[-32 Z_2 + 4 Z_2^2 + C_3 \right] = \frac{1}{3200} \left[-32 Z_2 + 4 Z_2^2 + \frac{58}{3} \right]$

Rotação em E: $\theta_E^{DE} = \theta_{(Z_2=4)}^{DE} = \frac{1}{3200} \left[-32 \times 4 + 4 \times 4^2 + \frac{58}{3} \right] = -1,396 \times 10^{-2} \text{ rad}$ 



$\text{tg } \theta_E \approx \theta_E$ $\alpha \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{2}{2,5} = 0,8 \\ \text{sen } \alpha = \frac{1,5}{2,5} = 0,6 \end{array} \right.$

$\frac{\delta}{2,5} = \text{tg } \theta_E \approx \theta_E$

$\frac{\delta}{2,5} = 1,396 \times 10^{-2} \Rightarrow \delta = 2,5 \times 1,396 \times 10^{-2} = 3,49 \times 10^{-2} \text{ m} = 3,49 \text{ cm}$ (↖)

$\delta^{hor} = \delta \text{ sen } \alpha = 3,49 \times 0,6 = 2,09 \text{ cm}$ (←)

$\delta^{vert} = \delta \text{ cos } \alpha = 3,49 \times 0,8 = 2,79 \text{ cm}$ (↑)