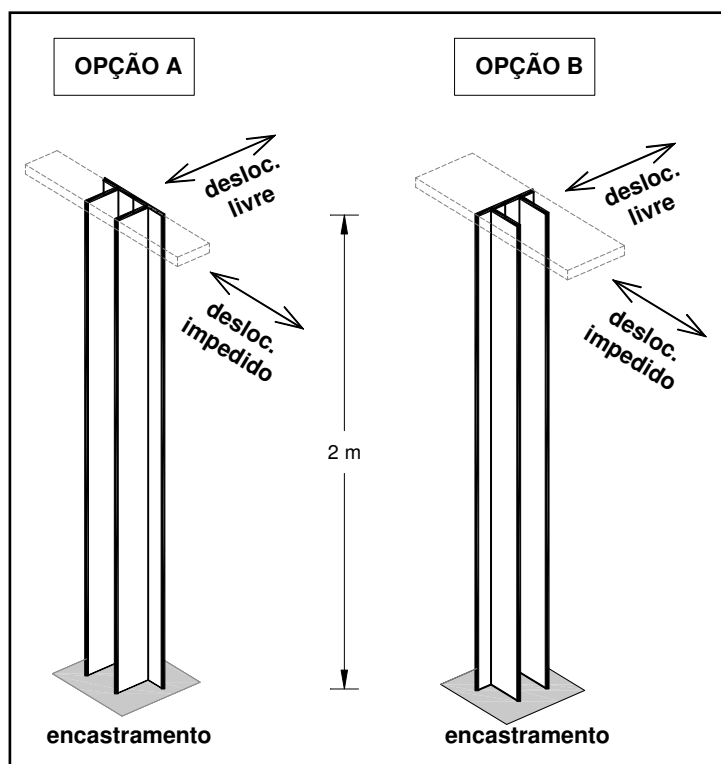
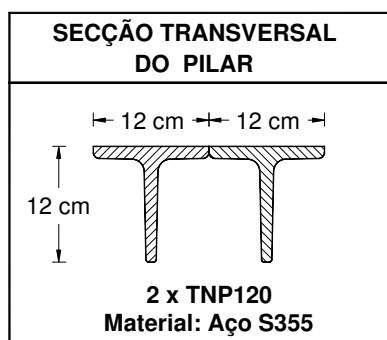


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS



ENCURVADURA

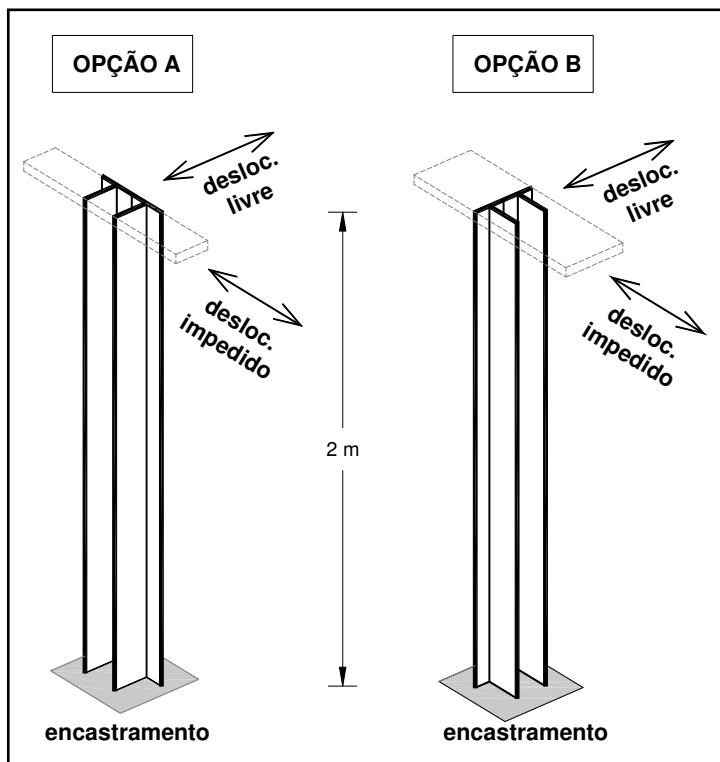
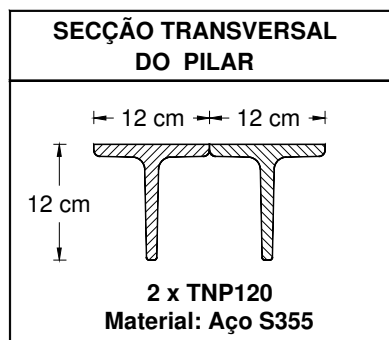
EXAME DE ÉPOCA NORMAL - ANO LETIVO 2025/26

ISABEL ALVIM TELES

<https://paginas.isep.ipp.pt/iat>

EXERCÍCIO PROPOSTO

Considere um pilar com 2 m de comprimento que está integrado num pórtico e cuja secção transversal é constituída por dois perfis **TNP120** soldados conforme representado no Quadro abaixo.



Figura

A extremidade superior do pilar está impedida de se deslocar no plano do pórtico, podendo deslocar-se livremente na direção perpendicular ao plano do pórtico.

A rotação da extremidade superior do pilar não está impedida em qualquer das direções.

A extremidade inferior do pilar está encastrada na fundação.

Foram ponderadas duas opções de posicionamento do pilar (ver Figura).

Devido a imposições arquitetónicas, o pilar foi colocado na posição correspondente à opção B.

Dados

- Aço S355
- Curvas de dimensionamento à encurvadura: curva "c", nas duas direções
- Coeficiente de segurança a considerar nos cálculos: 1,35

			Dimensões			Características referidas ao eixo y - y		Características referidas ao eixo z - z		Posição do centro de gravidade	
Perfil	Massa	Área	h	b	t1	Mom. de inércia	Raio de giração	Mom. de inércia	Raio de giração	cs	
TNP	M Kg/m	A cm ²	mm	mm	mm	I _y cm ⁴	i _y cm	I _z cm ⁴	i _z cm	cm	
120	23,2	29,6	120	120	12,4	366	3,51	178	2,45	3,29	

a) Foi adotada a opção estruturalmente mais vantajosa? Justifique convenientemente a sua resposta.

b) Calcule o máximo valor característico (valor não majorado) do esforço de compressão que poderá atuar no pilar compatível com a verificação da segurança pelo Eurocódigo 3.

RESOLUÇÃO

Alínea a

• **Centro de gravidade da secção transversal**

Os centros de gravidade dos dois perfis que constituem a secção transversal estão sob o eixo a, logo o centro de gravidade da secção transversal também tem de estar sob o eixo a.

O eixo b é eixo de simetria, logo o centro de gravidade da secção transversal também tem de estar sob o eixo b.

Conclui-se então que o centro de gravidade **G** da secção transversal está posicionado na intersecção do eixo a com o eixo b.

O eixo a e o eixo b são **eixos principais centrais de inércia**, pois o eixo b é de simetria

$$\text{Área} = 2 \times 29,6 = 59,2 \text{ cm}^2$$

• **Momentos de Inércia**

$$I_a = 2 \times 366 = 732 \text{ cm}^4$$

$$I_b = 2 \times (178 + 29,6 \times 6^2) = 2487,2 \text{ cm}^4$$

$$I_b > I_a \Rightarrow \begin{cases} \text{eixo b} \Rightarrow \text{eixo y (maior inércia)} \\ \text{eixo a} \Rightarrow \text{eixo z (menor inércia)} \end{cases} \quad (\text{Eurocódigo 3})$$

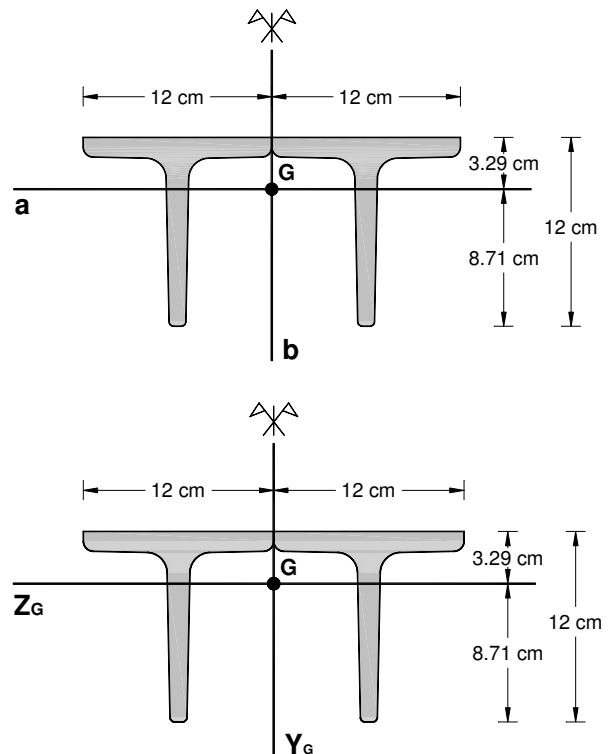
$$I_y = I_b = 2487,2 \text{ cm}^4$$

$$I_z = I_a = 732 \text{ cm}^4$$

• **Raios de giração**

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{2487,2}{59,2}} = 6,482 \text{ cm}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{732}{59,2}} = 3,516 \text{ cm}$$

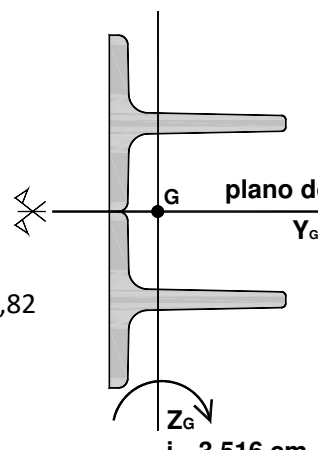
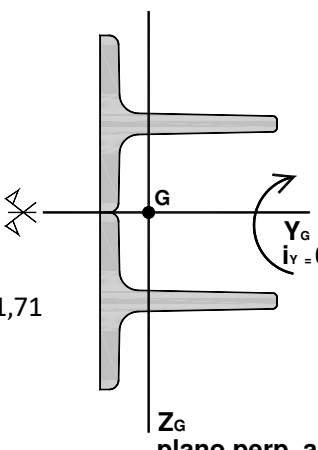


Encurvadura no plano do pórtico	Encurvadura no plano perpendicular ao pórtico
A extremidade superior do pilar está impedida de se deslocar. $L_{cr} = 0,7 L = 0,7 \times 2 = 1,4 \text{ m} = 140 \text{ cm}$  $L_{cr} = 0,7 L$	A extremidade superior do pilar pode deslocar-se livremente. $L_{cr} = 2 L = 2 \times 2 = 4 \text{ m} = 400 \text{ cm}$  $L_{cr} = 2 L$

Pretende-se minimizar a esbelteza máxima: $\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$

Como o L_{cr} no plano perpendicular ao pórtico é superior ao L_{cr} no plano do pórtico, então a posição estruturalmente mais eficiente será aquela que associar o maior raio de giração (ou seja, i_y) ao estudo da encurvadura no plano perpendicular ao pórtico. Ora é isso que temos com o pilar posicionado conforme a **opção B**, pelo que esta é a opção estruturalmente mais vantajosa.

Alínea b

OPÇÃO B	
Encurvadura no plano do pórtico	Encurvadura no plano perpendicular ao pórtico
$L_{cr} = 140 \text{ cm}$ $\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$ $\lambda = \frac{140}{3,516} = 39,82$  plano do pórtico Z_G $i_z = 3,516 \text{ cm}$	$L_{cr} = 400 \text{ cm}$ $\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$ $\lambda = \frac{400}{6,482} = 61,71$  Y_G $i_y = 6,482 \text{ cm}$ Z_G plano perp. ao pórtico

CONCLUSÃO: A maior esbelteza é obtida quando se faz o estudo da encurvadura na direção perpendicular ao pórtico, ou seja, quando o pilar vai fletir em torno do eixo y (eixo de maior inércia segundo o EC3 - ver figura acima).

A encurvadura em relação ao eixo y vai ser condicionante porque a esbelteza em relação ao eixo y é superior à esbelteza em relação ao eixo z.

- Direção perpendicular ao plano do pórtico** $\Rightarrow$ **encurvadura em relação ao eixo Y**

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 61,71 \\ \lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{355}} = 76,41 \end{array} \right. \Rightarrow \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{61,71}{76,41} = 0,808$$

Curva ζ $\Rightarrow \alpha = 0,49$

$$\Phi = 0,5 \left[1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right] = 0,5 \left[1 + 0,49 (0,808 - 0,2) + 0,808^2 \right] = 0,975$$

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} = \frac{1}{0,975 + \sqrt{0,975^2 - 0,808^2}} = 0,658$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,658 \times 59,2 \times 10^{-4} \times 355 \times 10^3}{1} = 1382,85 \text{ kN}$$

$$N_{Ed} \leq N_{b,Rd} \Rightarrow N_{Ed} \leq 1382,85 \text{ kN}$$

$$N_{Ed} = 1,35 N_K \Rightarrow N_K \leq \frac{1382,85}{1,35} \Rightarrow N_K \leq 1024 \text{ kN}$$

O máximo esforço axial de compressão que poderá ser instalado na barra, compatível com a verificação da segurança à encurvadura pelo EC3 será **$N_K = 1024 \text{ kN}$** (valor não majorado).