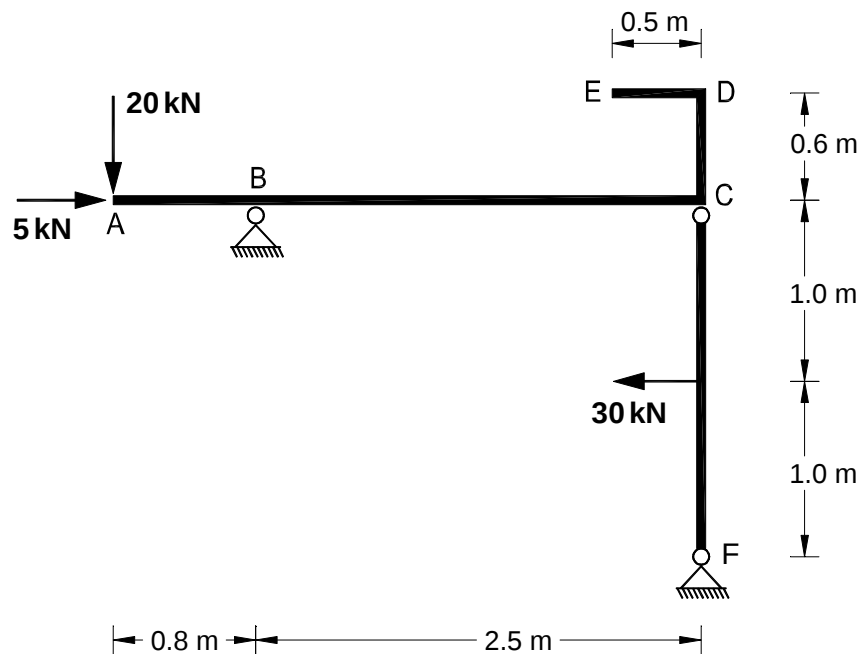


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS



EXAME 23 / NOVEMBRO / 2012

EXERCÍCIO 1 - DEFORMAÇÃO (INTEGRAÇÃO DA ELÁSTICA)

RESOLUÇÃO

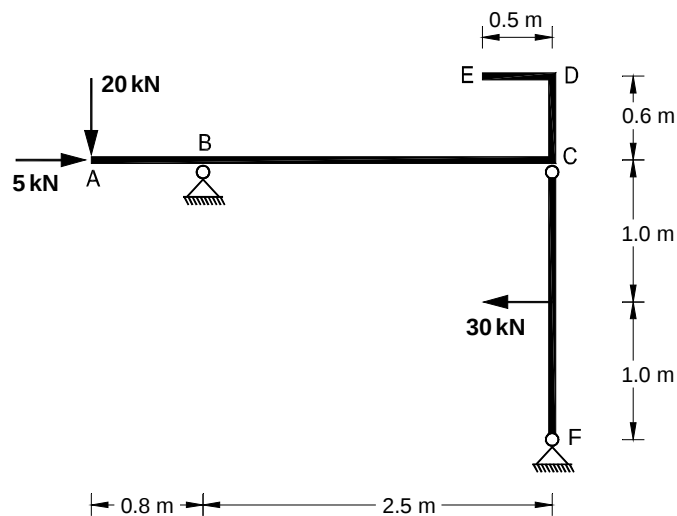
ISABEL ALVIM TELES

ENUNCIADO

Considere a estrutura representada na figura em que todas as barras têm secção transversal quadrada com 12 cm de lado e são constituídas por um material com módulo de elasticidade $E=100$ GPa.

Resolva as alíneas seguintes desprezando a deformabilidade axial das barras.

- Determine o deslocamento máximo linear da barra **BC**;
- Determine o deslocamento horizontal e vertical da secção **E**.

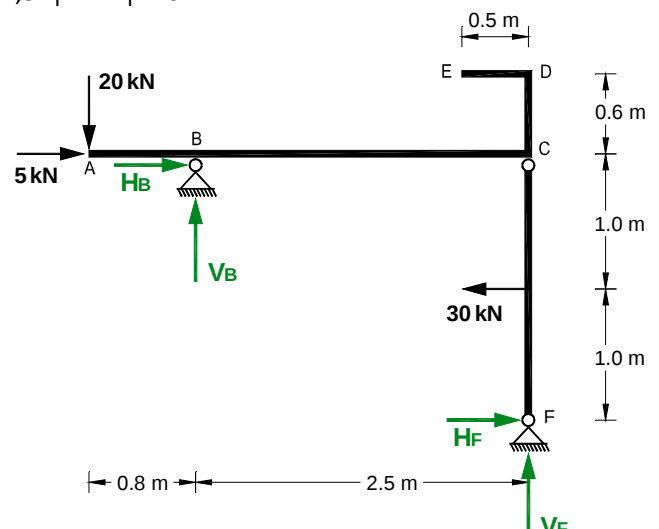


RESOLUÇÃO

Cálculo das reacções

$$\begin{aligned} \text{Toda a estrutura} \quad & \begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_B + H_F - 30 + 5 = 0 \\ V_B + V_F = 20 \\ 20 \times 0,8 - 30 \times 1 + 2,5 V_F + 2 H_F = 0 \end{cases} \\ \text{Corpo CF} \quad & \sum M_C = 0 \Rightarrow 2 H_F - 30 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Reacções} \quad \begin{cases} H_B = 10 \text{ kN} \quad (\rightarrow) \\ V_B = 26,4 \text{ kN} \quad (\uparrow) \\ H_F = 15 \text{ kN} \quad (\rightarrow) \\ V_F = -6,4 \text{ kN} \quad (\downarrow) \end{cases}$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME 23/NOV/2012 – DEFORMAÇÃO

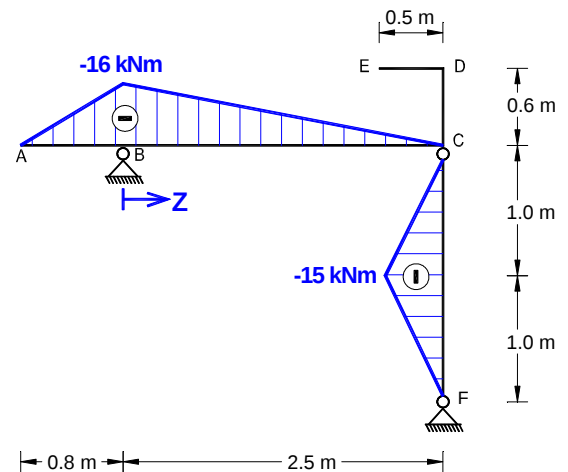
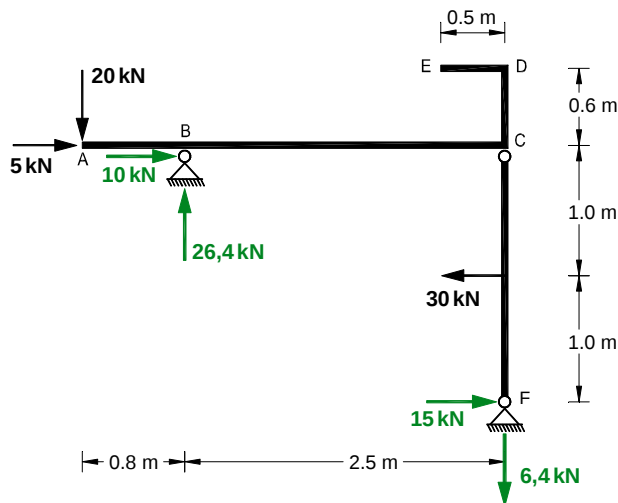
ISABEL ALVIM TELES

Características das barras

$$\begin{cases} b = 0,12 \text{ m} \\ h = 0,12 \text{ m} \end{cases}$$

$E = 100 \text{ GPa}$

$$EI = 100 \times 10^6 \times \frac{0,12 \times 0,12^3}{12} = 1728 \text{ kNm}^2$$



$$y'' = -\frac{M(z)}{EI}$$

$$EI \, y' = - \int_0^z M(z) \, dz + C_1$$

$$\text{EI } y = - \int_0^z \int_0^z M(z) dz + C_1 Z + C_2$$

a) Deslocamento linear máximo da barra BC

Barra BC

$$M(z) = -16 + 6,4 Z$$

$$EI y'' = -6,4 Z + 16$$

$$EI y' = -3,2 Z^2 + 16 Z + C_1$$

$$EI y = -\frac{3,2}{3} Z^3 + 8 Z^2 + C_1 Z + C_2$$

Condições fronteira

$$y_B^{BC} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{40}{3}$$

$$y_C^{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

Barra BC

$$\theta = y' = \frac{1}{1728} \left(-3,2 \, z^2 + 16 \, z - \frac{40}{3} \right)$$

$$\delta = \gamma = \frac{1}{1728} \left(-\frac{3,2}{3} Z^3 + 8 Z^2 - \frac{40}{3} Z \right)$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME 23/NOV/2012 – DEFORMAÇÃO

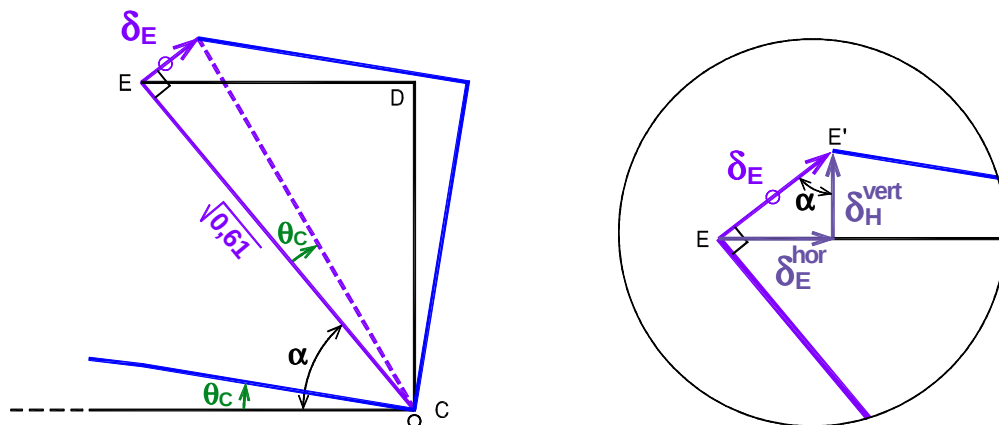
ISABEL ALVIM TELES

Deslocamento linear máximo $\Rightarrow y' = 0$

$$y' = \frac{1}{1728} \left(-3,2 Z^2 + 16 Z - \frac{40}{3} \right) = 0 \Rightarrow -3,2 Z^2 + 16 Z - \frac{40}{3} = 0 \Rightarrow Z = 1,057 \text{ m}$$

$$\delta_{\text{máx}} = y(Z=1,057) = \frac{1}{1728} \left(-\frac{3,2}{3} \times 1,057^3 + 8 \times 1,057^2 - \frac{40}{3} \times 1,057 \right) = -3,712 \times 10^{-3} \text{ m} = -3,712 \text{ mm } (\uparrow)$$

b) Deslocamento horizontal e vertical da secção E



Secção C $\left| \theta_C^{BC} = \theta_{(Z=2,5)}^{BC} = \frac{1}{1728} \left(-3,2 \times 2,5^2 + 16 \times 2,5 - \frac{40}{3} \right) = 3,858 \times 10^{-3} \text{ rad} \right.$

$$\text{tg } \theta_C \approx \theta_C$$

$$\alpha \begin{cases} \cos \alpha = \frac{0,50}{\sqrt{0,61}} \\ \sin \alpha = \frac{0,60}{\sqrt{0,61}} \end{cases}$$

$$\frac{\delta_E}{\sqrt{0,61}} = \text{tg } \theta_C \approx \theta_C \Rightarrow \frac{\delta_E}{\sqrt{0,61}} = 3,858 \times 10^{-3} \Rightarrow \delta_E = \sqrt{0,61} \times 3,858 \times 10^{-3} \text{ m} = 3,013 \text{ mm } (\nearrow)$$

$$\delta_E^{\text{hor}} = \delta_E \sin \alpha = \sqrt{0,61} \times 3,858 \times 10^{-3} \times \frac{0,6}{\sqrt{0,61}} = 1,93 \times 10^{-3} \text{ m} = 2,31 \text{ mm } (\rightarrow)$$

$$\delta_E^{\text{vert}} = \delta_E \cos \alpha = \sqrt{0,61} \times 3,858 \times 10^{-3} \times \frac{0,5}{\sqrt{0,61}} = 1,93 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,93 \text{ mm } (\uparrow)$$