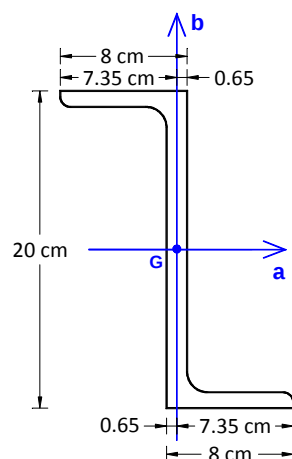
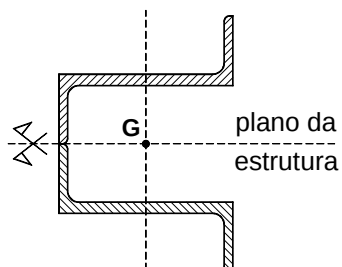
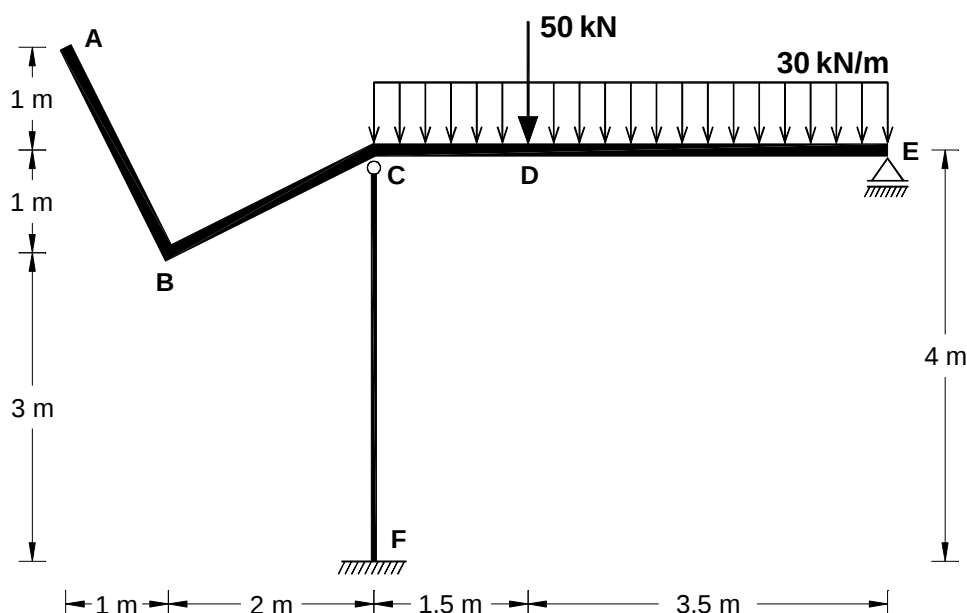


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME ESPECIAL - SETEMBRO / 2014

DEFORMAÇÕES - ENCURVADURA



ISABEL ALVIM TELES

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME ESPECIAL - SET/2014 – DEFORMAÇÃO E ENCURVADURA

ISABEL ALVIM TELES

ENUNCIADO

Considere a estrutura representada na *Figura 1*.

As barras que constituem o corpo **ABCDE** têm secção transversal quadrada com 30 cm de lado e são constituídas por um material com módulo de elasticidade $E=50\text{GPa}$.

A secção transversal do pilar **CF** é constituída pela associação de **dois perfis Z** dispostos como está esquematizado na Tabela anexa. A extremidade superior do pilar está impedida de se deslocar na perpendicular ao plano da estrutura.

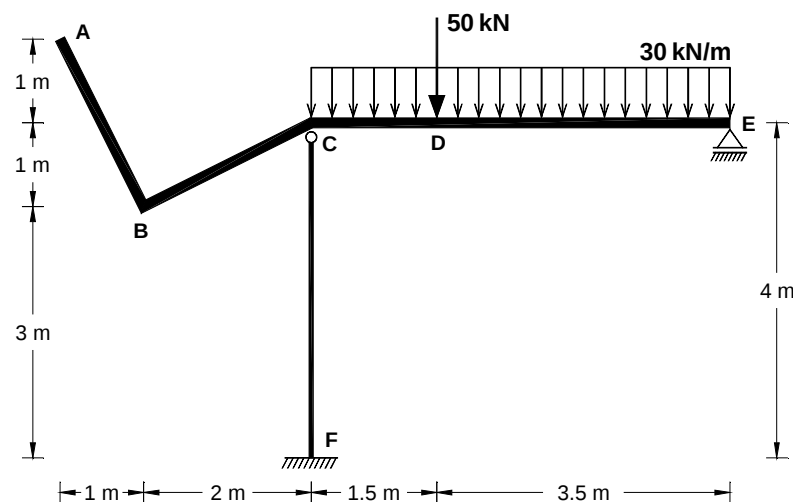


Figura 1

CARACTERÍSTICAS DO PILAR CF

Secção transversal	Perfil Z
	Área = $38,7\text{ cm}^2$ $I_a = 2300\text{ cm}^4$ $I_b = 357\text{ cm}^4$ $I_{ab} = -674\text{ cm}^4$ Material: Aço S275 $E = 200\text{ GPa}$ Curva de encurvadura: C

- 1- Desprezando a deformabilidade axial de todas as barras, determine a grandeza e sentido dos deslocamentos vertical e horizontal da secção **A**.
- 2- Calcule o máximo valor de cálculo (valor majorado) do esforço axial que poderá actuar no pilar **CF** compatível com a verificação da segurança pelo Eurocódigo 3.

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME ESPECIAL - SET/2014 – DEFORMAÇÃO E ENCURVADURA

ISABEL ALVIM TELES

RESOLUÇÃO

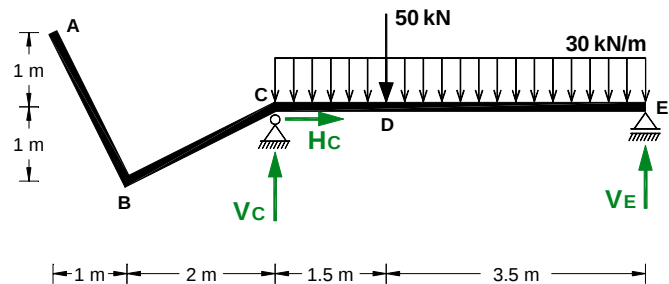
1.

Cálculo das reacções

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_C = 0 \\ V_C + V_E = 50 + 30 \times 5 \\ 50 \times 1,5 + 30 \times 5 \times 2,5 - 5 V_E = 0 \end{cases}$$

Reacções

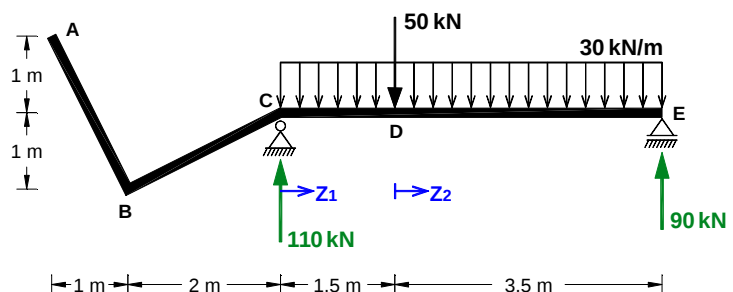
$$\begin{cases} H_C = 0 \\ V_C = 110 \text{ kN} \quad (\uparrow) \\ V_E = 90 \text{ kN} \quad (\uparrow) \end{cases}$$



Características das barras do corpo ABCDE

$$\begin{cases} b = 0,30 \text{ m} \\ h = 0,30 \text{ m} \end{cases} \quad E = 50 \text{ GPa} = 50 \times 10^6 \text{ KPa} \quad EI = 50 \times 10^6 \times \frac{0,30 \times 0,30^3}{12} = 33750 \text{ kNm}^2$$

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{M(z)}{EI} \\ EI y' &= -\int_0^z M(z) dz + C_1 \\ EI y &= -\int_0^z \int_0^z M(z) dz + C_1 Z + C_2 \end{aligned}$$



Barra CD

$$\begin{aligned} M(Z_1) &= 110 Z_1 - 15 Z_1^2 \\ EI y'' &= 15 Z_1^2 - 110 Z_1 \\ EI y' &= 5 Z_1^3 - 55 Z_1^2 + C_1 \\ EI y &= 1,25 Z_1^4 - \frac{55}{3} Z_1^3 + C_1 Z_1 + C_2 \end{aligned}$$

Barra DE

$$\begin{aligned} M(Z_2) &= 131,25 + 15 Z_2 - 15 Z_2^2 \\ EI y'' &= 15 Z_2^2 - 15 Z_2 - 131,25 \\ EI y' &= 5 Z_2^3 - 7,5 Z_2^2 - 131,25 Z_2 + C_3 \\ EI y &= 1,25 Z_2^4 - 2,5 Z_2^3 + 65,625 Z_2^2 + C_3 Z_2 + C_4 \end{aligned}$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME ESPECIAL - SET/2014 – DEFORMAÇÃO E ENCURVADURA

ISABEL ALVIM TELES

Condições fronteira

$$\begin{aligned} y_C^{CD} = 0 &\Rightarrow y_{(Z_1=0)}^{CD} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ y_D^{CD} = y_D^{DE} &\Rightarrow y_{(Z_1=1,5)}^{CD} = y_{(Z_2=0)}^{DE} \Rightarrow 1,25 \times 1,5^4 - \frac{55}{3} \times 1,5^3 + 1,5 C_1 + C_2 = C_4 \\ \theta_D^{CD} = \theta_D^{DE} &\Rightarrow \theta_{(Z_1=1,5)}^{CD} = \theta_{(Z_2=0)}^{DE} \Rightarrow 5 \times 1,5^3 - 55 \times 1,5^2 + C_1 = C_3 \\ y_E^{DE} = 0 &\Rightarrow y_{(Z_2=3,5)}^{DE} = 0 \Rightarrow 1,25 \times 3,5^4 - 2,5 \times 3,5^3 + 65,625 \times 3,5^2 + 3,5 C_3 + C_4 = 0 \end{aligned}$$

$$C_1 = 230,625$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = 123,75$$

$$C_4 = 290,391$$

Para determinar o deslocamento vertical e horizontal da **secção A** precisamos de determinar a rotação em **C**.

Barra CD $\theta = y' = \frac{1}{33750} (5 Z_1^3 - 55 Z_1^2 + 230,625)$

Rotação em C

$$\theta_C = y'_{(Z_1=0)} = \frac{1}{33750} \times 230,625 = 6,833 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

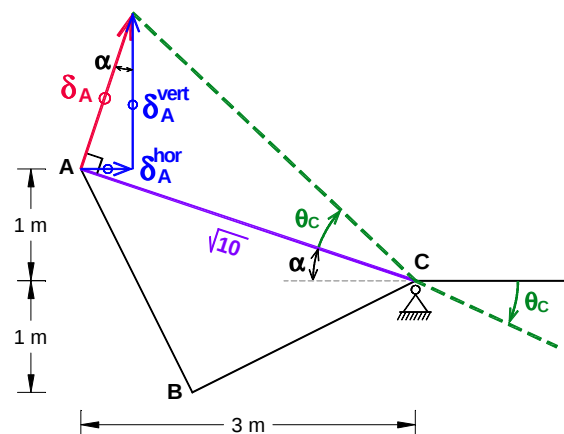
Deslocamento horizontal e vertical da secção A

$$\theta_C = 6,833 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\text{tg } \theta_C \approx \theta_C$$

$$\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\alpha \begin{cases} \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$



$$\frac{\delta_A}{\sqrt{10}} = \text{tg } \theta_C \approx \theta_C \Rightarrow \frac{\delta_A}{\sqrt{10}} = 6,833 \times 10^{-3} \Rightarrow \delta_A = \sqrt{10} \times 6,833 \times 10^{-3} \text{ m} = 21,6 \text{ mm } (\nearrow)$$

$$\delta_A^{\text{hor}} = \delta_A \sin \alpha = \sqrt{10} \times 6,833 \times 10^{-3} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = 6,833 \times 10^{-3} \text{ m} = 6,83 \text{ mm } (\rightarrow)$$

$$\delta_A^{\text{vert}} = \delta_A \cos \alpha = \sqrt{10} \times 6,833 \times 10^{-3} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = 20,50 \times 10^{-3} \text{ m} = 20,50 \text{ mm } (\uparrow)$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

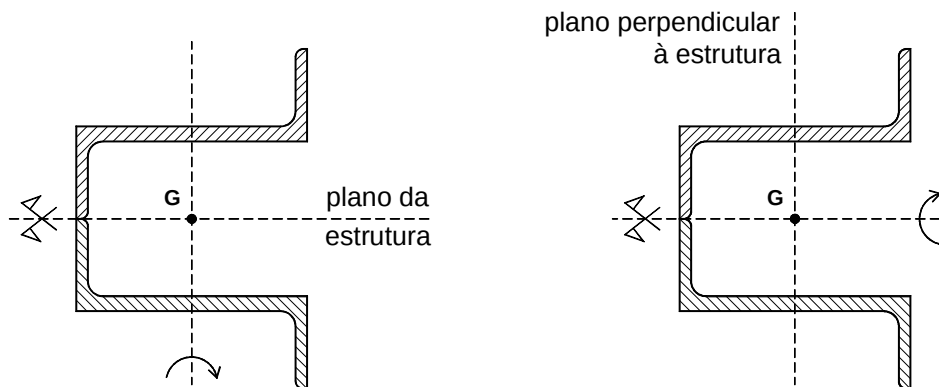
EXAME ESPECIAL - SET/2014 – DEFORMAÇÃO E ENCURVADURA

ISABEL ALVIM TELES

2.

Secção transversal do pilar CF

$$\text{Área} = 2 \times 38,7 = 77,4 \text{ cm}^2$$



• **Estudo da encurvadura no plano da estrutura**

$$L_{cr} = 2 L = 8 \text{ m} = 800 \text{ cm}$$

$$I = 2 \times 2300 = 4600 \text{ cm}^4$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{4600}{77,4}} = 7,709 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i} = \frac{800}{7,709} = 103,77$$



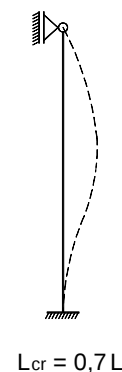
• **Estudo da encurvadura no plano perpendicular à estrutura**

$$L_{cr} = 0,7 L = 0,7 \times 4 = 2,8 \text{ m} = 280 \text{ cm}$$

$$I = 2 \times (357 + 38,7 \times 7,35^2) = 4895,3415 \text{ cm}^4$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{4895,3415}{77,4}} = 7,953 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i} = \frac{280}{7,953} = 35,21$$



CONCLUSÃO: A encurvadura no plano da estrutura vai ser condicionante porque a esbelteza ($\lambda = 103,77$) é superior à calculada para a encurvadura no plano perpendicular à estrutura ($\lambda = 35,21$).

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME ESPECIAL - SET/2014 – DEFORMAÇÃO E ENCURVADURA

ISABEL ALVIM TELES

• **Estudo da encurvadura no plano da estrutura**

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 103,77 \\ \lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} = \pi \sqrt{\frac{200000}{275}} = 84,72 \end{array} \right. \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{103,77}{84,72} = 1,22$$

Curva de encurvadura: $\underline{c} \Rightarrow \alpha = 0,49$

$$\Phi = 0,5 \left[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right] = 0,5 \left[1 + 0,49(1,22 - 0,2) + 1,22^2 \right] = 1,49$$

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} = \frac{1}{1,49 + \sqrt{1,49^2 - 1,22^2}} = 0,43$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,43 \times 77,4 \times 10^{-4} \times 275000}{1} = 915 \text{ kN}$$

$$N_{Ed} \leq N_{b,Rd} \Rightarrow N_{Ed} \leq 915 \text{ kN}$$

O máximo esforço axial que poderá ser instalado na barra, compatível com a verificação da segurança à encurvadura pelo EC3 será $N_{Ed} = 915 \text{ kN}$ (valor majorado).