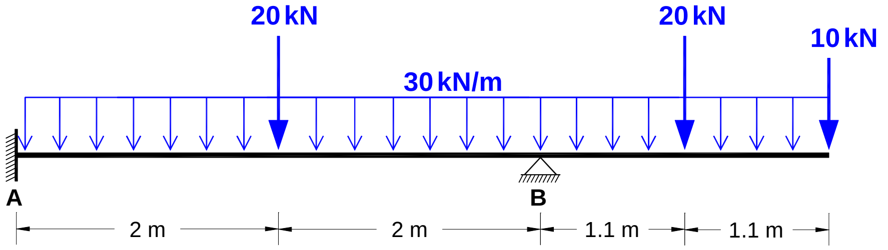
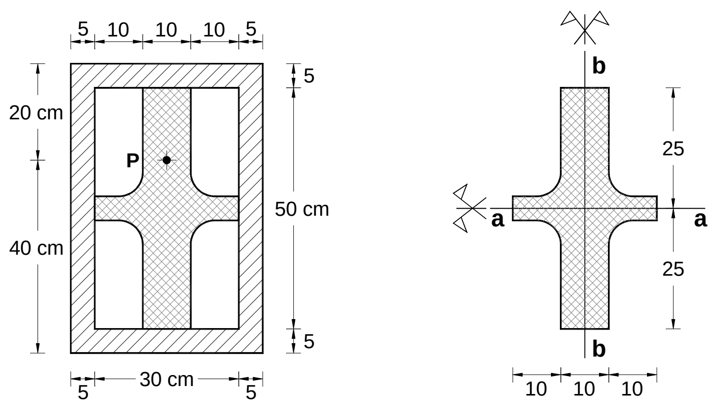
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

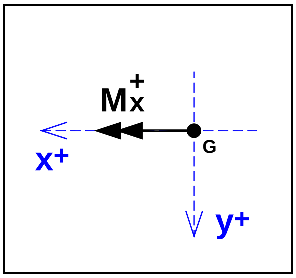
EXAME 1ª FREQUÊNCIA - NOVEMBRO / 2016

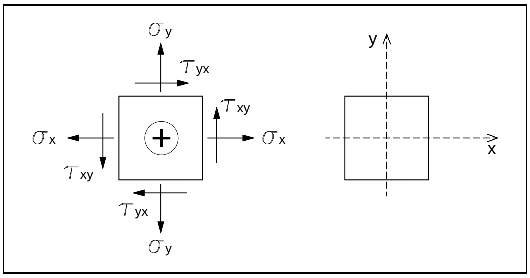
FLEXÃO PLANA - ESTADO PLANO DE TENSÃO





RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO CONSIDERANDO AS CONVENÇÕES:





ISABEL ALVIM TELES

ENUNCIADO

Considere a viga encastrada em **A** e apoiada em **B**, sob a ação do carregamento representado na *Figura 1*. O plano de solicitação é baricêntrico.

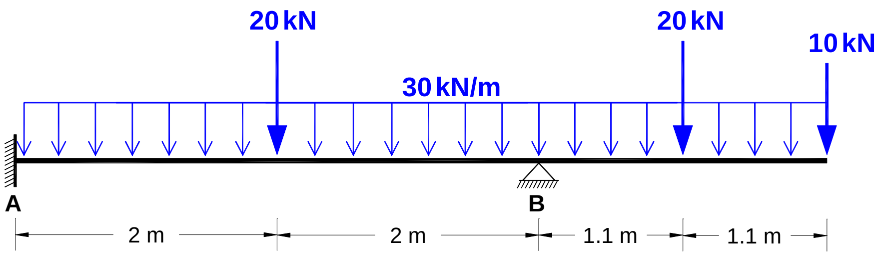
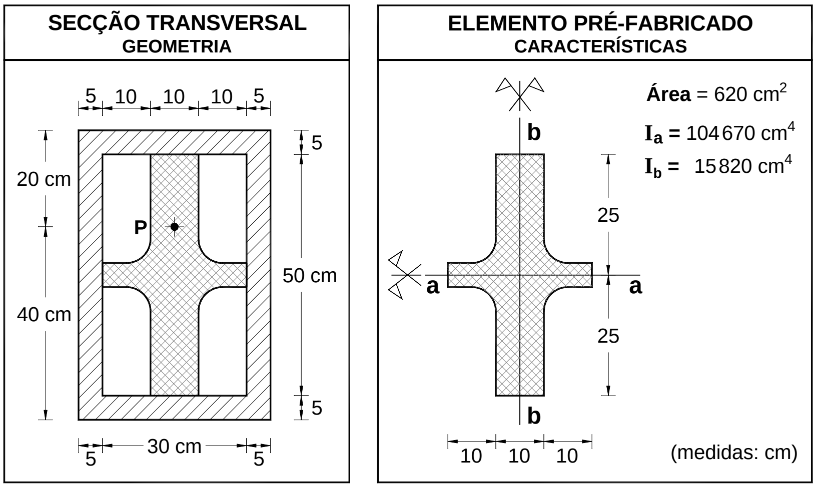


Figura 1

A secção transversal da viga é constituída por um elemento pré-fabricado que foi colocado dentro de um perfil tubular retangular com 5 cm de espessura, conforme representado no quadro Secção Transversal - Geometria.

As características do elemento pré-fabricado foram fornecidas pelo fabricante e podem ser consultadas no quadro Elemento Pré-Fabricado - Características.



Considere a **secção à direita do apoio B** e o ponto **P** representado na secção transversal.

a) Defina o tensor das tensões que caracteriza o estado plano de tensão no ponto **P**.

b) Calcule por um processo analítico a tensão principal mínima e a respectiva direcção, representando todos os resultados num esquema ilustrativo.

c) Calcule por um processo analítico a tensão normal (σ) e a tensão tangencial (τ) que atuam na faceta **AB** e represente-as graficamente num esquema idêntico ao da *Figura 2*.

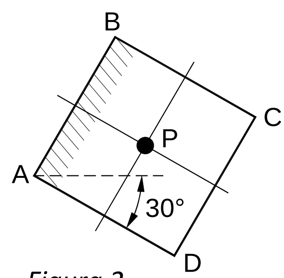
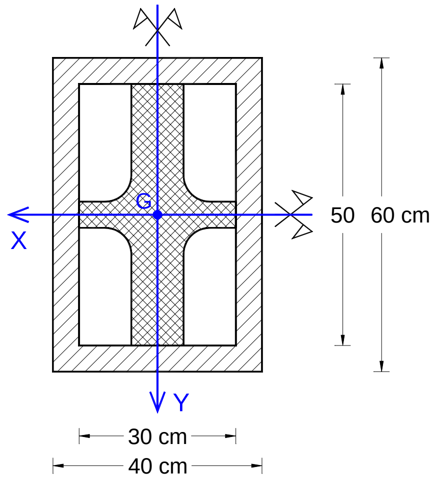


Figura 2

RESOLUÇÃO

Alínea a)



Posição do centro de gravidade

O eixo **x** e o eixo **y** são eixos de simetria, logo o centro de gravidade da secção transversal encontra-se na origem do referencial (**x**,**y**).

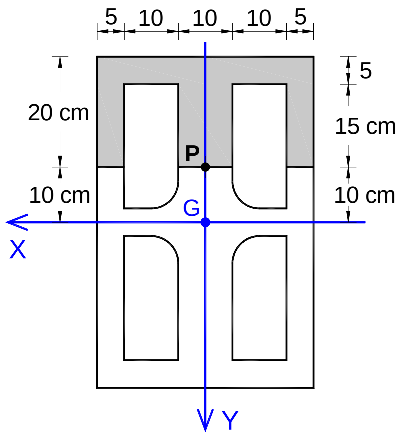
O eixo **x** e o eixo **y** são **eixos principais centrais de inércia**, pois são eixos de simetria.

Momento de inércia Ix

$$I_x = 104\,670 + \frac{40\times60^3}{12} - \frac{30\times50^3}{12} = 512\,170\,\text{cm}^4 = 512\,170\times10^{-8}\,\text{m}^4$$

Esforços na secção à esquerda do apoio B

$$\begin{cases} \mathbf{V} = 10 + 20 + 30\times2{,}20 = 96\ \text{kN} \\ \mathbf{M_x} = -10\times2{,}20 - 20\times1{,}10 - 30\times\dfrac{2{,}20^2}{2} = -116{,}6\ \text{kNm} \end{cases}$$



Tensão normal no ponto P: $\boxed{\sigma = \dfrac{M_x}{I_x}Y}$ com $Y = -0{,}10$ m

$$\sigma = \frac{-116{,}6}{512\,170\times10^{-8}}\times(-0{,}10) = 2\,276{,}6\ \text{kPa}\ \ (\text{tração})$$

Tensão tangencial no ponto P: $\boxed{\tau = \dfrac{V\,S_x}{I_x\,b}}$

V = 96 kN

$I_x = 512\,170\,\text{cm}^4 = 512\,170\times10^{-8}\,\text{m}^4$ (momento de inércia)

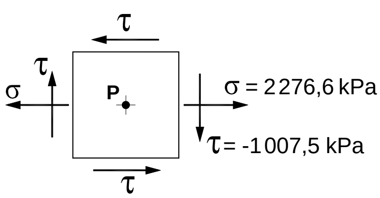
$b = 0{,}05+0{,}10+0{,}05 = 0{,}20\,\text{m}$

$S_x = 40\times20\times20 - 2\times(10\times15\times17{,}5) = 10\,750\ \text{cm}^3 = 10\,750\times10^{-6}\ \text{m}^3$ (momento estático)

$$\tau = \frac{V\,S_x}{I_x\,b} = \frac{96\times10\,750\times10^{-6}}{512\,170\times10^{-8}\times0{,}20} = 1\,007{,}5\ \text{kPa}$$

$\mathbf{V}$ positivo $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\tau_{xy}}$ negativa $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\tau_{xy}} = -1007{,}5$ kPa

Tensor das tensões: $T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,276{,}6 & -1\,007{,}5 \\ -1\,007{,}5 & 0 \end{bmatrix}$ kPa



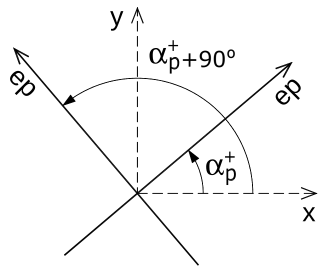
Alínea b) - Fórmulas

$$\sigma_{máx} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^{\ 2}}$$

$$\sigma_{mín} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^{\ 2}}$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \pm 90^\circ$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\ \mathrm{sen}\, 2\alpha$$



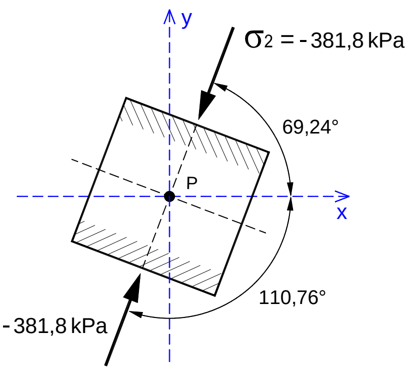
ep - eixo principal

Ponto **P**
$$\begin{cases} \sigma_X = 2\,276{,}6 \text{ kPa} \\ \sigma_Y = 0 \\ \tau_{XY} = \tau_{YX} = -1\,007{,}5 \text{ kPa} \end{cases}$$

$$\sigma_{mín} = \sigma_2 = \frac{2276{,}6}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2\,276{,}6^2 + 4\times(-1\,007{,}5)^2} = -381{,}8 \text{ kPa}$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\times(-1\,007{,}5)}{2\,276{,}6}\right) = -20{,}76^\circ \pm 90^\circ$$

$$\sigma_x > \sigma_y \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 \text{ mais perto do eixo y} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_{p2} = -20{,}76^\circ + 90^\circ = 69{,}24^\circ \\ \text{ou} \\ \alpha_{p2} = -20{,}76^\circ - 90^\circ = -110{,}76^\circ \end{cases}$$



Alínea b) - Cálculo Matricial

Tensões principais $\Rightarrow$ $\det |T - \sigma_p I| = 0$

$$\det \begin{vmatrix} 2276{,}6 - \sigma_p & -1007{,}5 \\ -1007{,}5 & -\sigma_p \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2276{,}6 - \sigma_p) \times (-\sigma_p) - 1007{,}5^2 = 0$$

$$\sigma_p^{\,2} - 2276{,}6\ \sigma_p - 1015056{,}25 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_p = 2658{,}43 \\ \sigma_p = -381{,}83 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 = 2658{,}43\ \text{kPa} \\ \sigma_2 = -381{,}83\ \text{kPa} \end{cases}$$

$$\sigma_{mín} = \sigma_2 = -381{,}83\ \text{kPa}$$

Direcção principal correspondente a σ_2 $\Rightarrow$ $\left[T - \sigma_2 I \right] x\, \overline{n}_2 = \overline{0}$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2276{,}6 - (-381{,}83) & -1007{,}5 \\ -1007{,}5 & -(-381{,}83) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \leftarrow \text{escolher uma só equação} \\ n_{2x}^{\,2} + n_{2Y}^{\,2} = 1 & \end{cases}$$

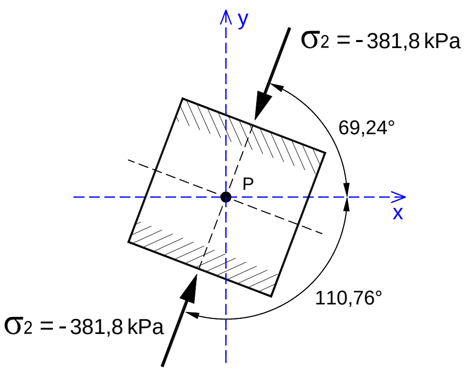
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2658{,}43 & -1007{,}5 \\ -1007{,}5 & 381{,}83 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \leftarrow \text{escolher uma só equação} \\ n_{2x}^{\,2} + n_{2y}^{\,2} = 1 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2658{,}43\ n_{2x} - 1007{,}5\ n_{2y} = 0 \\ n_{2x}^{\,2} + n_{2y}^{\,2} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n_{2x} = 0{,}3544 \\ n_{2y} = 0{,}9351 \end{cases}$$

$$\overline{n}_2 = (0{,}3544\,;\ 0{,}9351) \quad \text{ou} \quad \overline{n}_2 = (-0{,}3544\,;\ -0{,}9351)$$

$$\alpha_{p2} = \text{arctg}\left(\frac{0{,}9351}{0{,}3544}\right) = 69{,}24^\circ$$

α_{p2} - ângulo que o eixo principal 2 faz com o eixo X
(rotação positiva na direcção de x^+ para y^+)

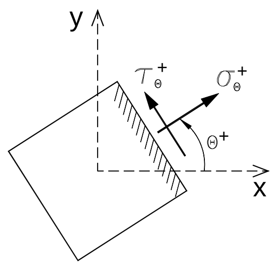


Alínea c) - Fórmulas

Tensão normal e tensão tangencial numa faceta

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

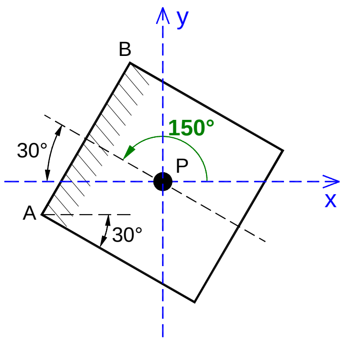
$$\tau_\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

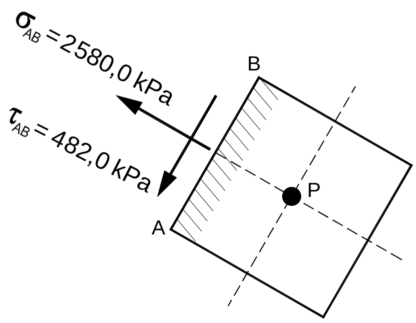


Ponto **P**
$$\begin{cases} \sigma_X = 2\,276{,}6 \text{ kPa} \\ \sigma_Y = 0 \\ \tau_{XY} = \tau_{YX} = -1\,007{,}5 \text{ kPa} \end{cases}$$

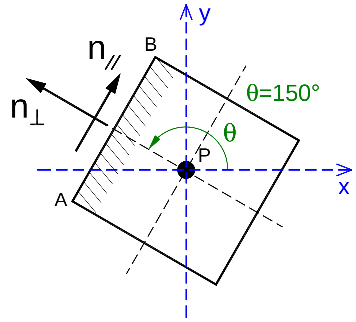
Para $\theta = 150°$

$$\begin{cases} \sigma_{\theta=150^\circ} = \dfrac{2\,276{,}6}{2} + \dfrac{2\,276{,}6}{2}\cos(2\times150^\circ) - 1\,007{,}5\ \mathrm{sen}(2\times150^\circ) = 2\,580{,}0 \text{ kPa} \\ \tau_{\theta=150^\circ} = -\dfrac{2\,276{,}6}{}\ \mathrm{sen}(2\times150^\circ) - 1\,007{,}5\ \cos(2\times150^\circ) = 482{,}0 \text{ kPa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{AB} = 2\,580{,}0 \text{ kPa} \\ \tau_{AB} = 482{,}0 \text{ kPa} \end{cases}$$





Alínea c) - Cálculo Matricial



$\overline{n}_{\perp} = (\cos 150^\circ \,;\ \operatorname{sen} 150^\circ)$
$\overline{n}_{//} = (\operatorname{sen} 150^\circ \,;\ -\cos 150^\circ)$

$$\overline{\sigma} = \overline{T}_R \times \overline{n}_{\perp} \quad \Rightarrow \quad \overline{\sigma} = [[T] \times \overline{n}_{\perp}]^T \times \overline{n}_{\perp}$$

$$\sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 2276{,}6 & -1007{,}5 \\ -1007{,}5 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{x} \begin{bmatrix} \cos 150^\circ \\ \operatorname{sen} 150^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \mathrm{x} \begin{bmatrix} \cos 150^\circ \\ \operatorname{sen} 150^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2475{,}34 & 872{,}52 \end{bmatrix} \mathrm{x} \begin{bmatrix} \cos 150^\circ \\ \operatorname{sen} 150^\circ \end{bmatrix} = 2580{,}0 \text{ kPa}$$

Como o sinal é positivo, o sentido da tensão **σ** vai ser igual ao do vector $\overline{n}_{\perp}$.

$$\overline{\tau} = \overline{T}_R \times \overline{n}_{//} \quad \Rightarrow \quad \overline{\tau} = [[T] \times \overline{n}_{\perp}]^T \times \overline{n}_{//}$$

$$\tau = \left\{ \begin{bmatrix} 2276{,}6 & -1007{,}5 \\ -1007{,}5 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{x} \begin{bmatrix} \cos 150^\circ \\ \operatorname{sen} 150^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \mathrm{x} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 150^\circ \\ -\cos 150^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2475{,}34 & 872{,}52 \end{bmatrix} \mathrm{x} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 150^\circ \\ -\cos 150^\circ \end{bmatrix} = -482{,}0 \text{ kPa}$$

Como o sinal é negativo, o sentido da tensão **τ** vai ser contrário ao do vector $\overline{n}_{//}$, que pela convenção corresponderá a uma tensão tangencial positiva.

Tensões positivas:
(convenção)