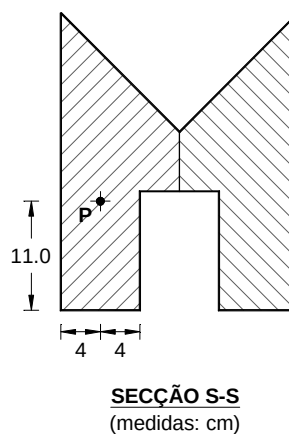
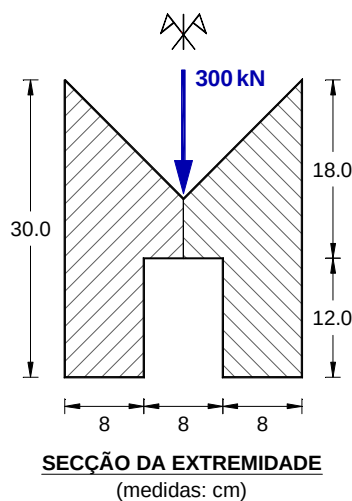
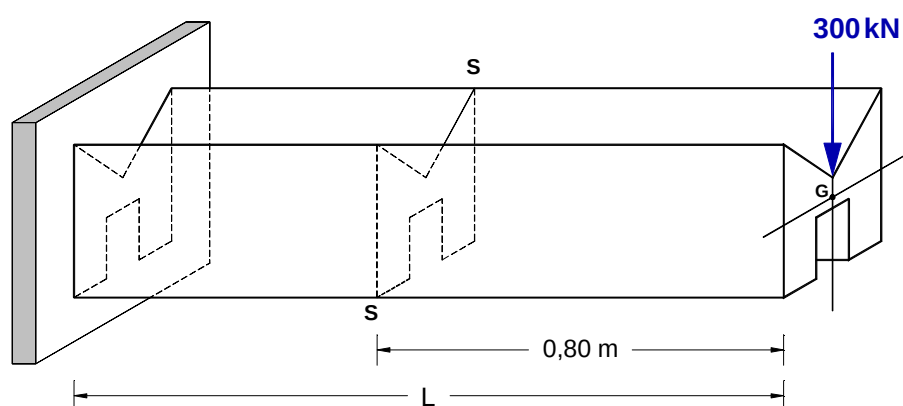


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

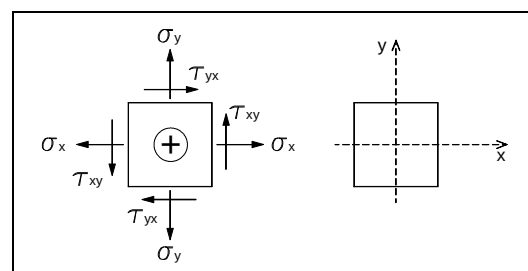
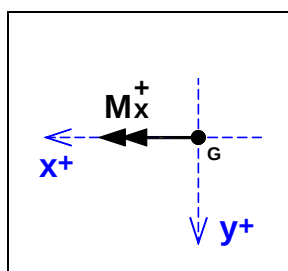
RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME DE RECURSO - FEVEREIRO / 2013

FLEXÃO PLANA - ESTADO PLANO DE TENSÃO



RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO
CONSIDERANDO AS
CONVENÇÕES:



ISABEL ALVIM TELES

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME RECURSO - FEV/2013 – FLEXÃO PLANA E ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

ENUNCIADO

Considere a viga encastrada representada na *Figura 1*, cuja secção transversal é constituída por dois elementos pré-fabricados simétricos (ver *Figura 2*) com peso próprio desprezável.

As características do elemento pré-fabricado estão indicadas na *Tabela* abaixo.

Na extremidade da viga está a actuar uma única força cujo valor de cálculo é **300 kN** (valor majorado).

O plano de solicitação é baricêntrico.

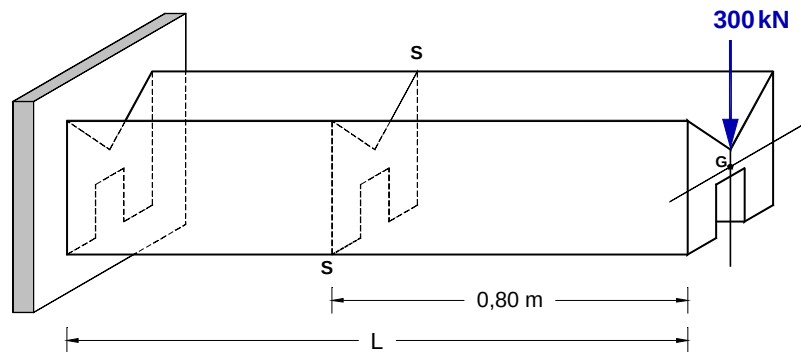
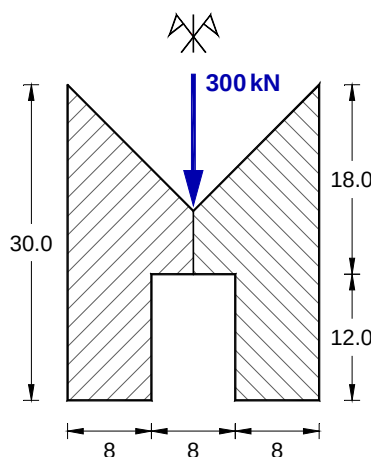
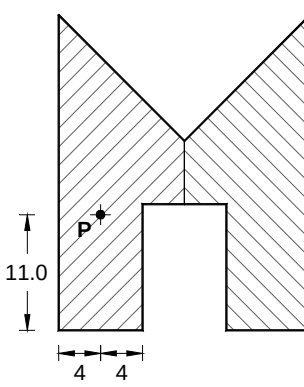


Figura 1



SECÇÃO DA EXTREMIDADE
(medidas: cm)

Figura 2



SECÇÃO S-S
(medidas: cm)

Figura 3

ELEMENTO PRÉ-FABRICADO	
MATERIAL:	
$\sigma_{RD,comp}$	= 290 MPa
$\sigma_{RD,trac}$	= 330 MPa
Área	= 240 cm ²
I_a	= 12708,0 cm ⁴
I_b	= 2153,6 cm ⁴
(medidas: cm)	

Tabela

- Tendo em conta os valores indicados na *Tabela* para a tensão resistente de cálculo à compressão ($\sigma_{RD,comp}$) e a tensão resistente de cálculo à tracção ($\sigma_{RD,trac}$) do material que constitui a viga, determine o seu máximo vão (L) compatível com a verificação da segurança;
- Considere o ponto **P** da secção **S-S** (secção a 0,80 m da extremidade da viga), tal como representado na *Figura 1* e *Figura 3*.
 - Defina o tensor das tensões que caracteriza o estado plano de tensão no ponto **P**;
 - Calcule por um processo analítico a tensão normal (σ) e a tensão tangencial (τ) a actuar na faceta **AC** e represente-as na *Figura 4*.

Nota: Se não conseguiu determinar o tensor das tensões na alínea anterior, considere o seguinte:

$$\begin{bmatrix} -25 & -10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

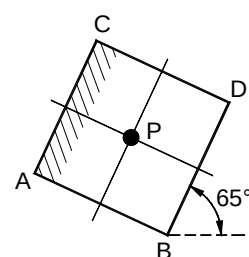


Figura 4

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME RECURSO - FEV/2013 – FLEXÃO PLANA E ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

RESOLUÇÃO

Alínea a)

Área da secção transversal

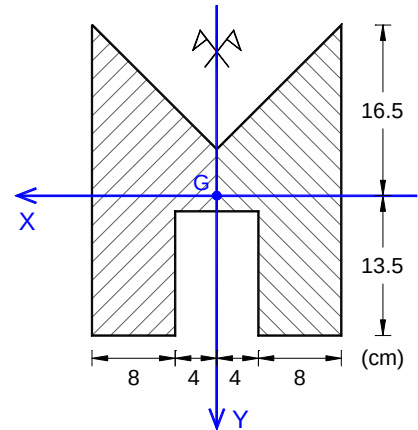
$$A = 2 \times 240 = 480 \text{ cm}^2 = 480 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Posição do centro de gravidade

Os centros de gravidade das 2 peças que constituem a secção transversal estão sob o eixo a, logo o centro de gravidade da secção transversal também tem que estar sob o eixo a $\Rightarrow$ eixo x $\equiv$ eixo a

O eixo y é eixo de simetria, logo o centro de gravidade da secção transversal também tem que estar sob o eixo y.

O eixo x e o eixo y são **eixos principais centrais de inércia**, pois o eixo y é de simetria.



Momento de inércia I_x

$$I_x = 2 \times 12708 = 25416 \text{ cm}^4 = 25416 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

O dimensionamento deverá ser realizado para a secção onde ocorrem os maiores esforços, ou seja, para a secção do encastramento.

Esforços na secção do encastramento:

$$\begin{cases} V = 300 \text{ kN} \\ M_x = -300 \times L \text{ kNm} \end{cases}$$

Tensões normais: $\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$

Fibra superior: $y = -16,5 \text{ cm} \Rightarrow \sigma = \frac{-300 \times L}{25416 \times 10^{-8}} \times (-0,165) = 194759,2 \times L \text{ kPa}$ (tracção)

Fibra inferior: $y = 13,5 \text{ cm} \Rightarrow \sigma = \frac{-300 \times L}{25416 \times 10^{-8}} \times 0,135 = -159348,4 \times L \text{ kPa}$ (compressão)

Verificação da segurança

$$\begin{cases} \sigma_{Ed, comp} \leq \sigma_{Rd, comp} \\ \sigma_{Ed, trac} \leq \sigma_{Rd, trac} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 159348,4 \times L \leq 290000 \\ 194759,2 \times L \leq 330000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \leq 1,82 \text{ m} \\ L \leq 1,69 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow L \leq 1,69 \text{ m}$$

O vão máximo compatível com a verificação da segurança é 1,69 m.

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME RECURSO - FEV/2013 – FLEXÃO PLANA E ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

Alínea b) - b1)

Esforços na secção S-S a 0,80 m da extremidade da viga: $\begin{cases} V = 300 \text{ kN} \\ M_X = -300 \times 0,8 = -240 \text{ kNm} \end{cases}$

Tensão normal no ponto P: $\sigma = \frac{M_X}{I_X} Y$ com $Y = 2,5 \text{ cm}$

$$\sigma = \frac{-240}{25416 \times 10^{-8}} \times 0,025 = -23607,2 \text{ kPa (compressão)}$$

$$\sigma = -23,6 \text{ MPa}$$

Tensão tangencial no ponto P: $\tau = \frac{V S}{I b}$

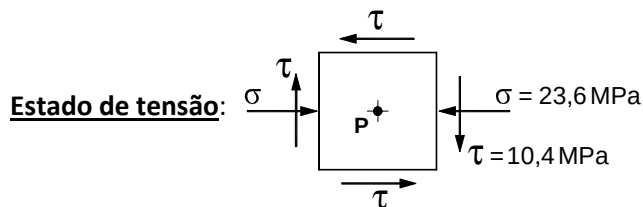
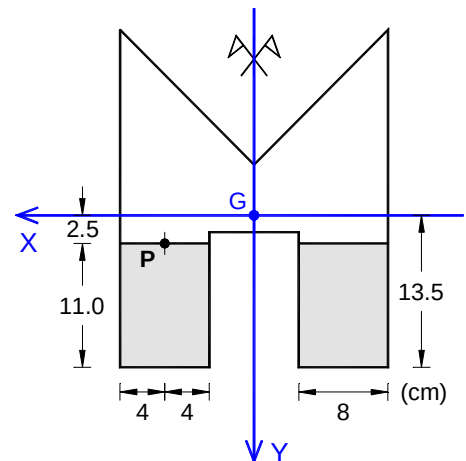
$$V = 300 \text{ kN}$$

$$I = 25416 \text{ cm}^4 = 25416 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$b = 2 \times 0,08 = 0,16 \text{ cm}$$

$$S = 2 \times \left[11 \times 8 \times \left(13,5 - \frac{11}{2} \right) \right] = 1408 \text{ cm}^3 = 1408 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ (momento estático)}$$

$$\tau = \frac{V S}{I b} = \frac{300 \times 1408 \times 10^{-6}}{25416 \times 10^{-8} \times 0,16} = 10387,2 \text{ kPa} = 10,4 \text{ MPa}$$



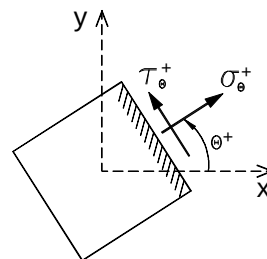
Tensor das tensões: $T = \begin{bmatrix} -23,6 & -10,4 \\ -10,4 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$

Alínea b) - b2) - Fórmulas

Tensão normal e tensão tangencial numa faceta

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$



Ponto P $\begin{cases} \sigma = -23,6 \text{ kPa} \\ \tau = -10,4 \text{ kPa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_X = -23,6 \text{ kPa} \\ \sigma_Y = 0 \\ \tau_{XY} = \tau_{YX} = -10,4 \text{ kPa} \end{cases}$

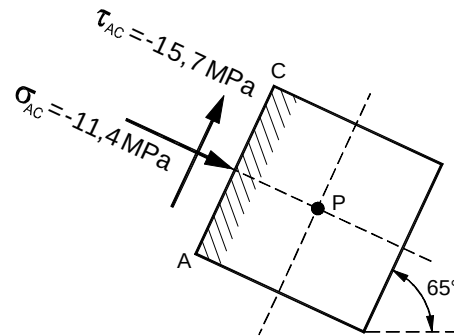
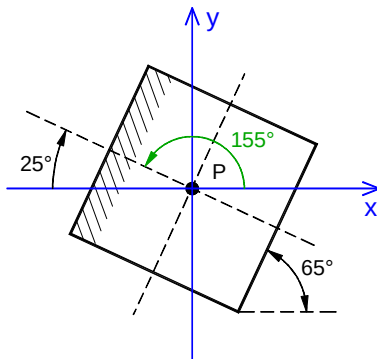
RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME RECURSO - FEV/2013 – FLEXÃO PLANA E ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

Para $\theta = 155^\circ$

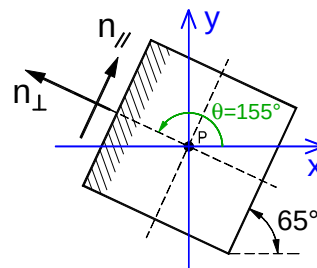
$$\begin{cases} \sigma_{\theta=155^\circ} = \frac{-23,6}{2} + \frac{-23,6}{2} \cos(2 \times 155^\circ) - 10,4 \sin(2 \times 155^\circ) = -11,4 \text{ MPa} \\ \tau_{\theta=155^\circ} = -\frac{-23,6}{2} \sin(2 \times 155^\circ) - 10,4 \cos(2 \times 155^\circ) = -15,7 \text{ MPa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{AC} = -11,4 \text{ MPa} \\ \tau_{AC} = -15,7 \text{ MPa} \end{cases}$$



Alínea b) - b2) - Cálculo Matricial

$$\bar{n}_\perp = (\cos 155^\circ; \sin 155^\circ)$$

$$\bar{n}_\parallel = (\sin 155^\circ; -\cos 155^\circ)$$



$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \bar{T}_R \times \bar{n}_\perp \Rightarrow \bar{\sigma} = \left[[T] \times \bar{n}_\perp \right]^T \times \bar{n}_\perp \\ \sigma &= \left\{ \begin{bmatrix} -23,6 & -10,4 \\ -10,4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos 155^\circ \\ \sin 155^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} \cos 155^\circ \\ \sin 155^\circ \end{bmatrix} = [16,994 \quad 9,426] \times \begin{bmatrix} \cos 155^\circ \\ \sin 155^\circ \end{bmatrix} = -11,4 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Como o sinal é negativo, o sentido da tensão σ vai ser contrário ao do vector $\bar{n}_\perp$.

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \bar{T}_R \times \bar{n}_\parallel \Rightarrow \bar{\tau} = \left[[T] \times \bar{n}_\parallel \right]^T \times \bar{n}_\parallel \\ \tau &= \left\{ \begin{bmatrix} -23,6 & -10,4 \\ -10,4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos 155^\circ \\ \sin 155^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} \sin 155^\circ \\ -\cos 155^\circ \end{bmatrix} = [16,994 \quad 9,426] \times \begin{bmatrix} \sin 155^\circ \\ -\cos 155^\circ \end{bmatrix} = 15,7 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Como o sinal é positivo, o sentido da tensão τ vai ser igual ao do vector $\bar{n}_\parallel$, que pela convenção corresponderá a uma tensão tangencial negativa.

