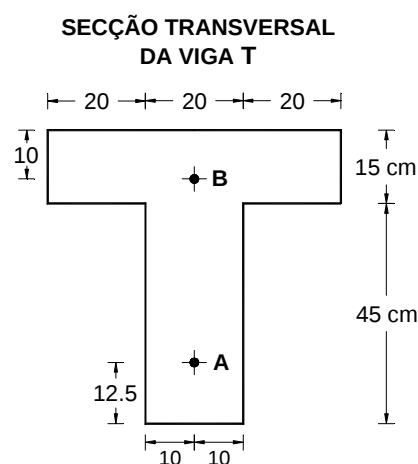
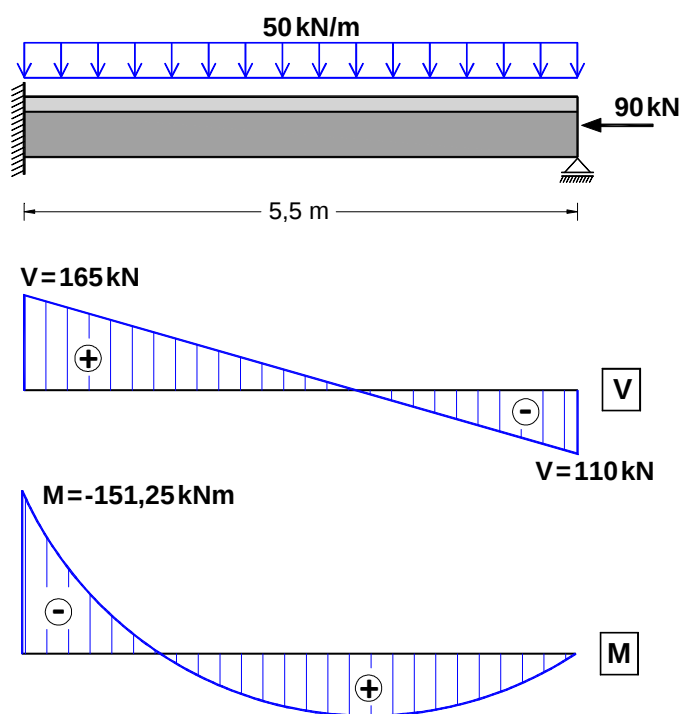


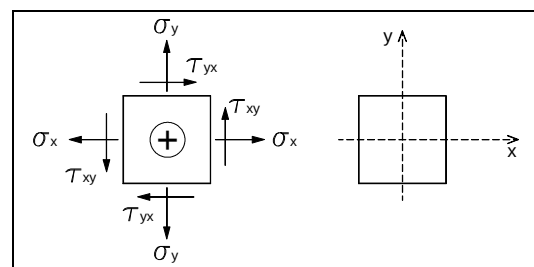
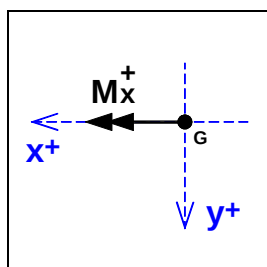
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

# RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

## TENSÕES NORMAIS E TENSÕES TANGENCIAIS EM FLEXÃO PLANA ESTADO PLANO DE TENSÃO



RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO  
CONSIDERANDO AS  
CONVENÇÕES:

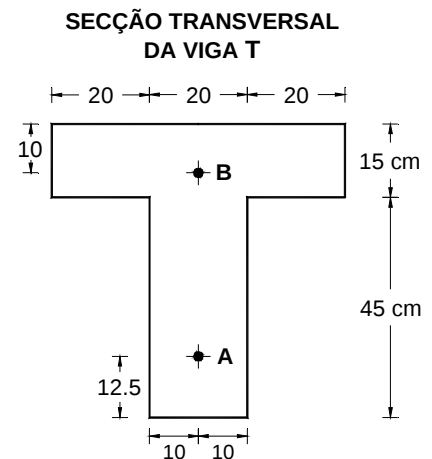
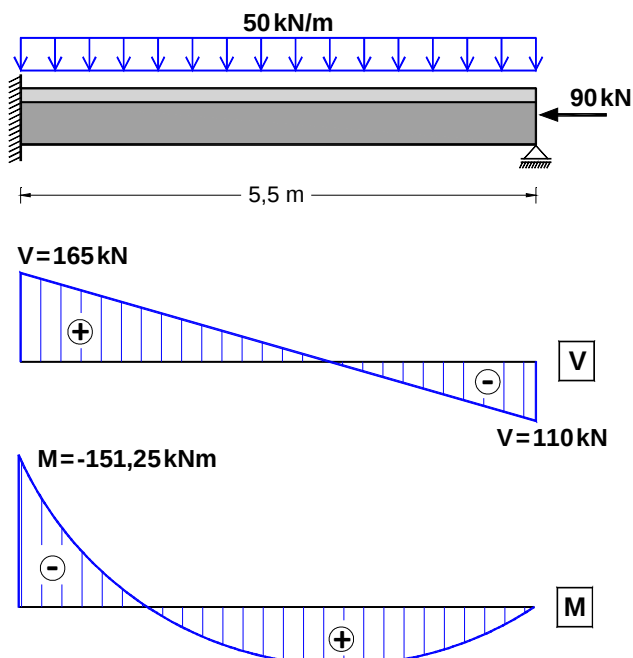


**ENUNCIADO**

Considere a **viga T** com 5,5 m de vão representada na figura e para a qual se apresentam os diagramas de Esforço Transverso e Momento Flector.

A força de 90 kN está a actuar no centro de gravidade da secção transversal e o plano de solicitação da carga distribuída de 50 kN/m é baricêntrico.

- Para a secção localizada 15 cm à direita do apoio com encastramento, desenhe os diagramas de tensões normais e tangenciais, caracterizando as tensões nos pontos **A** e **B**;
- Para a secção localizada 15 cm à direita do apoio com encastramento, determine no ponto **A** as tensões principais e as respectivas direcções;
- Para a secção localizada 15 cm à direita do apoio com encastramento, determine no ponto **B** as tensões principais e as respectivas direcções;
- Para a secção onde actua o momento máximo positivo, determine no ponto **A** as tensões principais e as respectivas direcções;
- Para a secção onde actua o momento máximo positivo, determine no ponto **B** as tensões principais e as respectivas direcções;
- Para a secção onde actua o momento máximo positivo, caracterize no ponto **B** o estado de tensão correspondente à tensão tangencial máxima.



**RESISTÊNCIA DE MATERIAIS**

**FLEXÃO PLANA – ESTADO PLANO DE TENSÃO**

ISABEL ALVIM TELES

**RESOLUÇÃO**

Área da secção transversal

$$A = 45 \times 20 + 60 \times 15 = 1800 \text{ cm}^2 = 0,18 \text{ m}^2$$

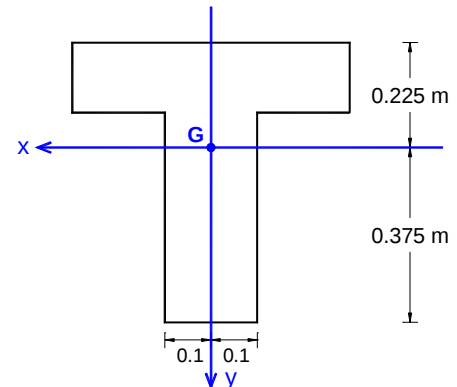
Posição do centro de gravidade

$$y_G = \frac{45 \times 20 \times 22,5 + 60 \times 15 \times 52,5}{1800} = 37,5 \text{ cm} = 0,375 \text{ m}$$

Momento de inércia  $I_x$

$$I_x = \frac{20 \times 45^3}{12} + 20 \times 45 \times \left(37,5 - \frac{45}{2}\right)^2 + \frac{60 \times 15^3}{12} + 60 \times 15 \times \left(22,5 - \frac{15}{2}\right)^2 = 573750 \text{ cm}^4$$

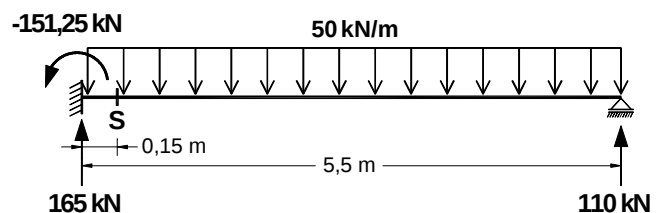
$$I_x = 573750 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$



**Alínea a)**

Secção S a 0,15 m do apoio da direita

$$\begin{cases} N = -90 \text{ kN} \\ V = 165 - 50 \times 0,15 = 157,5 \text{ kN} \\ M = -151,25 + 165 \times 0,15 - \frac{50}{2} \times 0,15^2 = -127,0625 \text{ kNm} \end{cases}$$



Tensões normais

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y$$

**A:**  $y_A = 0,25 \text{ m} \Rightarrow \sigma_A = \frac{-90}{0,18} + \frac{-127,0625}{573750 \times 10^{-8}} \times 0,25 = -500 - 5536,49 = -6036,49 \text{ kPa}$

**B:**  $y_B = -0,125 \text{ m} \Rightarrow \sigma_B = \frac{-90}{0,18} + \frac{-127,0625}{573750 \times 10^{-8}} \times (-0,125) = -500 + 2768,25 = 2268,25 \text{ kPa}$

**G** (centro de gravidade):  $y_G = 0 \Rightarrow \sigma_G = \frac{-90}{0,18} + \frac{-127,0625}{573750 \times 10^{-8}} \times 0 = -500 \text{ kPa}$

**C:**  $y_C = -0,225 \text{ m} \Rightarrow \sigma_C = \frac{-90}{0,18} + \frac{-127,0625}{573750 \times 10^{-8}} \times (-0,225) = -500 + 4982,84 = 4482,84 \text{ kPa}$

**D e E:**  $y_D = y_E = -0,075 \text{ m} \Rightarrow \sigma_D = \sigma_E = \frac{-90}{0,18} + \frac{-127,0625}{573750 \times 10^{-8}} \times (-0,075) = -500 + 1660,95 = 1160,95 \text{ kPa}$

**F:**  $y_F = 0,375 \text{ m} \Rightarrow \sigma_F = \frac{-90}{0,18} + \frac{-127,0625}{573750 \times 10^{-8}} \times 0,375 = -500 - 8304,74 = -8804,74 \text{ kPa}$

**RESISTÊNCIA DE MATERIAIS**

**FLEXÃO PLANA – ESTADO PLANO DE TENSÃO**

ISABEL ALVIM TELES

**Tensões tangenciais**

$$\tau = \frac{V S}{I b}$$

**A**  $S_A = 0,20 \times 0,125 \times 0,3125 = 78,125 \times 10^{-4} \text{ m}^3$   
 $\tau_A = \frac{157,5 \times 78,125 \times 10^{-4}}{573750 \times 10^{-8} \times 0,20} = 1072,30 \text{ kPa}$

**B**  $S_B = 0,60 \times 0,10 \times 0,175 = 105 \times 10^{-4} \text{ m}^3$   
 $\tau_B = \frac{157,5 \times 105 \times 10^{-4}}{573750 \times 10^{-8} \times 0,60} = 480,39 \text{ kPa}$

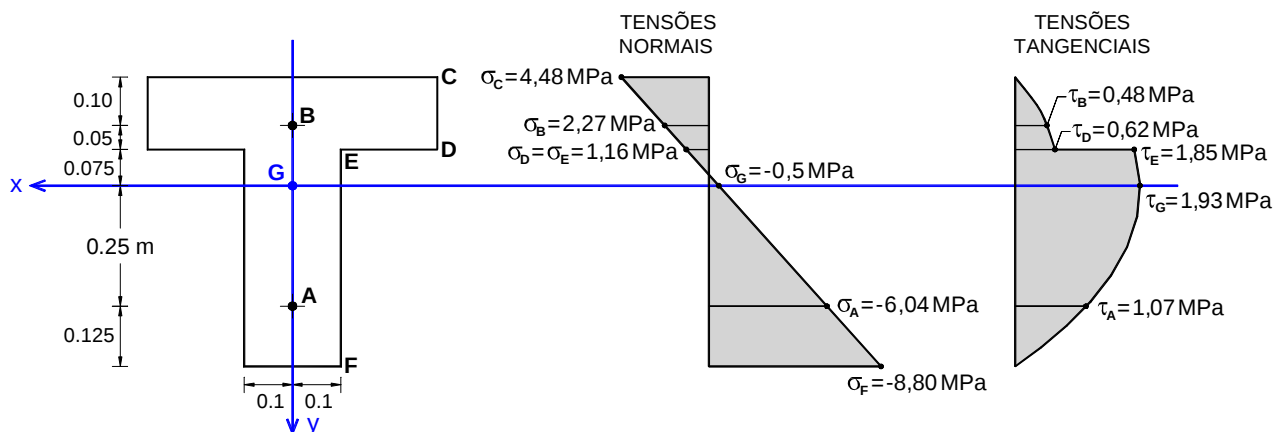
**G** (centro de gravidade)  $S_G = 0,20 \times 0,375 \times 0,1875 = 140,625 \times 10^{-4} \text{ m}^3$   
 $\tau_G = \frac{157,5 \times 140,625 \times 10^{-4}}{573750 \times 10^{-8} \times 0,20} = 1930,15 \text{ kPa}$

**C**  $S_C = 0$   
 $\tau_C = 0$

**D**  $S_D = 0,60 \times 0,15 \times 0,15 = 135 \times 10^{-4} \text{ m}^3$   
 $\tau_D = \frac{157,5 \times 135 \times 10^{-4}}{573750 \times 10^{-8} \times 0,60} = 617,65 \text{ kPa}$

**E**  $S_E = Q_D = 135 \times 10^{-4} \text{ m}^3$   
 $\tau_E = \frac{157,5 \times 135 \times 10^{-4}}{573750 \times 10^{-8} \times 0,20} = 1852,94 \text{ kPa}$

**F**  $S_F = 0$   
 $\tau_F = 0$



*Nota: Os diagramas de tensões normais e tangenciais estão representados com escalas diferentes.*

**RESISTÊNCIA DE MATERIAIS**

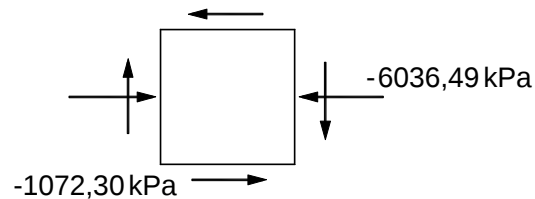
**FLEXÃO PLANA – ESTADO PLANO DE TENSÃO**

ISABEL ALVIM TELES

**Alínea b)**

Secção S a 0,15 m do apoio com encastramento

$$\text{Ponto A} \begin{cases} \sigma_A = -6036,49 \text{ kPa} \\ \tau_A = 1072,30 \text{ kPa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -6036,49 \text{ kPa} \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = -1072,30 \text{ kPa} \end{cases} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} -6036,49 & -1072,30 \\ -1072,30 & 0 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$



• Fórmulas

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \pm 90^\circ$$

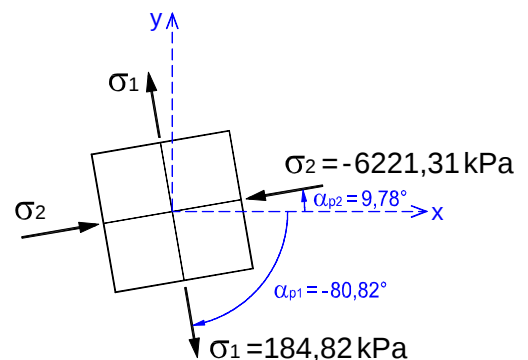
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

ep - eixo principal

$$\begin{cases} \sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{-6036,49}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(-6036,49)^2 + 4 \times (-1072,30)^2} = 184,82 \text{ kPa} \\ \sigma_{\min} = \sigma_2 = \frac{-6036,49}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(-6036,49)^2 + 4 \times (-1072,30)^2} = -6221,31 \text{ kPa} \end{cases}$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2 \times (-1072,30)}{-6036,49} \right) = 9,78^\circ \pm 90^\circ$$

$$\sigma_y > \sigma_x \Rightarrow \sigma_1 \text{ mais perto do eixo } y \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{p1} = -80,22^\circ \\ \alpha_{p2} = 9,78^\circ \end{cases}$$



Ou:

$$\sigma_{\alpha_p = -80,22^\circ} = \frac{-6036,49}{2} + \frac{-6036,49}{2} \cos(-160,44^\circ) - 1072,30 \sin(-160,44^\circ) = 184,82 \text{ kPa} \Rightarrow \sigma_1$$

$$\sigma_{\alpha_p = 9,78^\circ} = \frac{-6036,49}{2} + \frac{-6036,49}{2} \cos 19,56^\circ - 1072,30 \sin 19,56^\circ = -6221,31 \text{ kPa} \Rightarrow \sigma_2$$

## RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

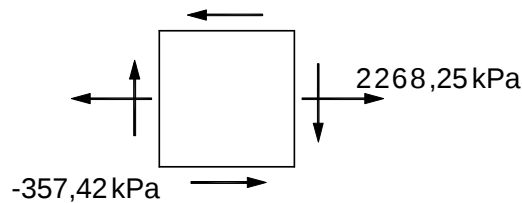
### FLEXÃO PLANA – ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

#### Alínea c)

Secção S a 0,15 m do apoio com encastramento

$$\text{Ponto B} \begin{cases} \sigma_B = 2268,25 \text{ kPa} \\ \tau_B = 357,43 \text{ kPa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_X = 2268,25 \text{ kPa} \\ \sigma_Y = 0 \\ \tau_{XY} = \tau_{YX} = -357,43 \text{ kPa} \end{cases} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 2268,25 & -357,43 \\ -357,43 & 0 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$



#### • CÁLCULO MATRICIAL

Tensões principais  $\Rightarrow \det |T - \sigma_p I| = 0$

$$\det \begin{bmatrix} 2268,25 - \sigma_p & -357,43 \\ -357,43 & -\sigma_p \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (2268,25 - \sigma_p) \times (-\sigma_p) - 357,43^2 = 0$$

$$\sigma_p^2 - 2268,25 \sigma_p - 127756,2049 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_p = 2323,24 \\ \sigma_p = -54,99 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 2323,24 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -54,99 \text{ MPa} \end{cases}$$

Direcção principal correspondente a  $\sigma_1 \Rightarrow [T - \sigma_1 I] \times \bar{n}_1 = \vec{0}$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2268,25 - 2323,24 & -357,43 \\ -357,43 & -2323,24 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{escolher uma só equação} \\ n_{1x}^2 + n_{1y}^2 = 1 \end{cases}$$

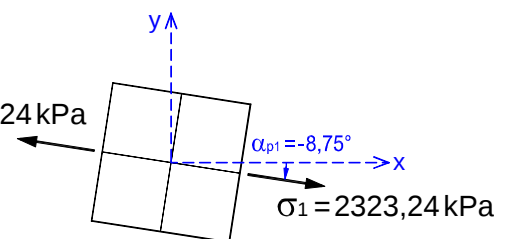
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -54,99 & -357,43 \\ -357,43 & -2323,24 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{escolher uma só equação} \\ n_{1x}^2 + n_{1y}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -54,99 n_{1x} - 357,43 n_{1y} = 0 \\ n_{1x}^2 + n_{1y}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_{1x} = 0,9884 \\ n_{1y} = -0,1521 \end{cases}$$

$$\bar{n}_1 = (0,9884; -0,1521) \text{ ou } \bar{n}_1 = (-0,9884; 0,1521)$$

$$\alpha_{p1} = \arctg\left(\frac{-0,1521}{0,9884}\right) = -8,75^\circ$$

$\alpha_{p1}$  - ângulo que o eixo principal 1 faz com o eixo X



**RESISTÊNCIA DE MATERIAIS**

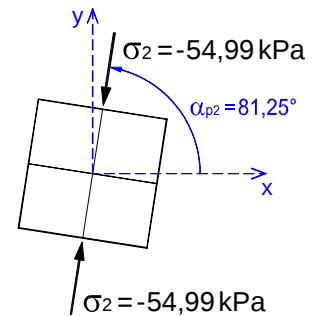
**FLEXÃO PLANA – ESTADO PLANO DE TENSÃO**

ISABEL ALVIM TELES

(rotação negativa na direcção de  $x^+$  para  $y^+$ )

**Direcção principal correspondente a  $\sigma_2$**

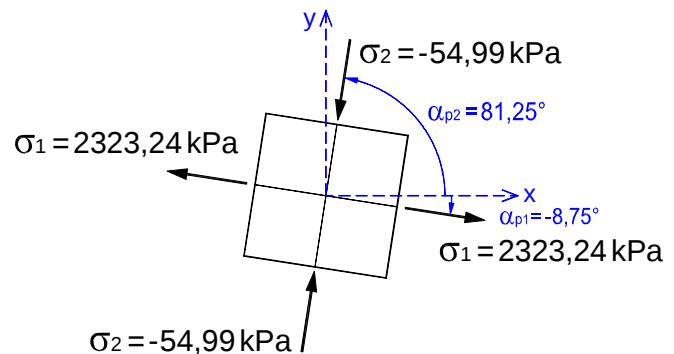
$$\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \text{ e } \begin{cases} \bar{n}_1 = (0,9884; -0,1521) \\ \text{ou} \\ \bar{n}_1 = (-0,9884; 0,1521) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{n}_2 = (0,1521; 0,9884) \\ \text{ou} \\ \bar{n}_2 = (-0,1521; 0,9884) \end{cases}$$



$$\alpha_{p2} = \arctg\left(\frac{0,9884}{0,1521}\right) = 81,25^\circ$$

$\alpha_{p2}$  - ângulo que o eixo principal 2 faz com o eixo do X  
(rotação positiva na direcção de  $x^+$  para  $y^+$ )

**Estado de tensão principal no ponto B**



**Alínea d)**

**Secção onde actua o momento máximo positivo**

$$M_{\max} \Rightarrow V = 0$$

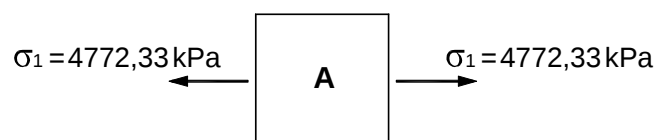
$$V = 165 - 50 Z = 0 \Rightarrow Z = 3,30 \text{ m}$$

$$M_{\max} = -151,25 + 165 \times 3,30 - \frac{50}{2} \times 3,30^2 = 121 \text{ kNm}$$

$$\begin{cases} N = -90 \text{ kN} \\ V = 0 \\ M = 121 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\mathbf{A} \quad \left| \begin{array}{l} y_A = 0,25 \text{ m} \Rightarrow \sigma_A = \frac{-90}{0,18} + \frac{121}{573750 \times 10^{-8}} \times 0,25 = -500 + 5272,33 = 4772,33 \text{ kPa} \\ V = 0 \Rightarrow \tau_A = 0 \end{array} \right.$$

Como  $\tau_A = 0 \Rightarrow$  estado principal de tensão  $\Rightarrow \sigma_A = \sigma_1 = 4772,33 \text{ kPa}$  e  $\sigma_2 = 0$



**RESISTÊNCIA DE MATERIAIS**

**FLEXÃO PLANA – ESTADO PLANO DE TENSÃO**

ISABEL ALVIM TELES

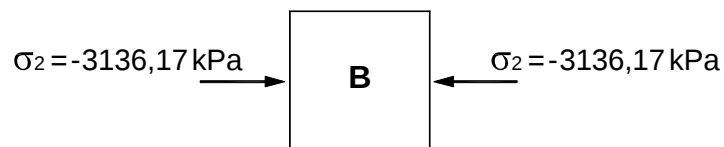
**Alínea e)**

**Secção onde actua o momento máximo positivo**

$$\begin{cases} N = -90 \text{ kN} \\ V = 0 \\ M = 121 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\underline{\mathbf{B}} \quad \left| \begin{array}{l} y_B = -0,125 \text{ m} \Rightarrow \sigma_B = \frac{-90}{0,18} + \frac{121}{573750 \times 10^{-8}} \times (-0,125) = -500 - 2636,17 = +3136,17 \text{ kPa} \\ V = 0 \Rightarrow \tau_B = 0 \end{array} \right.$$

Como  $\tau_B = 0 \Rightarrow$  estado principal de tensão  $\Rightarrow \sigma_B = \sigma_2 = -3136,17 \text{ kPa}$  e  $\sigma_1 = 0$



**Alínea f)**

**Secção onde actua o momento máximo positivo**

$$\underline{\mathbf{B}} \quad \left| \begin{array}{ll} \sigma_x = \sigma_1 = 0 & \alpha_{p1} = 90^\circ \\ \sigma_y = \sigma_2 = -3136,17 \text{ kPa} & \alpha_{p2} = 0^\circ \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \end{array} \right.$$

$$\alpha_c = \alpha_p \pm 45^\circ = \pm 45^\circ$$

$$\begin{cases} \alpha_c = 45^\circ \\ \tau_{\alpha_c} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_c + \tau_{xy} \cos 2\alpha_c = -\frac{0 - (-3136,17)}{2} \sin(2 \times 45^\circ) = -1568,085 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_c = -45^\circ \\ \tau_{\alpha_c} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_c + \tau_{xy} \cos 2\alpha_c = -\frac{0 - (-3136,17)}{2} \sin(-90^\circ) = 1568,085 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\text{Quando } \tau_{\text{máx}} \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{0 - 3136,17}{2} = -1568,085 \text{ kPa}$$

**Estado de tensão no ponto B correspondente  
à tensão tangencial máxima**

