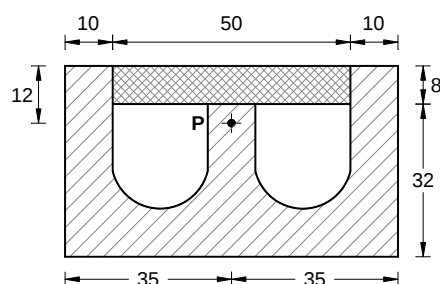
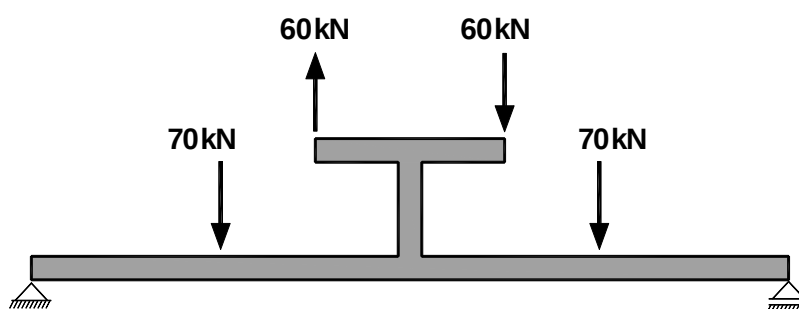


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

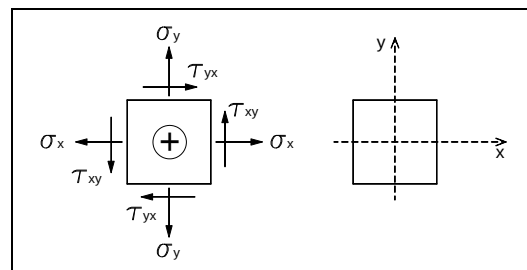
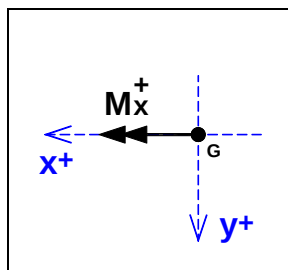
PROVA DE AVALIAÇÃO – 1ª FREQUÊNCIA – NOVEMBRO / 2014

FLEXÃO PLANA - ESTADO PLANO DE TENSÃO



SECÇÃO TRANSVERSAL

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO
CONSIDERANDO AS
CONVENÇÕES:



ISABEL ALVIM TELES

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

1ª FREQUÊNCIA - NOV/2014 – FLEXÃO PLANA E ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

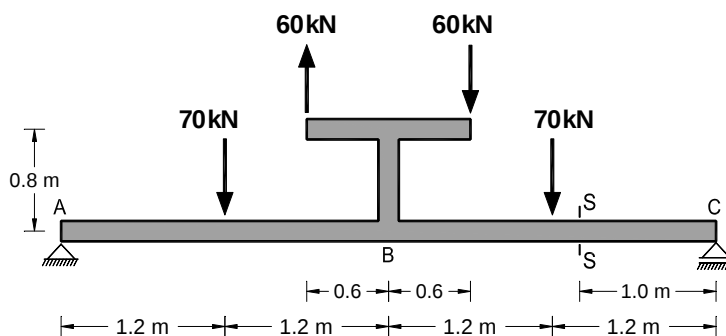
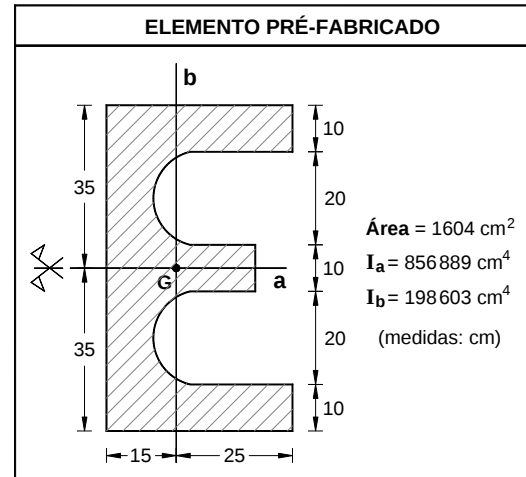
ENUNCIADO

Considere a estrutura abaixo representada, cuja secção transversal é constituída por um elemento pré-fabricado e uma secção rectangular.

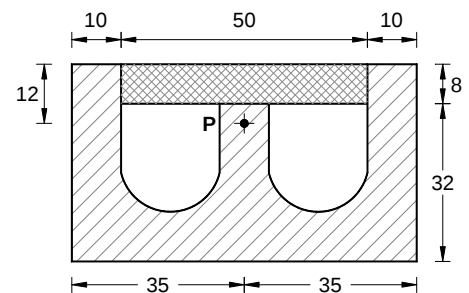
As características do elemento pré-fabricado estão indicadas na tabela anexa.

Notas:

- O plano de solicitação é baricêntrico.
- O peso próprio da viga é desprezável.
- Considere o factor de segurança de 1,4.



Estrutura



Secção transversal

- 1- Calcule as tensões resistentes de cálculo à compressão e à tracção ($\sigma_{Rd,comp}$, $\sigma_{Rd,trac}$) compatíveis com a verificação da segurança do tramo **ABC** da estrutura.
- 2- Considere o ponto **P** da secção **S-S** (secção a 1,0 m do apoio da direita), tal como representado na figura acima.
 - a) Defina o tensor das tensões que caracteriza o estado plano de tensão no ponto **P**;
 - b) Recorrendo ao **cálculo matricial**, calcule a tensão principal máxima e a respectiva direcção, representando todos os resultados num esquema ilustrativo.

Nota: Se não conseguiu determinar o tensor das tensões na alínea anterior, considere o seguinte, correspondente a outra secção:

$$\begin{bmatrix} -780 & 255 \\ 255 & 0 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

1ª FREQUÊNCIA - NOV/2014 – FLEXÃO PLANA E ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

RESOLUÇÃO

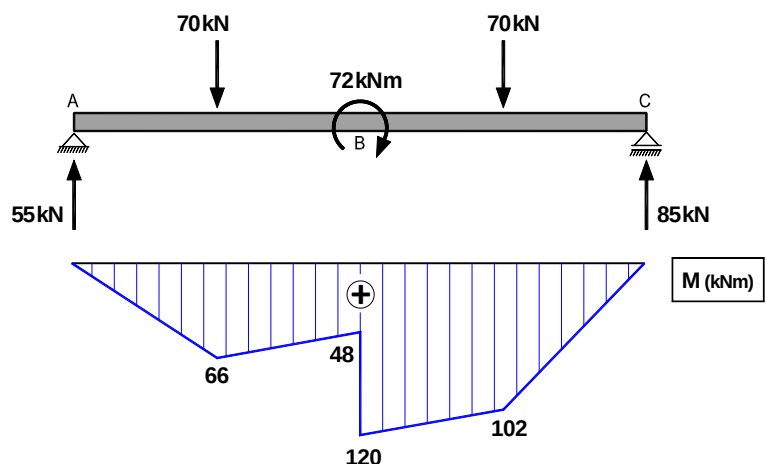
1.

Reacções nos apoios

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_C = 140 \\ 70 \times (1,2 + 3,6) + 60 \times 1,2 = V_C \times 4,8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = 55 \text{ kN } (\uparrow) \\ V_C = 85 \text{ kN } (\uparrow) \end{cases}$$

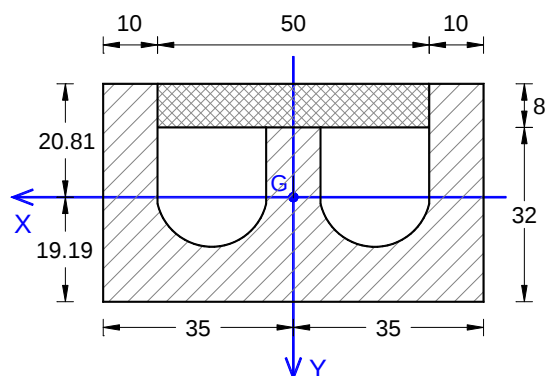
O dimensionamento deverá ser realizado para a secção onde ocorrem os maiores esforços, ou seja, para o máximo momento actuante.

Momento máximo: $M = 120 \text{ kNm}$



Posição do centro de gravidade

$$y_G = \frac{1604 \times 15 + 50 \times 8 \times (40 - 4)}{1604 + 50 \times 8} = 19,19 \text{ cm}$$



Momento de inércia I_x

$$I_{x_G} = 198\,603 + 1604 \times (19,19 - 15)^2 + \frac{50 \times 8^3}{12} + 50 \times 8 \times (20,81 - 4)^2 = 341\,926,76 \text{ cm}^4 = 341\,927 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

Tensões normais: $\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$

Fibra superior: $y = -20,81 \text{ cm} = -0,2081 \text{ m} \Rightarrow \sigma = \frac{120}{341\,927 \times 10^{-8}} \times (-0,2081) = -7\,303 \text{ kPa (comp.)}$

Fibra inferior: $y = 19,19 \text{ cm} = 0,1919 \text{ m} \Rightarrow \sigma = \frac{120}{341\,927 \times 10^{-8}} \times 0,1919 = 6\,735 \text{ kPa (tracção)}$

Verificação da segurança: $\begin{cases} \sigma_{Rd, comp} \geq 1,4 \times 7303 \\ \sigma_{Rd, trac} \geq 1,4 \times 6\,735 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{Rd, comp} \geq 10\,224 \text{ kPa} \\ \sigma_{Rd, trac} \geq 9\,429 \text{ kPa} \end{cases}$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

1ª FREQUÊNCIA - NOV/2014 – FLEXÃO PLANA E ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

2. a)

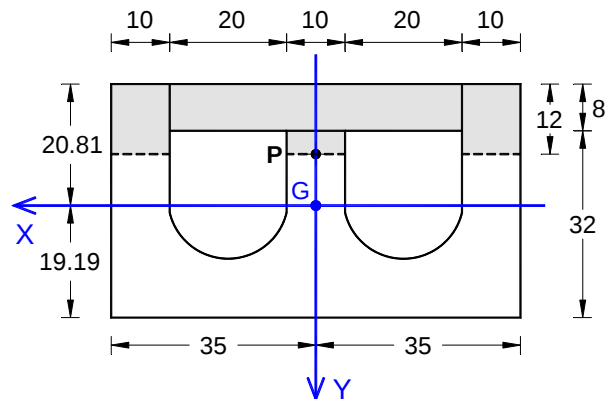
Esforços na secção S-S a 1,00 m de C

$$\begin{cases} V = -85 \text{ kN} \\ M_X = 85 \times 1,0 = 85 \text{ kNm} \end{cases}$$

Tensão normal no ponto P

$$\sigma_X = \frac{M_X}{I_X} Y \quad \text{com } Y = -(20,81 - 12) = -8,81 \text{ cm}$$

$$\sigma_X = \frac{85}{341927 \times 10^{-8}} \times (-0,0881) = -2190,1 \text{ kPa (compressão)}$$



Tensão tangencial no ponto P: $\tau = \frac{V S}{I b}$

$$V = -85 \text{ kN}$$

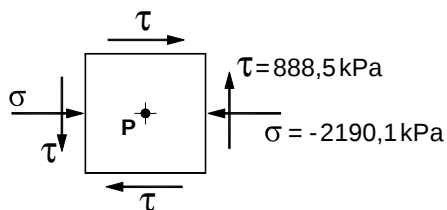
$$I = 341927 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$b = 3 \times 0,10 = 0,30 \text{ m}$$

$$S = 70 \times 8 \times (20,81 - 4) + 3 \times 10 \times 4 \times (20,81 - 8 - 2) = 10710,8 \text{ cm}^3 = 10710,8 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \quad (\text{momento estático})$$

$$\tau = \frac{V S}{I b} = \frac{-85 \times 10710,8 \times 10^{-6}}{341927 \times 10^{-8} \times 0,30} = -887,5 \text{ kPa} \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 887,5 \text{ kPa}$$

Estado de tensão



Tensor das tensões

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2190,1 & 887,5 \\ 887,5 & 0 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

1ª FREQUÊNCIA - NOV/2014 – FLEXÃO PLANA E ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

2. b) Cálculo Matricial

No ponto P: $T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2190,1 & 887,5 \\ 887,5 & 0 \end{bmatrix}$ kPa

Tensões principais: $\det |T - I\sigma| = 0$

$$\det \begin{vmatrix} -2190,1 - \sigma & 887,5 \\ 887,5 & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2190,1 - \sigma) \times (-\sigma) - 887,5 \times 887,5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{\max} = 314,5 \text{ kPa} \\ \sigma_2 = \sigma_{\min} = -2504,6 \text{ kPa} \end{cases}$$

Direcção da tensão principal máxima: $[T - I\sigma_1] \cdot \bar{n}_1 = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} -2190,1 - 314,5 & 887,5 \\ 887,5 & -314,5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$n_{1x}^2 + n_{1y}^2 = 1$$

$$\begin{cases} 887,5 \times n_{1x} - 314,5 \times n_{1y} = 0 \\ n_{1x}^2 + n_{1y}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_{1x} = 0,334 \\ n_{1y} = 0,943 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n_{1x} = -0,334 \\ n_{1y} = -0,943 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \arctg\left(\frac{0,943}{0,334}\right) = 70,5^\circ$$

