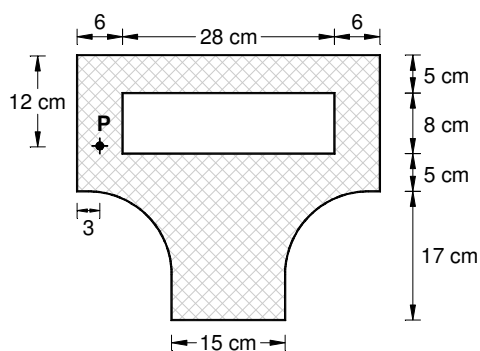
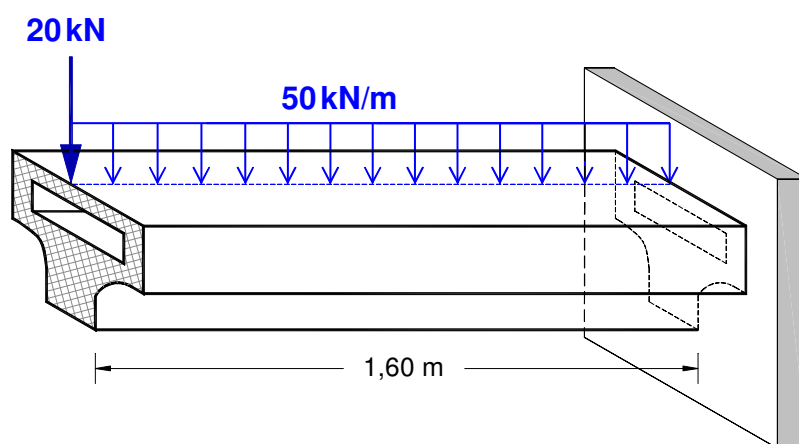


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

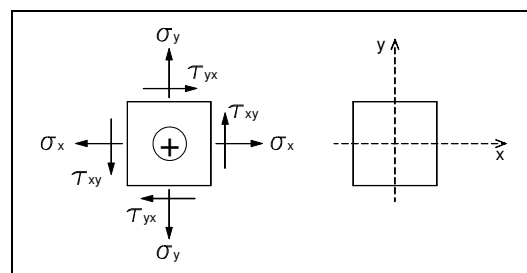
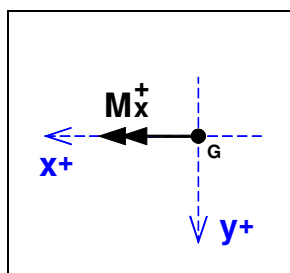
EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL - SETEMBRO / 2016

FLEXÃO PLANA - ESTADO PLANO DE TENSÃO



SECÇÃO TRANSVERSAL FINAL

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO
CONSIDERANDO AS
CONVENÇÕES:



OUTROS EXERCÍCIOS RESOLVIDOS PODERÃO SER CONSULTADOS NA PÁGINA DA AUTORA:

paginas.isep.ipp.pt/iat/

ISABEL ALVIM TELES

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL - SET/2016 – FLEXÃO PLANA E ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

ENUNCIADO

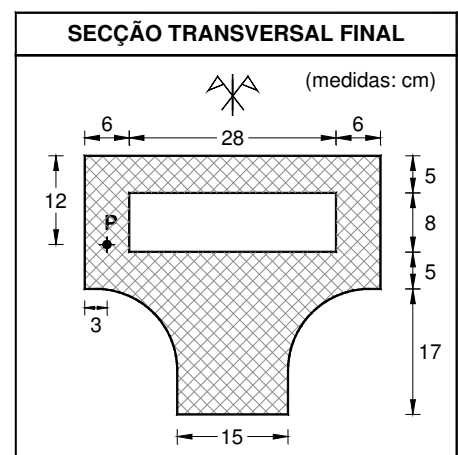
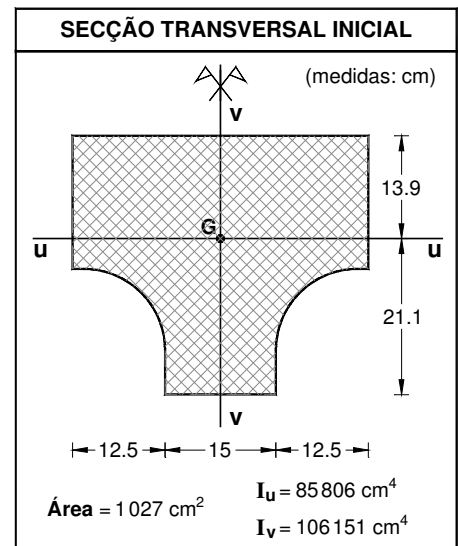
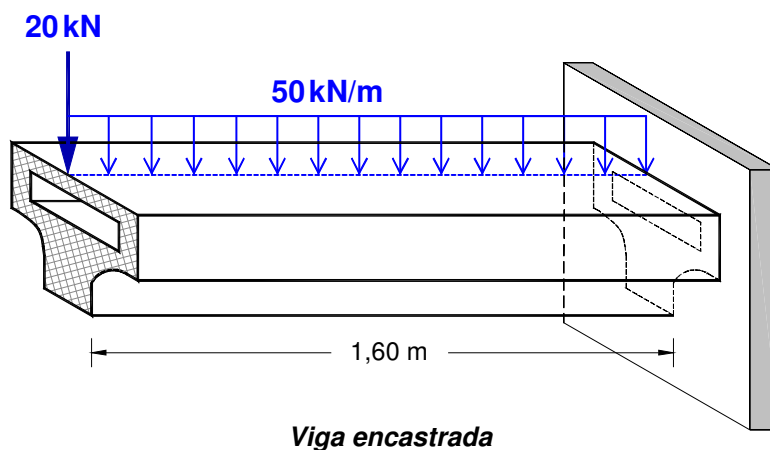
Considere a viga encastrada com 1,60 m de vão, sob a ação do carregamento representado na figura abaixo.

Inicialmente a viga era constituída por uma secção transversal maciça cujas características se apresentam na Tabela ao lado.

Posteriormente foi necessário introduzir uma abertura no banzo superior com dimensão 28cm x 8cm, ficando a **secção transversal final** com a geometria indicada na Tabela correspondente.

Notas:

- O plano de solicitação é baricêntrico.
- A solicitação apresentada já inclui o peso próprio.



Considere a **secção do encastramento** e o ponto **P** representado na Tabela acima.

- Defina o tensor das tensões que caracteriza o estado plano de tensão no ponto **P**;
- Calcule por um processo analítico a tensão normal (σ) e a tensão tangencial (τ) que atuam na faceta **AB** e represente-as graficamente num esquema idêntico ao da **Figura 1**.

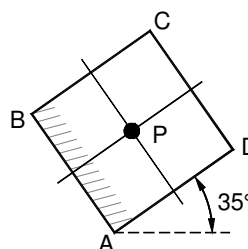


Figura 1

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL - SET/2016 – FLEXÃO PLANA E ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

RESOLUÇÃO

Alínea a)

Área da secção transversal final

$$A = 1027 - 28 \times 8 = 803 \text{ cm}^2$$

Posição do centro de gravidade

O eixo y é eixo de simetria, logo o centro de gravidade da secção transversal posiciona-se sobre o eixo y $\Rightarrow x_G = 0$

O eixo x e o eixo y são eixos principais centrais de inércia, pois o eixo y é de simetria.

$$y_G = \frac{1027 \times 21,1 - 224 \times (17 + 5 + 40 - 4)}{803} = 19,73 \text{ cm}$$

Momento de inércia I_x

$$I_x = 85806 + 1027 \times (21,1 - 19,73)^2 - \left[\frac{28 \times 8^3}{12} + 224 \times (26 - 19,73)^2 \right] = 77732,8 \text{ cm}^4 = 77732,8 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

Esforços na secção do encastramento:

$$\begin{cases} M_x = -20 \times 1,6 - 50 \times \frac{1,6^2}{2} = -96 \text{ kNm} \\ V = -20 - 50 \times 1,6 = -100 \text{ kN} \end{cases}$$

Tensão normal no ponto P

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_x} Y \quad \text{com } Y = -(15,27 - 12) = -3,27 \text{ cm} = -0,0327 \text{ m}$$

$$\sigma_x = \frac{-96}{77732,8 \times 10^{-8}} \times (-0,0327) = 4038,4 \text{ kPa (tração)}$$

Tensão tangencial no ponto P: $\tau = \frac{V S}{I b}$

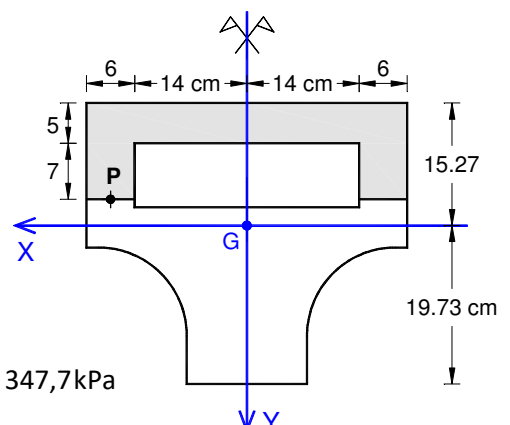
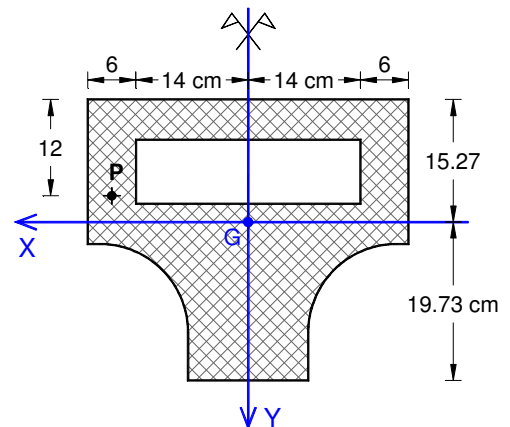
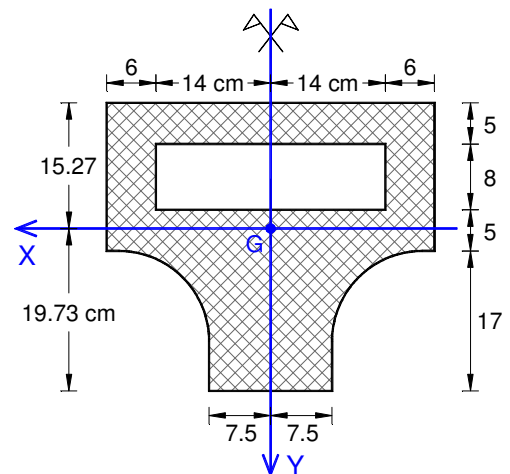
$$V = -100 \text{ kN}$$

$$I = 77732,8 \text{ cm}^4 = 77732,8 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$b = 2 \times 0,06 = 0,12 \text{ m}$$

$$S = 40 \times 5 \times (15,27 - 2,5) + 2 \times [6 \times 7 \times (15,27 - 5 - 3,5)] = 3122,7 \text{ cm}^3 = 3122,7 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

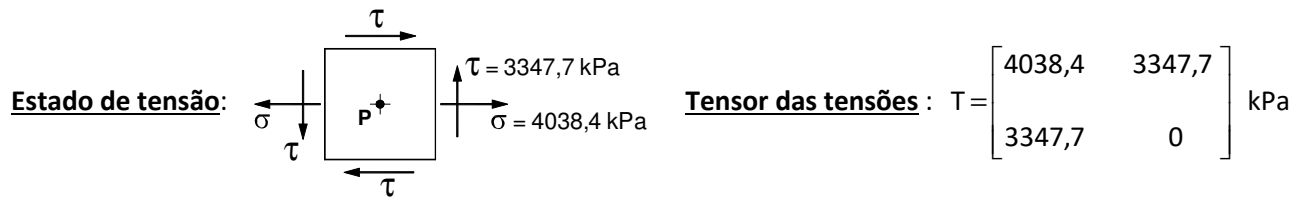
$$\tau = \frac{V S}{I b} = \frac{-100 \times 3122,7 \times 10^{-6}}{77732,8 \times 10^{-8} \times 0,12} = -3347,7 \text{ kPa} \Rightarrow \tau_{xy} = -\tau = 3347,7 \text{ kPa}$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL - SET/2016 – FLEXÃO PLANA E ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

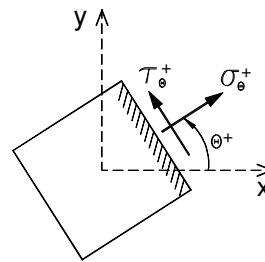


Alínea b) - Fórmulas

Tensão normal e tensão tangencial numa faceta

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

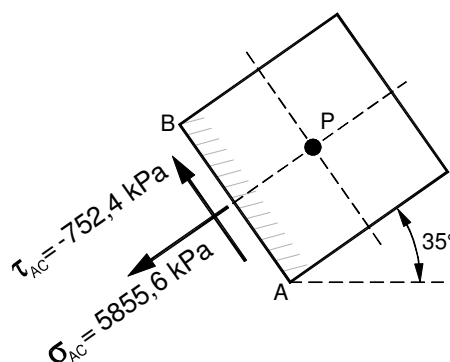
$$\tau_{\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$



Ponto **P** $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \sigma_x = 4038,4 \text{ kPa} \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = 3347,7 \text{ kPa} \end{cases}$$

Para $\theta = -145^\circ$

$$\begin{cases} \sigma_{\theta=-145^\circ} = \frac{4038,4}{2} + \frac{4038,4}{2} \cos(-290^\circ) + 3347,7 \sin(-290^\circ) = 5855,6 \text{ kPa} \\ \tau_{\theta=-145^\circ} = -\frac{4038,4}{2} \sin(-290^\circ) + 3347,7 \cos(-290^\circ) = -752,4 \text{ kPa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{AC} = 5855,6 \text{ kPa} \\ \tau_{AC} = -752,4 \text{ kPa} \end{cases}$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

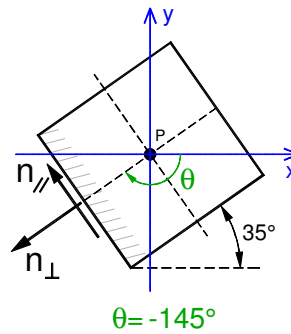
EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL - SET/2016 – FLEXÃO PLANA E ESTADO PLANO DE TENSÃO

ISABEL ALVIM TELES

Alínea b) - Cálculo Matricial

$$\bar{n}_\perp = (\cos -145^\circ; \sin -145^\circ)$$

$$\bar{n}_\parallel = (\sin -145^\circ; -\cos -145^\circ)$$



$$\bar{\sigma} = \bar{T}_R \times \bar{n}_\perp \Rightarrow \bar{\sigma} = \left[[T] \times \bar{n}_\perp \right]^T \times \bar{n}_\perp$$

$$\sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 4038,4 & 3347,7 \\ 3347,7 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos -145^\circ \\ \sin -145^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} \cos -145^\circ \\ \sin -145^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5228,2 & -2742,3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos -145^\circ \\ \sin -145^\circ \end{bmatrix} = 5855,6 \text{ kPa}$$

Como o sinal é positivo, o sentido da tensão σ vai ser o mesmo que o do vector $\bar{n}_\perp$.

$$\bar{\tau} = \bar{T}_R \times \bar{n}_\parallel \Rightarrow \bar{\tau} = \left[[T] \times \bar{n}_\parallel \right]^T \times \bar{n}_\parallel$$

$$\tau = \left\{ \begin{bmatrix} 4038,4 & 3347,7 \\ 3347,7 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos -145^\circ \\ \sin -145^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \times \begin{bmatrix} \sin -145^\circ \\ -\cos -145^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5228,2 & -2742,3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sin -145^\circ \\ -\cos -145^\circ \end{bmatrix} = 752,4 \text{ kPa}$$

Como o sinal é positivo, o sentido da tensão τ vai ser igual ao do vector $\bar{n}_\parallel$, que pela convenção corresponderá a uma tensão tangencial negativa.

Tensões positivas:
(convenção)

