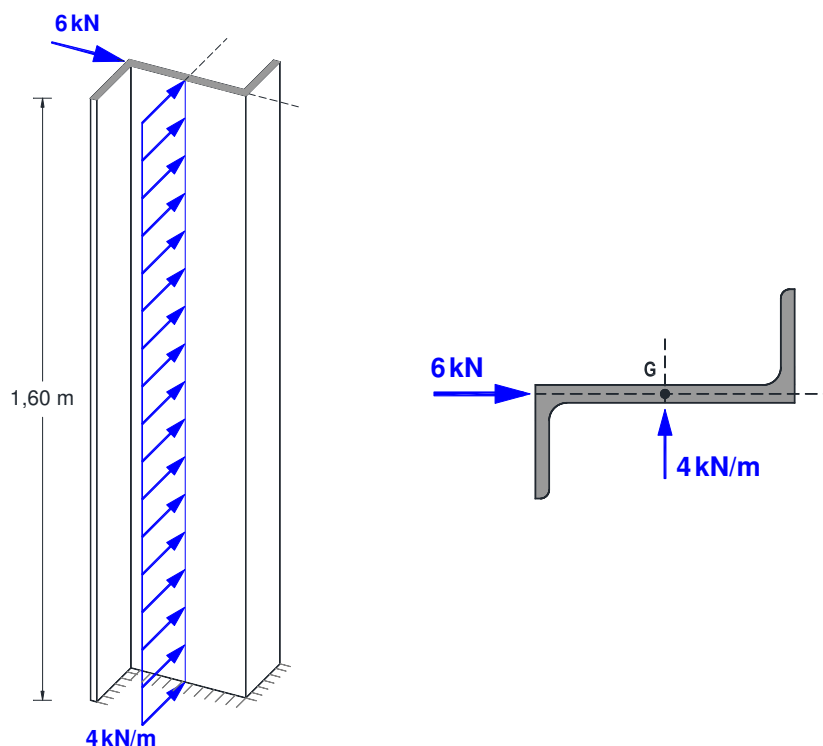


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

FLEXÃO DESVIADA

EXAME SETEMBRO/2015



RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO CONSIDERANDO A SEGUINTE CONVENÇÃO:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

ISABEL ALVIM TELES

ENUNCIADO

Considere o pilar metálico com 1,60 m de altura representado na *Figura 1*, encastrado na base e com secção transversal **Z** cujas características se indicam na *Tabela* abaixo.

O carregamento do pilar é constituído por uma carga uniformemente distribuída de **4 kN/m** (valor característico) e uma força concentrada no seu topo de **6 kN** (valor característico), sendo o plano de solicitação baricêntrico (ver *Figuras 1 e 2*).

- Para a secção do pilar com maiores esforços de flexão, determine os momentos atuantes M_x e M_y referentes aos eixos principais centrais de inércia e represente-os graficamente.
- Calcule as máximas tensões normais de tração e de compressão a atuar na secção transversal da alínea anterior.
- Considerando um fator de segurança de **1.5**, verifique se o **perfil Z** poderá ser realizado em aço **S275**.

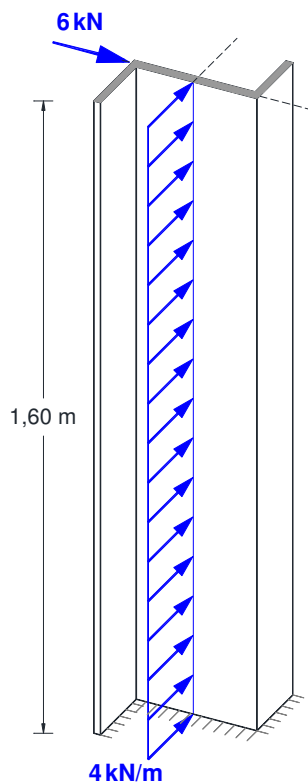


Figura 1

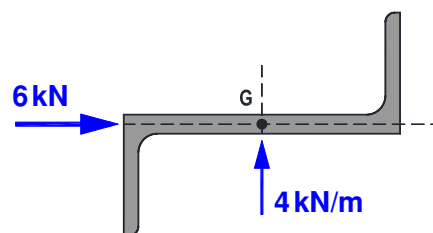
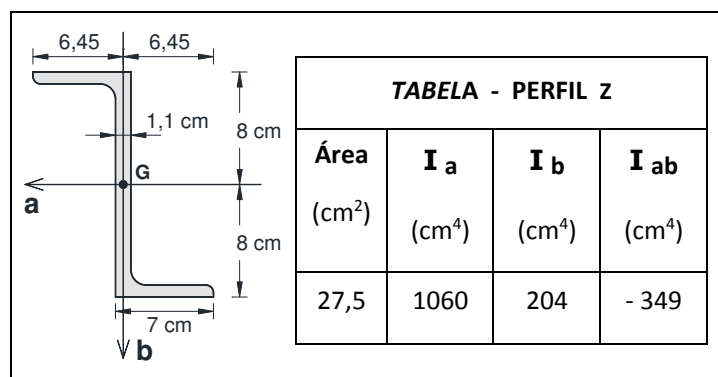


Figura 2

RESOLUÇÃO

Alínea a)

- Posição do centro de gravidade (ver figura)

- Momentos de inércia

$$I_{x_G} = I_b \text{ (tabela)} = 204 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_G} = I_a \text{ (tabela)} = 1060 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_G y_G} = -I_{ab} \text{ (tabela)} = 349 \text{ cm}^4$$

- Eixos e Momentos Principais Centrais de Inércia

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2}$$

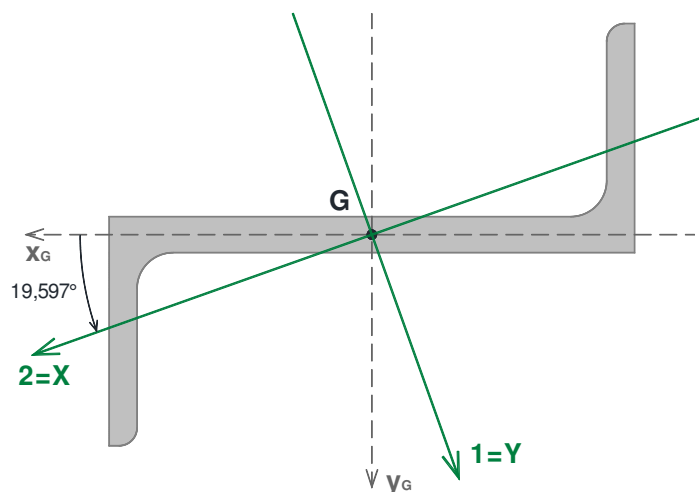
$$I_1 = \frac{204 + 1060}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(204 - 1060)^2 + 4 \times 349^2} = 1184,254 \text{ cm}^4 = 1184,254 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2}$$

$$I_2 = \frac{204 + 1060}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(204 - 1060)^2 + 4 \times 349^2} = 79,746 \text{ cm}^4 = 79,746 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y} \right) \Rightarrow \alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 \times 349}{204 - 1060} \right) = 19,597^\circ$$

$$I_{y_G} = 1060 \text{ cm}^4 > I_{x_G} = 204 \text{ cm}^4 \Rightarrow I_1 \text{ mais próximo de } I_{y_G} \Rightarrow \begin{cases} I_x = I_2 = 79,746 \times 10^{-8} \text{ m}^4 \\ I_y = I_1 = 1184,254 \times 10^{-8} \text{ m}^4 \end{cases}$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS
FLEXÃO DESVIADA

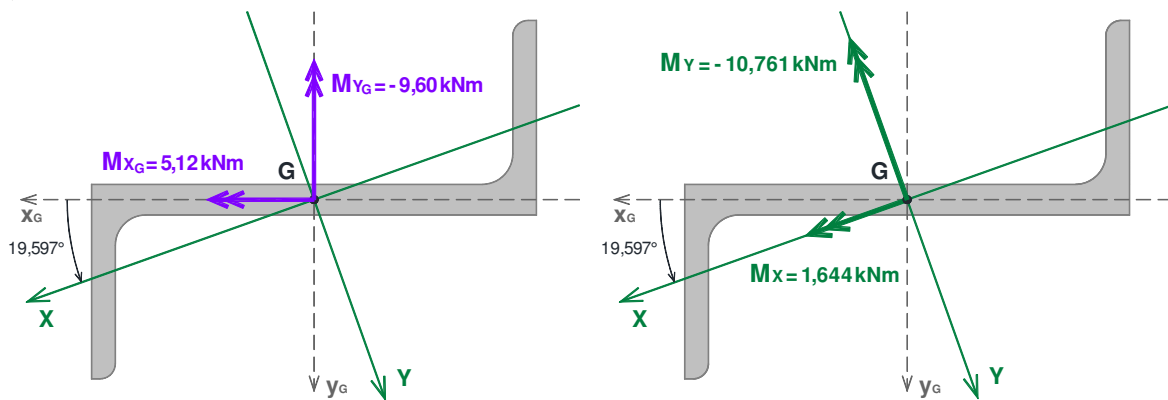
ISABEL ALVIM TELES

• **Momentos atuantes na secção mais esforçada**

A secção com os maiores esforços será aquela onde atuam os momentos máximos, ou seja, a secção junto ao encastramento.

Secção do encastramento:
$$\begin{cases} M_{x_G} = 4 \times \frac{1,60^2}{2} = 5,12 \text{ kNm} \\ M_{y_G} = -6 \times 1,60 = -9,60 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_X = 5,12 \times \cos 19,597^\circ - 9,60 \times \sin 19,597^\circ = 1,604 \text{ kNm} \\ M_Y = -5,12 \times \sin 19,597^\circ - 9,60 \times \cos 19,597^\circ = -10,761 \text{ kNm} \end{cases}$$



Alínea b)

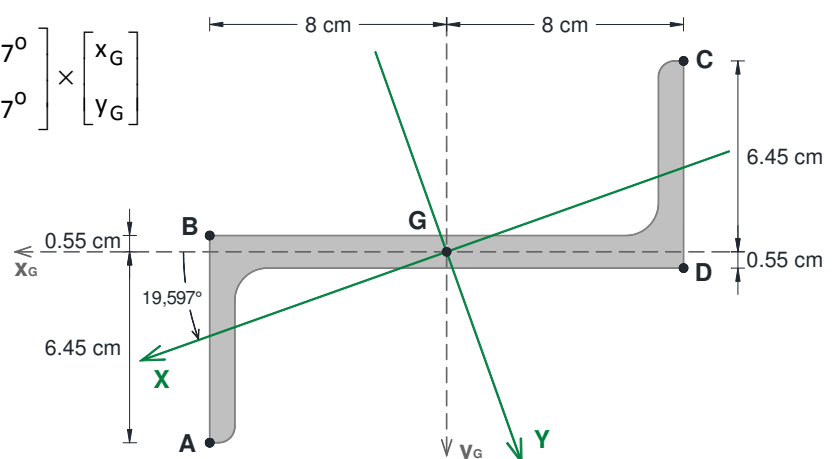
• **Expressão das tensões**

$$\sigma = \frac{M_X}{I_X} Y - \frac{M_Y}{I_Y} X \Rightarrow \sigma = \frac{1,604}{79,746 \times 10^{-8}} Y - \frac{-10,761}{1184,254 \times 10^{-8}} X$$

Analisando os sentidos dos momentos e a anti-simetria da secção transversal conclui-se que a tensão máxima de tração tem o mesmo valor que a tensão máxima de compressão e ocorrem respetivamente nos pontos **A** e **C** (ver figura abaixo). Para confirmar, vamos calcular as tensões a atuar nos pontos **A**, **B**, **C** e **D**.

• **Coordenadas dos pontos A, B, C e D no sistema de eixos (X; Y)**

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 19,597^\circ & \sin 19,597^\circ \\ -\sin 19,597^\circ & \cos 19,597^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix}$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

FLEXÃO DESVIADA

ISABEL ALVIM TELES

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 19,597^\circ & \sin 19,597^\circ \\ -\sin 19,597^\circ & \cos 19,597^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 6,45 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 9,700 \text{ cm} = 0,09700 \text{ m} \\ Y_A = 3,393 \text{ cm} = 0,03393 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 19,597^\circ & \sin 19,597^\circ \\ -\sin 19,597^\circ & \cos 19,597^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ -0,55 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_B = 7,352 \text{ cm} = 0,07352 \text{ m} \\ Y_B = -3,201 \text{ cm} = -0,03201 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 19,597^\circ & \sin 19,597^\circ \\ -\sin 19,597^\circ & \cos 19,597^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -8 \\ -6,45 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_C = -9,700 \text{ cm} = -0,09700 \text{ m} \\ Y_C = -3,393 \text{ cm} = -0,03393 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 19,597^\circ & \sin 19,597^\circ \\ -\sin 19,597^\circ & \cos 19,597^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -8 \\ 0,55 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_D = -7,352 \text{ cm} = -0,07352 \text{ m} \\ Y_D = 3,201 \text{ cm} = 0,03201 \text{ m} \end{cases}$$

• **Tensão no ponto A**

$$\sigma_A = \frac{1,604}{79,746 \times 10^{-8}} \times 0,03393 - \frac{-10,761}{1184,254 \times 10^{-8}} \times 0,097 = 156\,633 \text{ kPa}$$

• **Tensão no ponto B**

$$\sigma_B = \frac{1,604}{79,746 \times 10^{-8}} \times (-0,03201) - \frac{-10,761}{1184,254 \times 10^{-8}} \times 0,07352 = 2\,607 \text{ kPa}$$

• **Tensão no ponto C**

$$\sigma_C = \frac{1,604}{79,746 \times 10^{-8}} \times (-0,03393) - \frac{-10,761}{1184,254 \times 10^{-8}} \times (-0,097) = -156\,633 \text{ kPa}$$

• **Tensão no ponto D**

$$\sigma_D = \frac{1,604}{79,746 \times 10^{-8}} \times 0,03201 - \frac{-10,761}{1184,254 \times 10^{-8}} \times (-0,07352) = -2\,607 \text{ kPa}$$

Conclusão:

Tensão de tração máxima: $\sigma_A = 156\,633 \text{ kPa}$ (valor característico)

Tensão de compressão máxima: $\sigma_C = 156\,633 \text{ kPa}$ (valor característico)

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS
FLEXÃO DESVIADA

ISABEL ALVIM TELES

Alínea c)

Máxima tensão a atuar na secção transversal: $\sigma_k = 156\,633 \text{ kPa}$ (valor característico)

Máxima tensão de cálculo a atuar na secção transversal: $\sigma_{Ed} = 1,5 \times \sigma_k = 1,5 \times 156\,633 \text{ kPa} = 234\,950 \text{ kPa}$

Tensão resistente do aço **S275**: $\sigma_{Rd}^{comp} = \sigma_{Rd}^{trac} = 275 \text{ MPa}$

Máxima tensão de cálculo atuante : $\sigma_{Ed,tração} = \sigma_{Ed,compressão} = 235 \text{ MPa}$

$$\sigma_{Ed} = 235 \text{ MPa} < \sigma_{Rd} = 275 \text{ MPa}$$

Conclusão: Poderá ser utilizado o aço **S275**.