

LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TORÇÃO

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS

ISABEL ALVIM TELES

TORÇÃO - FORMULÁRIO

SECÇÕES CIRCULARES

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T \cdot R}{I_p} \quad \text{tensão tangencial máxima}$$

$$\theta = \frac{T}{G \cdot I_p} \quad (\text{rad/m}) \quad \text{rotação relativa por unidade de comprimento}$$

$$\phi = \theta L \quad (\text{rad}) \quad \text{rotação}$$

T – Momento torsor

R – Raio da secção circular

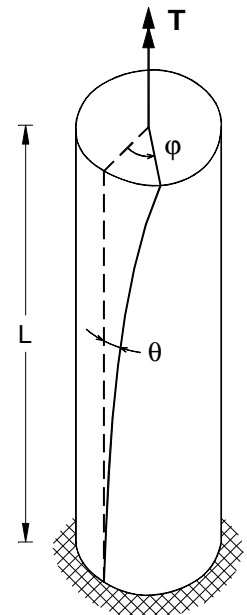
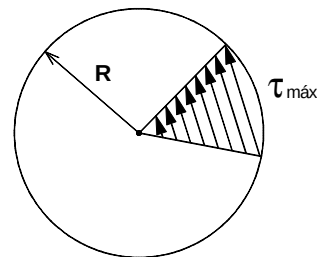
G – Módulo de Elasticidade Transversal

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \nu - \text{coeficiente de Poisson}$$

I_p – Momento de Inércia Polar $I_p = I_x + I_y$

$$\text{Secções circulares} \Rightarrow I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

SECÇÃO TRANSVERSAL



SECÇÕES RECTANGULARES

$$\tau_{\text{máx}} = \alpha \frac{T}{h b^2} \quad \text{tensão tangencial máxima}$$

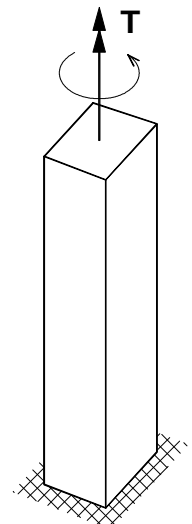
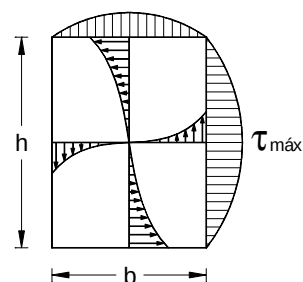
$$\theta = \beta \frac{T}{G h b^3} \quad (\text{rad/m}) \quad \text{rotação relativa por unidade de comprimento}$$

$$\phi = \theta L \quad (\text{rad}) \quad \text{rotação}$$

b – lado menor da secção transversal rectangular

h – lado maior da secção transversal rectangular

SECÇÃO TRANSVERSAL



h/b	1	1,10	1,20	1,25	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	2	2,25	2,50	3	4	5	6	8	10	20	∞
α	4,80	4,67	4,57	4,52	4,48	4,40	4,33	4,27	4,21	4,16	4,07	3,97	3,88	3,74	3,55	3,43	3,35	3,26	3,20	3,10	3,00
β	7,11	6,49	6,02	5,82	5,65	5,35	5,11	4,91	4,74	4,60	4,37	4,16	4,01	3,80	3,56	3,43	3,35	3,26	3,20	3,10	3,00

SECÇÕES TUBULARES DE PAREDE DELGADA

$$\tau = \frac{T}{2 S e} \quad \text{tensão tangencial}$$

$$\theta = \frac{T \cdot P}{4 G e S^2} \quad (rad/m) \quad \text{rotação relativa por unidade de comprimento}$$

$$\varphi = \theta L \quad (rad) \quad \text{rotação}$$

T – Momento torsor

P – Perímetro da linha média das paredes

S – Área delimitada pela linha média das paredes

G – Módulo de Elasticidade Transversal

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \nu - \text{coeficiente de Poisson}$$

e – Espessura das paredes

SECÇÃO TRANSVERSAL

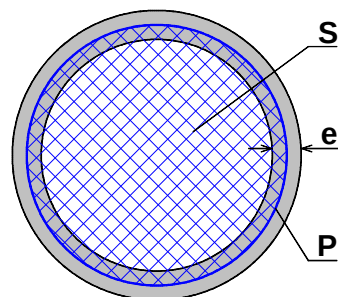
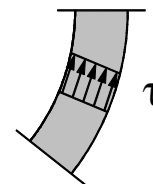


DIAGRAMA DE TENSÕES



ENUNCIADOS**EXERCÍCIO 1**

Considere uma barra encastrada com 3 m de comprimento e de secção circular com 6 cm de diâmetro.

Na extremidade livre da barra está a actuar um momento torsor de 2 kNm.

O módulo de elasticidade transversal do material constituinte da barra é $G = 80 \text{ GPa}$.

- a) Determine a máxima tensão tangencial a actuar na barra;
- b) Determine a rotação da extremidade livre da barra.

EXERCÍCIO 2

Considere uma barra de secção circular com 2 cm de diâmetro onde está instalada uma tensão máxima devida à torção de $\tau_{\text{máx}} = 90 \text{ MPa}$. A barra é constituída por um material que apresenta um módulo de elasticidade transversal $G = 70 \text{ GPa}$.

Determine que comprimento deve ter a barra para que apresente um ângulo de torção de 45° entre secções extremas.

EXERCÍCIO 3

Considere uma barra encastrada com 2,80 m de comprimento e de secção transversal rectangular $4 \times 10 \text{ cm}^2$.

O módulo de elasticidade transversal do material constituinte da barra é $G = 50 \text{ GPa}$.

- a) Determine qual o momento torsor a aplicar na extremidade livre da barra para que esta fique submetida a uma tensão tangencial máxima de 100 MPa;
- b) Determine a rotação da extremidade livre da barra na situação da alínea anterior.

EXERCÍCIO 4

Considere uma barra constituída por um perfil metálico tubular com 168,3 mm de diâmetro e 8 mm de espessura.

Características do aço constituinte do perfil tubular: $E = 206 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$.

- a) Determine qual a tensão tangencial instalada na secção transversal quando o diagrama de momentos torsores é constante ao longo de toda a barra e igual a 10 kNm;
- b) Determine qual o momento torsor a aplicar na barra para que duas secções que distam entre si 5 m tenham uma rotação relativa de 10° .

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TORÇÃO

ISABEL ALVIM TELES

RESOLUÇÃO

EXERCÍCIO 1

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T \cdot R}{I_p} \quad \theta = \frac{T}{G \cdot I_p} \quad \varphi = \theta L$$

Alínea a)

$$R = 0,03 \text{ m} \Rightarrow I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi \times 0,03^4}{2}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T \cdot R}{I_p} = \frac{2 \times 0,03}{\frac{\pi \times 0,03^4}{2}} = \frac{4}{\pi \times 0,03^3} = 47157,0 \text{ kPa} = 47,2 \text{ MPa}$$

Alínea b)

$$\varphi = \theta L = \theta \times 3 = \frac{T}{G \cdot I_p} \times 3 = \frac{2}{80 \times 10^6 \times \frac{\pi \times 0,03^4}{2}} \times 3 = 5,89 \times 10^{-2} \text{ rad} \cong 3,4^\circ$$

EXERCÍCIO 2

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T \cdot R}{I_p} \quad \theta = \frac{T}{G \cdot I_p} \quad \varphi = \theta L$$

$$R = 0,01 \text{ m}$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = \varphi$$

$$\theta = \frac{T}{G \cdot I_p} \Rightarrow T = \theta \cdot G \cdot I_p$$

$$\varphi = \theta L \Rightarrow \theta = \frac{\varphi}{L}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T \cdot R}{I_p} = \frac{\theta \cdot G \cdot I_p \cdot R}{I_p} = \theta \cdot G \cdot R = \frac{\varphi}{L} \cdot G \cdot R$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\varphi}{L} \cdot G \cdot R \Rightarrow 90 \times 10^3 = \frac{\pi}{4} \times 70 \times 10^6 \times 0,01 \Rightarrow L = 6,11 \text{ m}$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

TORÇÃO

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO 3

$$\tau_{\max} = \alpha \frac{T}{h b^2} \quad \theta = \beta \frac{T}{G h b^3} \quad \varphi = \theta L$$

h/b	1	1,10	1,20	1,25	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	2	2,25	2,50	3	4	5	6	8	10	20	∞
α	4,80	4,67	4,57	4,52	4,48	4,40	4,33	4,27	4,21	4,16	4,07	3,97	3,88	3,74	3,55	3,43	3,35	3,26	3,20	3,10	3,00
β	7,11	6,49	6,02	5,82	5,65	5,35	5,11	4,91	4,74	4,60	4,37	4,16	4,01	3,80	3,56	3,43	3,35	3,26	3,20	3,10	3,00

Alínea a)

$$\begin{cases} b=0,04 \text{ m} \\ h=0,10 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{0,10}{0,04} = 2,5 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3,88 \\ \beta = 4,01 \end{cases}$$

$$\tau_{\max} = \alpha \frac{T}{h b^2} \Rightarrow 100 \times 10^3 = 3,88 \frac{T}{0,10 \times 0,04^2} \Rightarrow T = 4,12 \text{ kNm}$$

Alínea b)

$$\varphi = \theta L \Rightarrow \varphi = \beta \frac{T}{G h b^3} L = 4,01 \frac{4,12}{50 \times 10^6 \times 0,10 \times 0,04^3} 2,80 = 0,1446 \text{ rad} \cong 8,28^\circ$$

EXERCÍCIO 4

$$\tau = \frac{T}{2 S e} \quad \theta = \frac{T \cdot P}{4 G e S^2} \quad \varphi = \theta L$$

Alínea a)

$$\phi_{\text{méd}} = 168,3 - 8 = 160,3 \text{ mm} = 0,1603 \text{ m}$$

$$S = \frac{\pi \phi_{\text{méd}}^2}{4} = \frac{\pi \times 0,1603^2}{4} = 2,018 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$\tau = \frac{T}{2 S e} = \frac{10}{2 \times 2,018 \times 10^{-2} \times 0,008} = 30971 \text{ kPa} = 31,0 \text{ MPa}$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS
TORÇÃO

ISABEL ALVIM TELES

Alínea b)

$$10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{ rad} = \varphi$$

$$P = \pi \phi_{\text{méd}} = 0,1603 \pi$$

$$\theta = \frac{\varphi}{L} \Rightarrow \theta = \frac{\frac{\pi}{18}}{5} = \frac{\pi}{90}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{206 \times 10^6}{2(1+0,3)} = 79,23 \times 10^6 \text{ kPa}$$

$$\theta = \frac{T \cdot P}{4 G e S^2} \Rightarrow T = \frac{\theta 4 G e S^2}{P} = \frac{\frac{\pi}{90} \times 4 \times 79,23 \times 10^6 \times 0,008 \times (2,018 \times 10^{-2})^2}{0,1603 \pi} = 71,6 \text{ kNm}$$