

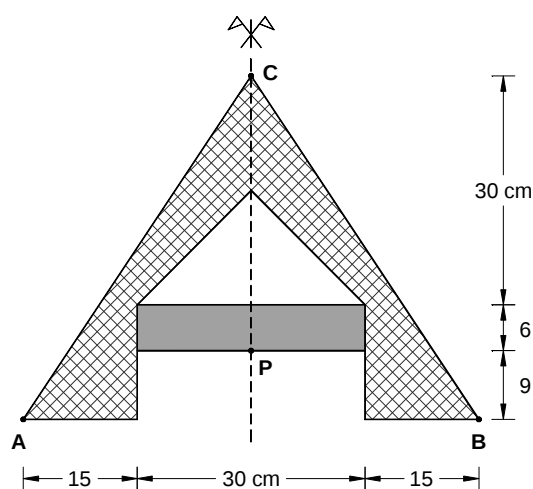
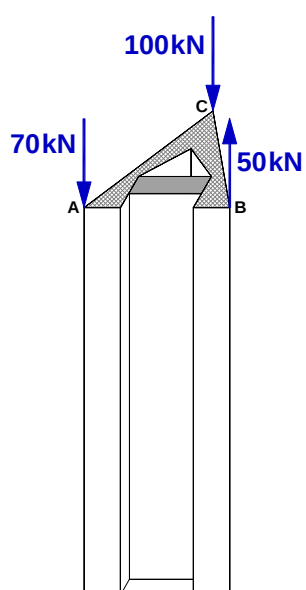
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

# RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

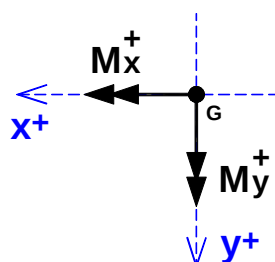
(2014/2015)

NÚCLEO CENTRAL

EXAME 19/JANEIRO/2015



RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO CONSIDERANDO A SEGUINTE CONVENÇÃO:



ISABEL ALVIM TELES

### ENUNCIADO

**1 -** Pretende-se estudar uma secção transversal para construir um pilar.

**1.1 -** Determine o núcleo central da secção transversal representada na *Figura 1*, constituída por um elemento pré-fabricado e uma secção rectangular 30x6 (cm<sup>2</sup>).

As características do elemento pré-fabricado estão indicadas na *Figura 2*.

Represente o núcleo central na *Figura 1* deste enunciado, identificando as coordenadas dos vértices.

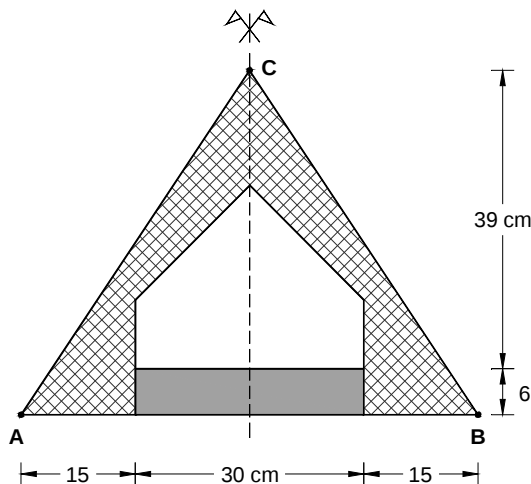


Figura 1

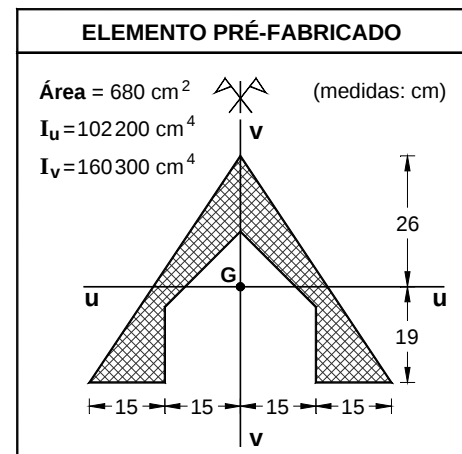


Figura 2

**1.2 -** Por razões estéticas, a secção transversal do pilar foi alterada, passando a ser a representada na *Figura 3*, onde se encontra desenhado o núcleo central da presente secção.

As coordenadas no sistema de eixos (a,b) do centro de gravidade **G** da secção transversal e os vértices do núcleo central estão identificadas na *Figura 3*.

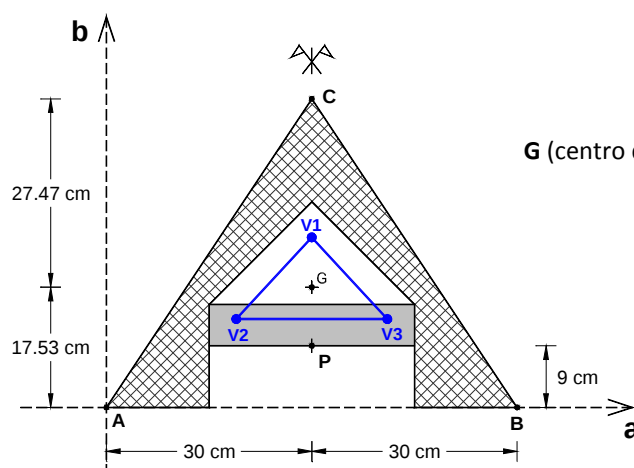


Figura 3

Vértice **V1**  $\Rightarrow$  (a,b) = (30,000; 24,807) cm

Vértice **V2**  $\Rightarrow$  (a,b) = (18,965; 12,886) cm

Vértice **V3**  $\Rightarrow$  (a,b) = (41,035; 12,886) cm

**G** (centro de gravidade)  $\Rightarrow$  (a,b) = (30,000; 17,530) cm

No pilar estão a actuar as seguintes forças (ver *Figura 4*):

Ponto **A**: 70 kN (compressão)

Ponto **B**: 50 kN (tracção)

Ponto **C**: 100 kN (compressão)

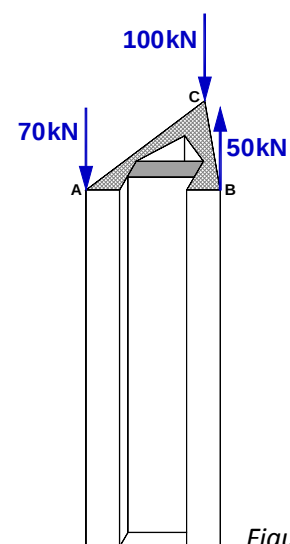


Figura 4

- Substitua o sistema de forças a actuar no topo do pilar por uma resultante, caracterizando a sua grandeza, direcção, sentido e ponto de aplicação (centro de pressão) no sistema de eixos baricêntrico.
- Determine analiticamente a menor força de compressão a aplicar no ponto **P** para que, conjuntamente com as restantes forças, toda a secção do topo do pilar esteja submetida a compressões.

### RESOLUÇÃO

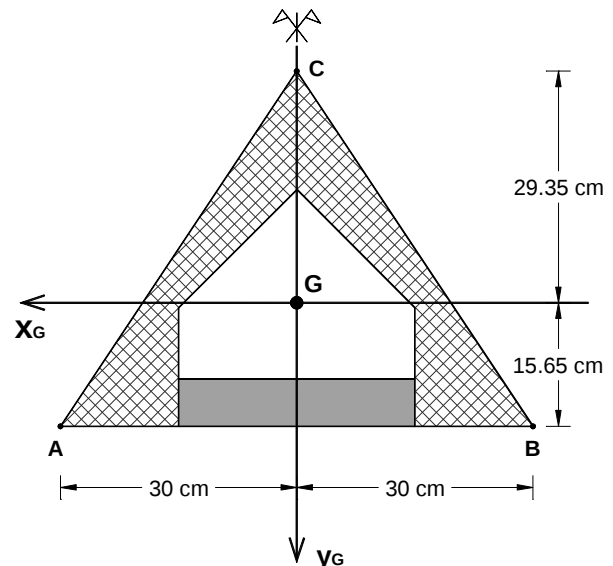
#### Alínea 1.1

##### • POSIÇÃO DO CENTRO DE GRAVIDADE

$$\text{Área} = 680 + 30 \times 6 = 860 \text{ cm}^2$$

$$y_G = \frac{680 \times 19 + 180 \times 3}{860} = 15,65 \text{ cm}$$

$(X_G ; Y_G)$  - eixos principais centrais de inércia



##### • DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS DE INÉRCIA

$$I_{X_G} = 102\,200 + 680 \times (19 - 15,65)^2 + \frac{30 \times 6^3}{12} + 180 \times (15,65 - 3)^2 = 139\,175,35 \text{ cm}^4$$

$$I_{Y_G} = 160\,300 + \frac{6 \times 30^3}{12} = 173\,800 \text{ cm}^4$$

##### • RAIOS DE GIRAÇÃO

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{X_G}}{A}} \Rightarrow i_x^2 = \frac{I_{X_G}}{A} = \frac{139\,175,35}{860} = 161,83 \text{ cm}^2$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_{Y_G}}{A}} \Rightarrow i_y^2 = \frac{I_{Y_G}}{A} = \frac{173\,800}{860} = 202,09 \text{ cm}^2$$

• **DETERMINAÇÃO DOS VÉRTICES DO NÚCLEO CENTRAL**

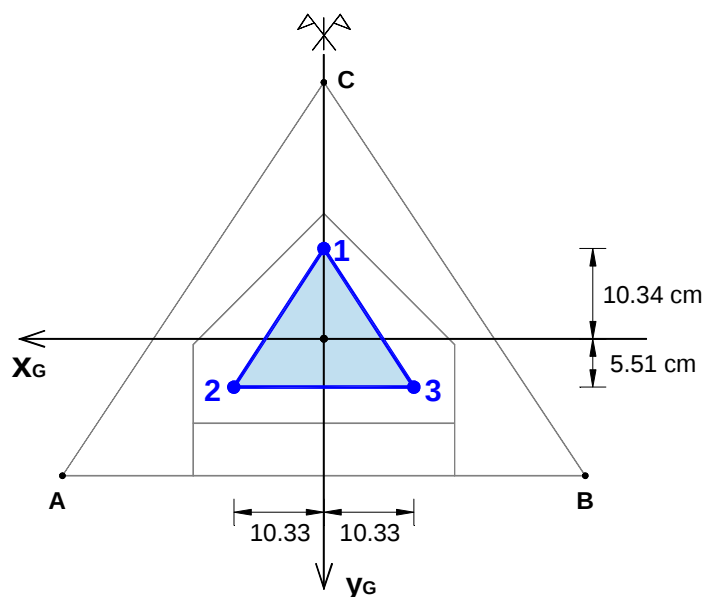
$$\overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{x_{v1}}{i_Y^2} x_A + \frac{y_{v1}}{i_X^2} y_A = 0 \\ 1 + \frac{x_{v1}}{i_Y^2} x_B + \frac{y_{v1}}{i_X^2} y_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{x_{v1}}{202,09} \times 30 + \frac{y_{v1}}{161,83} \times 15,65 = 0 \\ 1 + \frac{x_{v1}}{202,09} \times (-30) + \frac{y_{v1}}{161,83} \times 15,65 = 0 \end{cases} \quad \text{coordenadas em cm}$$

$$\overline{AB} \Rightarrow \text{Vértice 1} \begin{cases} x_{v1} = 0,00 \\ y_{v1} = -10,34 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\overline{BC} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{x_{v2}}{i_Y^2} x_B + \frac{y_{v2}}{i_X^2} y_B = 0 \\ 1 + \frac{x_{v2}}{i_Y^2} x_C + \frac{y_{v2}}{i_X^2} y_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{x_{v2}}{202,09} \times (-30) + \frac{y_{v2}}{161,83} \times 15,65 = 0 \\ 1 + \frac{x_{v2}}{202,09} \times 0,0 + \frac{y_{v2}}{161,83} \times (-29,35) = 0 \end{cases} \quad \text{coordenadas em cm}$$

$$\overline{BC} \Rightarrow \text{Vértice 2} \begin{cases} x_{v2} = 10,33 \text{ cm} \\ y_{v2} = 5,51 \text{ cm} \end{cases}$$

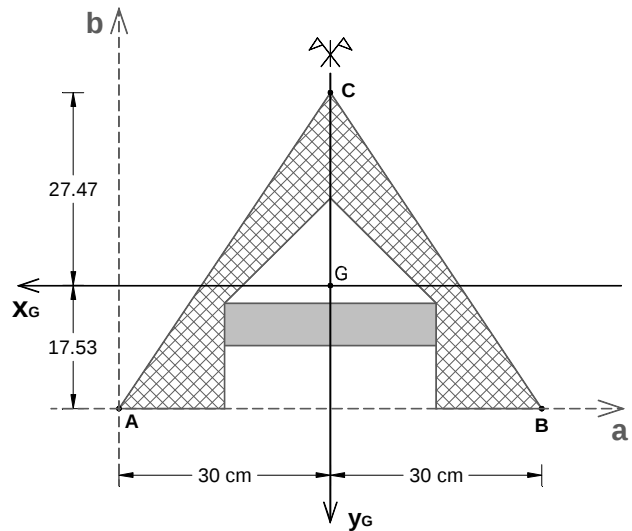
Tendo em conta a simetria da secção  $\Rightarrow$  **Vértice 3**  $\begin{cases} x_{v3} = -10,33 \text{ cm} \\ y_{v3} = 5,51 \text{ cm} \end{cases}$



**Alínea 1.2 a)**

- Coordenadas dos pontos A, B e C em relação ao sistema de eixos baricêntrico ( $X_G$ ;  $Y_G$ ):

| Pontos | Sistema de eixos ( $X_G$ ; $Y_G$ ) |            |
|--------|------------------------------------|------------|
|        | $X_G$ (cm)                         | $Y_G$ (cm) |
| A      | 30,00                              | 17,53      |
| B      | -30,00                             | 17,53      |
| C      | 0,00                               | -27,47     |



- Solicitação do sistema de forças ( $F_A + F_B + F_C$ ) por uma resultante  $R_S$

Sistema de eixos ( $X_G$ ;  $Y_G$ )

$$N = F_A + F_B + F_C = -70 + 50 - 100 = -120 \text{ kN}$$

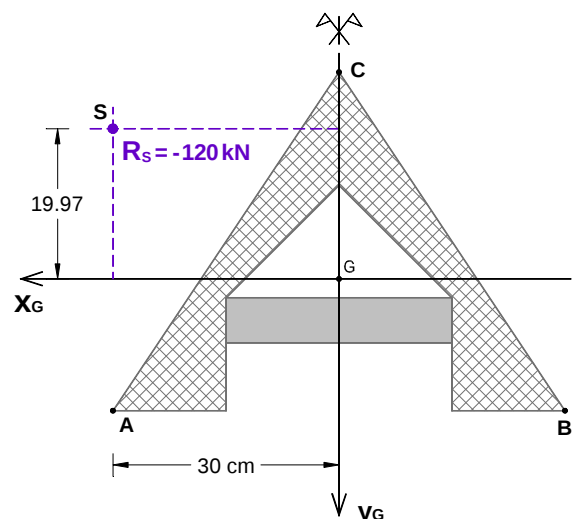
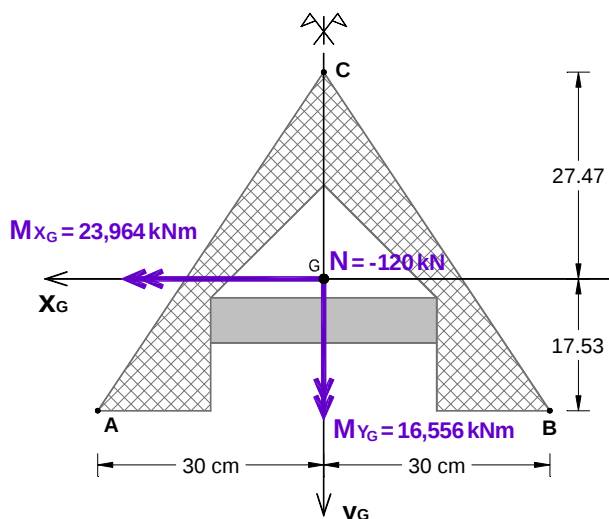
$$M_{X_G} = -70 \times 17,53 \times 10^{-2} + 50 \times 17,53 \times 10^{-2} + 100 \times 27,47 \times 10^{-2} = 23,964 \text{ kNm}$$

$$M_{Y_G} = 70 \times 30,00 \times 10^{-2} + 50 \times 30,00 \times 10^{-2} = 36,000 \text{ kNm}$$

- S - ponto de aplicação da resultante  $R_S$  no sistema de eixos ( $X_G$ ;  $Y_G$ )

Resultante:  $R_S = N = -120 \text{ kN}$

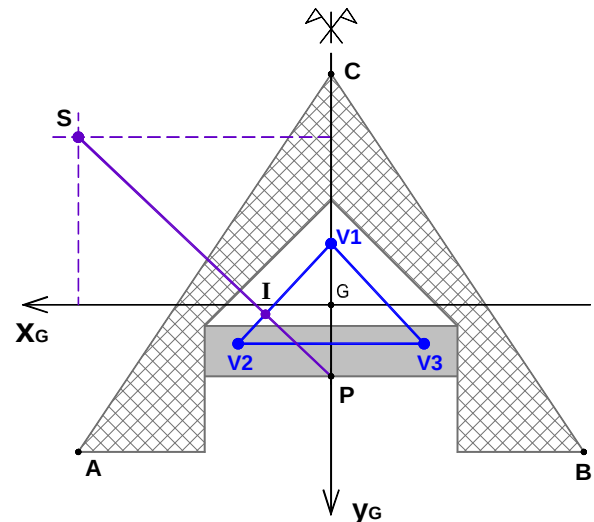
$$\begin{cases} X_S = -\frac{M_{Y_G}}{N} \\ Y_S = \frac{M_{X_G}}{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_S = -\frac{36,00}{-120} = 30,00 \times 10^{-2} \text{ m} = 30,00 \text{ cm} \\ Y_S = \frac{23,964}{-120} = -19,97 \times 10^{-2} \text{ m} = -19,97 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \text{Ponto S } (30,00; -19,97) \text{ cm}$$



**Alínea 1.2 b)**

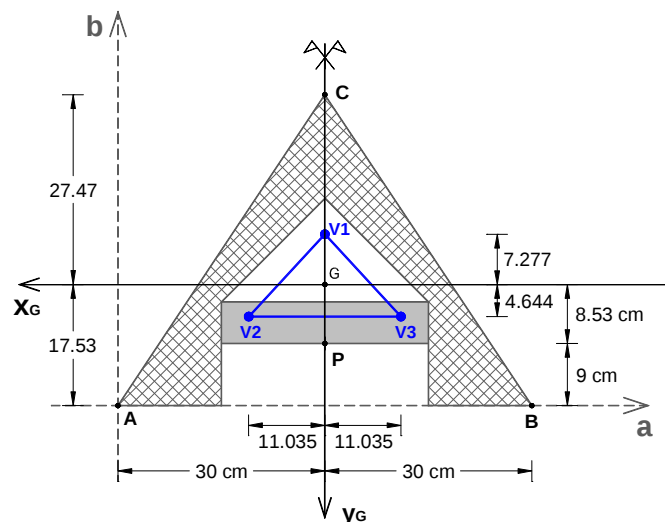
Para que toda a secção esteja submetida a compressões, a resultante deverá ser de compressão e com ponto de aplicação dentro do núcleo central.

Como se pretende a menor força a actuar em P, a resultante do sistema de forças ( $R_S + F_P$ ) deverá ter ponto de aplicação em I.



- Cotas dos pontos em relação ao sistema de eixos baricêntrico ( $X_G$ ;  $Y_G$ )

| Pontos | Sistema de eixos<br>(a; b) |           | Sistema de eixos<br>( $X_G$ ; $Y_G$ ) |               |
|--------|----------------------------|-----------|---------------------------------------|---------------|
|        | a<br>(cm)                  | b<br>(cm) | $X_G$<br>(cm)                         | $Y_G$<br>(cm) |
| V1     | 30,000                     | 24,807    | 0                                     | -7,277        |
| V2     | 18,965                     | 12,886    | 11,035                                | 4,644         |
| V3     | 41,035                     | 12,886    | -11,035                               | 4,644         |
| G      | 30,000                     | 17,530    | 0                                     | 0             |
| P      | 30,000                     | 9,000     | 0                                     | 8,530         |



Para resolução do exercício são necessárias as expressões analíticas das rectas  $\overline{SP}$  e  $\overline{V1V2}$ .

Expressão analítica de uma recta:  $1 + aX + bY = 0$

- Recta  $\overline{SP}$

$$\text{Ponto S} \begin{cases} X_S = 30,00 \text{ cm} \\ Y_S = -19,97 \text{ cm} \end{cases} \quad \text{Ponto P} \begin{cases} X_S = 0 \text{ cm} \\ Y_S = 8,53 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Recta } \overline{SP} \Rightarrow \begin{cases} \text{S} & 1 + a \times 30,00 + b \times (-19,97) = 0 \\ \text{P} & 1 + b \times 8,53 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0,1114 \\ b = -0,1172 \end{cases} \quad \text{coordenadas em cm}$$

$$\text{Recta } \overline{SP} \Rightarrow 1 - 0,1114 X - 0,1172 Y = 0 \quad \text{coordenadas em cm}$$

• Recta  $\overline{V_1 V_2}$

$$\text{Ponto } V_1 \begin{cases} X_{V_1} = 0 \\ Y_{V_1} = -7,277 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Ponto } V_2 \begin{cases} X_{V_2} = 11,035 \text{ cm} \\ Y_{V_2} = 4,644 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Recta } \overline{V_1 V_2} \Rightarrow \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} \begin{cases} 1 + b \times (-7,277) = 0 \\ 1 + a \times 11,035 + b \times 4,644 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0,1374 \\ a = -0,1485 \end{cases} \quad \text{coordenadas em cm}$$

$$\text{Recta } \overline{V_1 V_2} \Rightarrow 1 - 0,1485 X + 0,1374 Y = 0 \quad \text{coordenadas em cm}$$

• Ponto I - intersecção da recta  $\overline{SP}$  com a recta  $\overline{V_1 V_2}$

$$\begin{cases} 1 - 0,1114 X - 0,1172 Y = 0 \\ 1 - 0,1485 X + 0,1374 Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Ponto I} \begin{cases} X_I = 7,783 \text{ cm} \\ Y_I = 1,134 \text{ cm} \end{cases}$$

• Comprimento do segmento  $\overline{SI} = \sqrt{(30 - 7,783)^2 + (-19,97 - 1,134)^2} = 30,64 \text{ cm}$

• Comprimento do segmento  $\overline{IP} = \sqrt{7,783^2 + (1,134 - 8,53)^2} = 10,74 \text{ cm}$

• Determinação de  $F_P$

O sistema de forças ( $R_S + F_P$ ) deverá ser equivalente a uma **Resultante R** com ponto de aplicação em I.

$$\sum M_I^{R_S + F_P} = \sum M_I^R = 0$$

$$R_S \times \overline{SI} = F_P \times \overline{IP} \Rightarrow 120 \times 30,64 = F_P \times 10,74 \Rightarrow F_P = 342,35 \text{ kN } (\downarrow) \text{ (força de compressão)}$$

