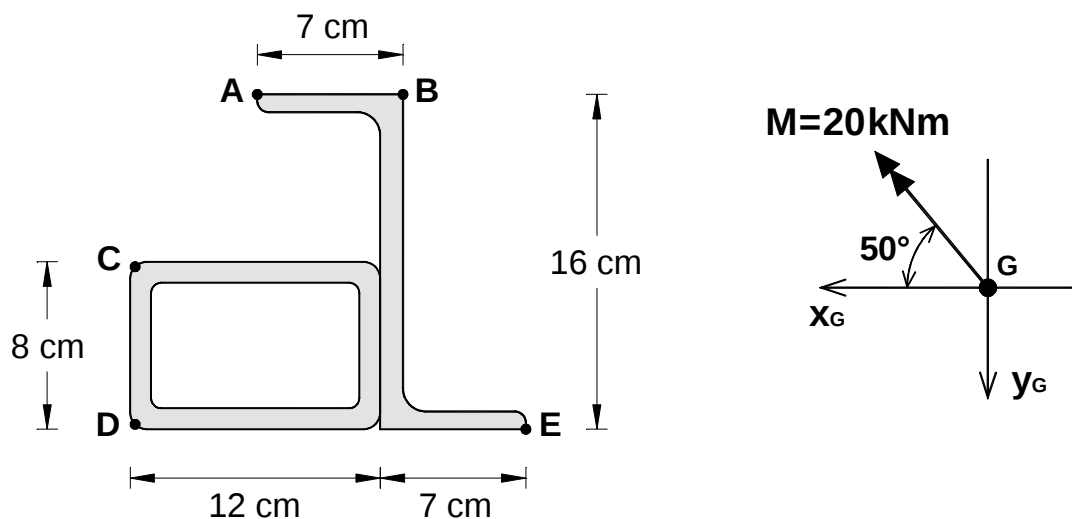


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

(2014/2015)

FLEXÃO DESVIADA, EIXO NEUTRO



RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO CONSIDERANDO A SEGUINTE CONVENÇÃO:

A diagram shows a coordinate system with origin G. The x^+ axis points to the left and the y^+ axis points downwards. Bending moment components M_x^+ and M_y^+ are shown acting counter-clockwise about the x^+ and y^+ axes, respectively.

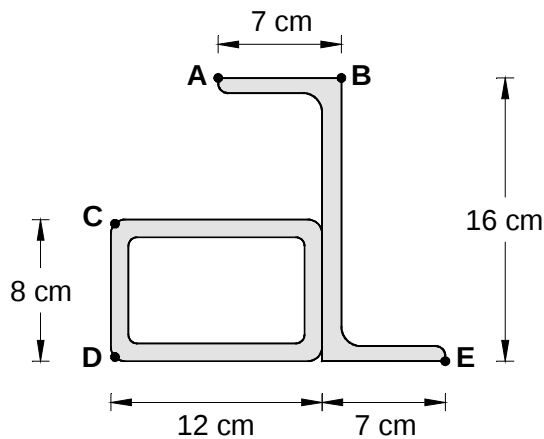
$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

ISABEL ALVIM TELES

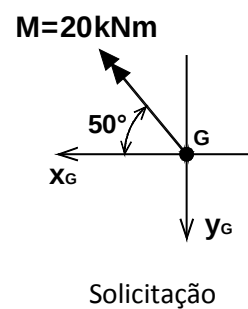
ENUNCIADO

Considere a secção transversal recta (STR) representada na figura, constituída por um perfil **Z** e um perfil tubular 120x80, cujas características se indicam abaixo.

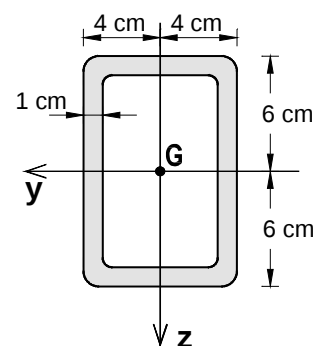
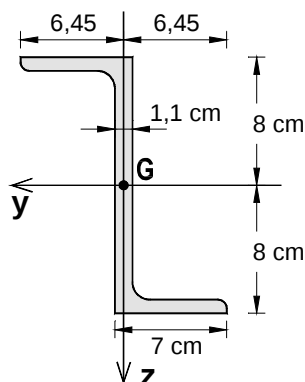
Na secção está a actuar um momento flector de 20 kNm com a direcção e sentido ilustrados na figura.



Secção transversal recta



- Defina a posição do eixo neutro;
- Trace o diagrama de tensões na secção representada, indicando as máximas tensões de compressão e de tracção;
- Determine qual deverá ser a direcção do vector momento a actuar no centro de gravidade para que o eixo neutro seja uma recta horizontal a passar em **G** (centro de gravidade);
- Determine qual deverá ser a orientação do plano de solicitação para que o eixo neutro passe no ponto **E**.



PERFIL Z	Área (cm ²)	I _y (cm ⁴)	I _z (cm ⁴)	I _{yz} (cm ⁴)
	27,5	1060	204	-349

PERFIL TUBULAR 120 x 80	Área (cm ²)	I _y (cm ⁴)	I _z (cm ⁴)
	34,9	609	313

RESOLUÇÃO

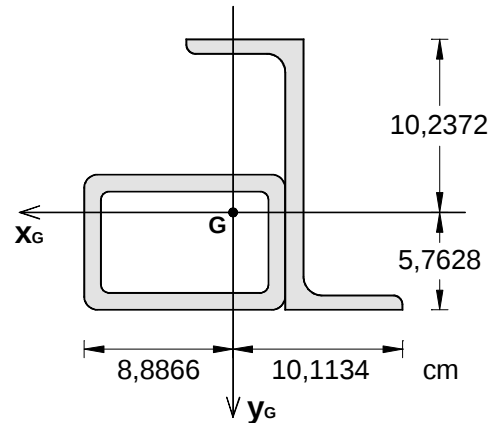
Alínea a)

• POSIÇÃO DO CENTRO DE GRAVIDADE

$$\text{Área} = 34,9 + 27,5 = 62,4 \text{ cm}^2$$

$$x_G = \frac{34,9 \times 6 + 27,5 \times (12 + \frac{1,1}{2})}{62,4} = 8,8866 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{34,9 \times 4 + 27,5 \times 8}{62,4} = 5,7628 \text{ cm}$$



• DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA I_{x_G}

$$I_{x_G}^{tub} = 313 + 34,9 \times (5,7628 - 4)^2 = 421,45 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_G}^{perf.Z} = 1060 + 27,5 \times (8 - 5,7628)^2 = 1197,64 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_G} = I_{x_G}^{tub} + I_{x_G}^{perf.Z} = 1619,09 \text{ cm}^4$$

• DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA I_{y_G}

$$I_{y_G}^{tub} = 609 + 34,9 \times (8,8866 - 6)^2 = 899,80 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_G}^{perf.Z} = 204 + 27,5 \times (10,1134 - 6,45)^2 = 573,06 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_G} = I_{y_G}^{tub} + I_{y_G}^{perf.Z} = 1472,86 \text{ cm}^4$$

• DETERMINAÇÃO DO PRODUTO DE INÉRCIA $I_{x_G y_G}$

$$I_{x_G y_G}^{tub} = 0 + 34,9 \times 2,8866 \times 1,7628 = 177,59 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_G y_G}^{perf.Z} = -349 + 27,5 \times (-3,6634) \times (-2,2372) = -123,62 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_G y_G} = I_{x_G y_G}^{tub} + I_{x_G y_G}^{perf.Z} = 53,97 \text{ cm}^4$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS (2014-2015)

FLEXÃO DESVIADA, EIXO NEUTRO

ISABEL ALVIM TELES

• **EIXOS E MOMENTOS PRINCIPAIS CENTRAIS DE INÉRCIA**

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2}$$

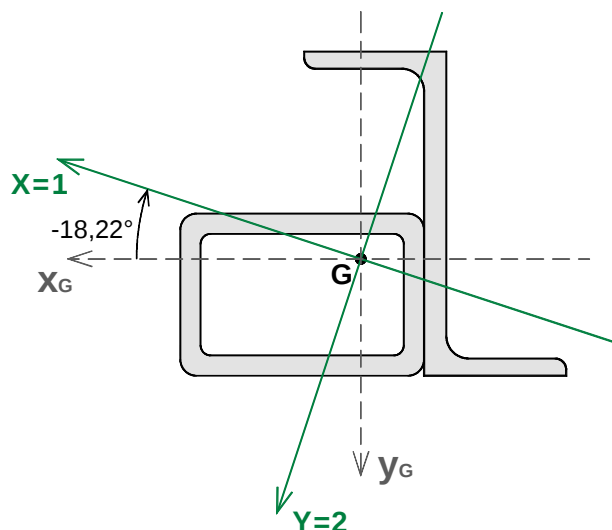
$$I_1 = \frac{1619,09 + 1472,86}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(1619,09 - 1472,86)^2 + 4 \times 53,97^2} = 1636,85 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2}$$

$$I_2 = \frac{1619,09 + 1472,86}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(1619,09 - 1472,86)^2 + 4 \times 53,97^2} = 1455,10 \text{ cm}^4$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y} \right) \Rightarrow \alpha_p = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 \times 53,97}{1619,09 - 1472,86} \right) = -18,22^\circ$$

$$I_{x_G} = 1619,09 \text{ cm}^4 > I_{y_G} = 1472,86 \text{ cm}^4 \Rightarrow I_1 \text{ mais próximo de } I_{x_G}$$



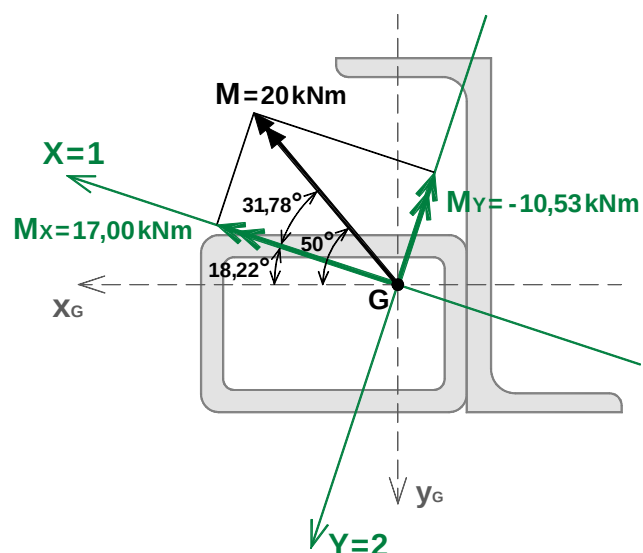
• **MOMENTO**

$$M_x = M \cdot \cos 31,78^\circ$$

$$M_x = 20 \cos 31,78^\circ = 17,00 \text{ kNm}$$

$$M_y = -M \cdot \sin 31,78^\circ$$

$$M_y = -20 \sin 31,78^\circ = -10,53 \text{ kNm}$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS (2014-2015)

FLEXÃO DESVIADA, EIXO NEUTRO

ISABEL ALVIM TELES

• **EIXO NEUTRO**

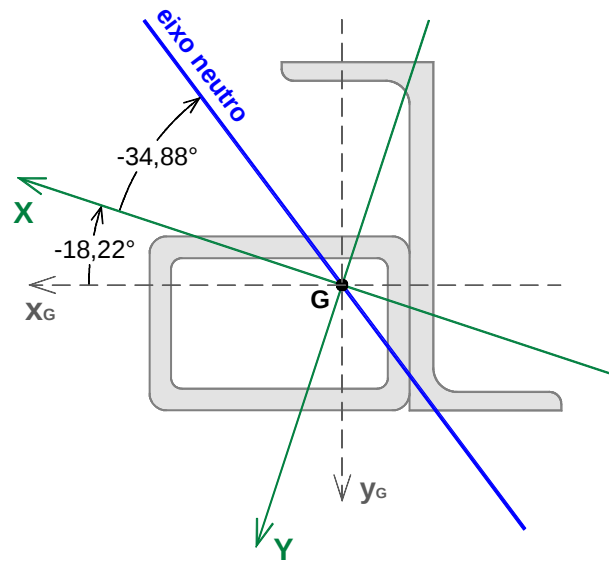
$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} Y - \frac{M_y}{I_y} X = 0$$

$$\frac{17,00}{1636,85 \times 10^{-8}} Y - \frac{-10,53}{1455,10 \times 10^{-8}} X = 0$$

Eixo neutro: $Y = -0,697 X$

Ângulo que o eixo neutro faz com o eixo X:

$$\theta = \arctg(-0,697) = -34,88^\circ$$



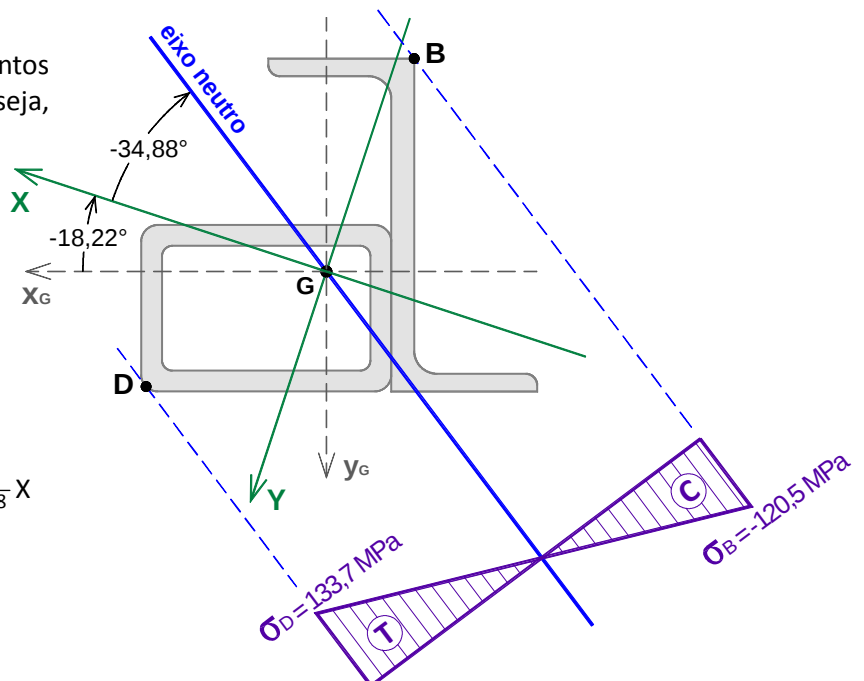
Alínea b)

As máximas tensões actuam nos pontos mais distantes do eixo neutro, ou seja, nos pontos **B** e **D**.

• **EXPRESSÃO DAS TENSÕES**

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} Y - \frac{M_y}{I_y} X$$

$$\sigma = \frac{17,00}{1636,85 \times 10^{-8}} Y - \frac{-10,53}{1455,10 \times 10^{-8}} X$$



• **COORDENADAS DO PONTO B NO SISTEMA DE EIXOS (X; Y)**

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18,22^\circ) & \sin(-18,22^\circ) \\ -\sin(-18,22^\circ) & \cos(-18,22^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4,2134 \\ -10,2372 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_B = -0,801 \text{ cm} = -0,00801 \text{ m} \\ Y_B = -11,041 \text{ cm} = -0,11041 \text{ m} \end{cases}$$

• **TENSÃO NO PONTO B**

$$\sigma_B = \frac{17,00}{1636,85 \times 10^{-8}} \times (-0,11041) + \frac{10,53}{1455,10 \times 10^{-8}} \times (-0,00801) = -120466,2 \text{ kPa}$$

$$\sigma_B = -120,5 \text{ MPa (compressão)}$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS (2014-2015)

FLEXÃO DESVIADA, EIXO NEUTRO

ISABEL ALVIM TELES

• **COORDENADAS DO PONTO D NO SISTEMA DE EIXOS (X; Y)**

$$\begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18,22^\circ) & \sin(-18,22^\circ) \\ -\sin(-18,22^\circ) & \cos(-18,22^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8,8866 \\ 5,7628 \end{bmatrix}$$

$$X_D = 6,639 \text{ cm} = 0,06639 \text{ m}$$

$$Y_D = 8,252 \text{ cm} = 0,08252 \text{ m}$$

• **TENSÃO NO PONTO D**

$$\sigma_D = \frac{17,00}{1636,85 \times 10^{-8}} \times 0,08252 + \frac{10,53}{1455,10 \times 10^{-8}} \times 0,06639 = 133747,5 \text{ kPa}$$

$$\sigma_D = 133,7 \text{ MPa (tracção)}$$

Alínea c)

Eixo neutro: recta horizontal a passar em G

• **EQUAÇÃO DO EIXO NEUTRO**

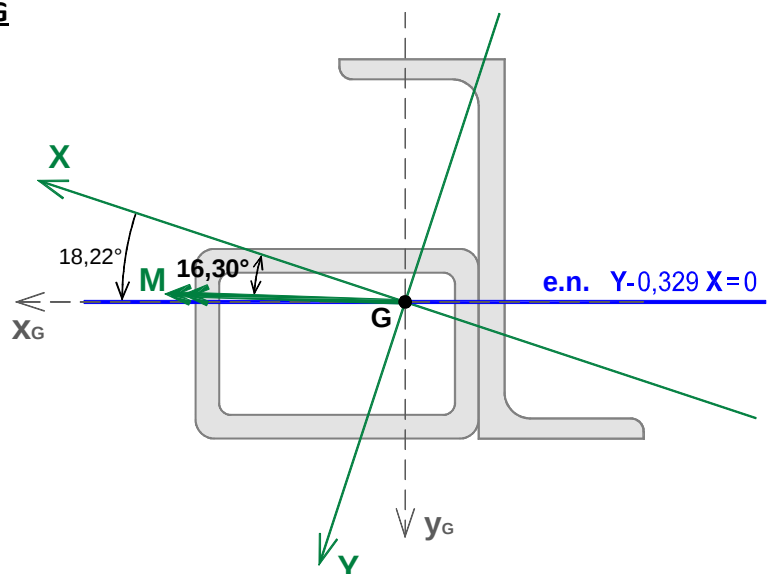
$$\text{Eixo neutro: } Y = \tan 18,22^\circ X$$

$$Y = 0,329 X$$

$$Y - 0,329 X = 0$$

$$\sigma = \frac{M_X}{I_X} Y - \frac{M_Y}{I_Y} X = 0$$

$$\frac{M_X}{1636,85 \times 10^{-8}} Y - \frac{M_Y}{1455,10 \times 10^{-8}} X = 0$$



$$\begin{cases} Y - 0,329 X = 0 \\ \frac{M_X}{1636,85 \times 10^{-8}} Y - \frac{M_Y}{1455,10 \times 10^{-8}} X = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{M_X}{1636,85 \times 10^{-8}} = 1 \\ -\frac{M_Y}{1455,10 \times 10^{-8}} = -0,329 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_X = 1636,85 \times 10^{-8} \\ M_Y = 478,73 \times 10^{-8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_X \text{ positivo} \\ M_Y \text{ positivo} \end{cases} \Rightarrow \theta = \arctg\left(\frac{M_Y}{M_X}\right) = \arctg\left(\frac{478,73}{1636,85}\right) = 16,30^\circ$$

RESISTÊNCIA DE MATERIAIS (2014-2015)

FLEXÃO DESVIADA, EIXO NEUTRO

ISABEL ALVIM TELES

Alínea d)

Eixo neutro a passar em $\underline{E} \Rightarrow$ recta a passar em $\underline{G}$ e $\underline{E}$

• **COORDENADAS DO PONTO $\underline{E}$ NO SISTEMA DE EIXOS (X ; Y)**

$$\begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18,22^\circ) & \sin(-18,22^\circ) \\ -\sin(-18,22^\circ) & \cos(-18,22^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -10,1134 \\ 5,7628 \end{bmatrix}$$

$$X_E = -11,408 \text{ cm} = -0,11408 \text{ m}$$

$$Y_E = 2,312 \text{ cm} = 0,02312 \text{ m}$$

• **EQUAÇÃO DO EIXO NEUTRO**

$$\text{Eixo neutro: } Y = \frac{0,02312}{-0,11408} X$$

$$Y = -0,2027 X \Rightarrow Y + 0,2027 X = 0$$

Ângulo que o eixo neutro faz com o eixo X :

$$\theta = \arctg(-0,2027) = -11,46^\circ$$

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} Y - \frac{M_y}{I_y} X = 0$$

$$\frac{M_x}{1636,85 \times 10^{-8}} Y - \frac{M_y}{1455,10 \times 10^{-8}} X = 0$$

$$\begin{cases} Y + 0,2027 X = 0 \\ \frac{M_x}{1636,85 \times 10^{-8}} Y - \frac{M_y}{1455,10 \times 10^{-8}} X = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{M_x}{1636,85 \times 10^{-8}} = 1 \\ -\frac{M_y}{1455,10 \times 10^{-8}} = 0,2027 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_x = 1636,85 \times 10^{-8} \\ M_y = -294,95 \times 10^{-8} \end{cases}$$

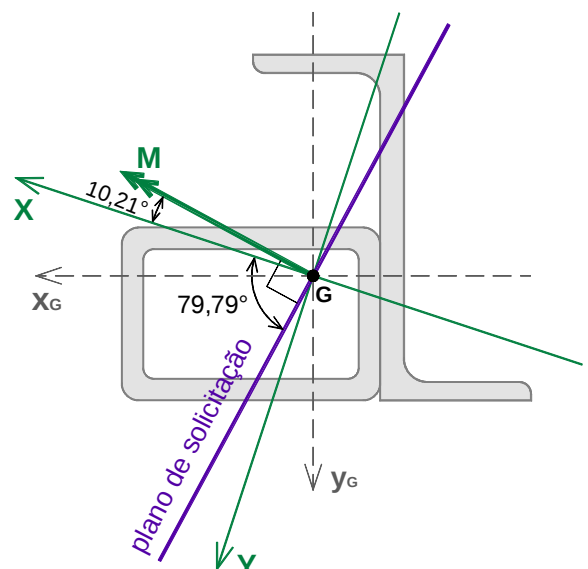
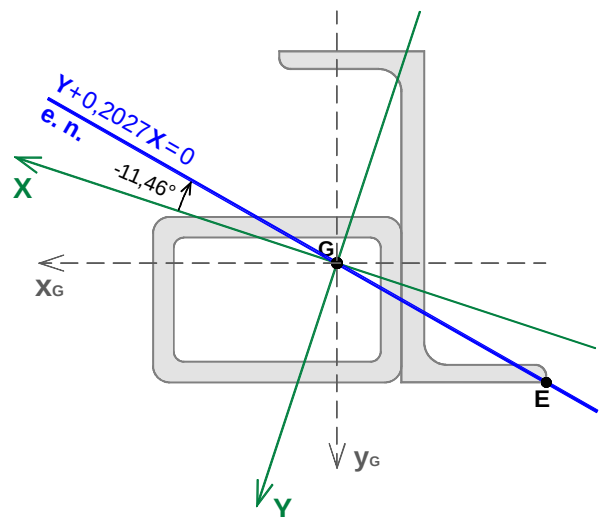
$$\begin{cases} M_x \text{ positivo} \\ M_y \text{ negativo} \end{cases}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{M_y}{M_x}\right)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{-294,95}{1636,85}\right) = -10,21^\circ$$

O plano de solicitação é perpendicular ao vector Momento.

$$\beta = \theta \pm 90^\circ = 79,79^\circ$$



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS (2014-2015)

FLEXÃO DESVIADA, EIXO NEUTRO

ISABEL ALVIM TELES

Alínea d) – resolução alternativa

• **COORDENADAS DO PONTO E NO SISTEMA DE EIXOS (X; Y)**

$$\begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18,22^\circ) & \sin(-18,22^\circ) \\ -\sin(-18,22^\circ) & \cos(-18,22^\circ) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -10,1134 \\ 5,7628 \end{bmatrix}$$

$$X_E = -11,408 \text{ cm} = -0,11408 \text{ m}$$

$$Y_E = 2,312 \text{ cm} = 0,02312 \text{ m}$$

$$\text{Eixo neutro: } \sigma = \frac{M_X}{I_X} Y - \frac{M_Y}{I_Y} X = 0 \Rightarrow \frac{M_X}{1636,85 \times 10^{-8}} Y - \frac{M_Y}{1455,10 \times 10^{-8}} X = 0$$

$$\text{Como o eixo neutro tem que passar em E: } \frac{M_X}{1636,85 \times 10^{-8}} \times 0,02312 - \frac{M_Y}{1455,10 \times 10^{-8}} \times (-0,11408) = 0$$

$$\frac{M_Y}{M_X} = -0,1802$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{M_Y}{M_X}\right) = \arctg(-0,1802) = -10,21^\circ$$

$$M_X \text{ positivo} \Rightarrow M_Y \text{ negativo} \quad \text{ou} \quad M_X \text{ negativo} \Rightarrow M_Y \text{ positivo}$$

$$\text{O plano de solicitação é perpendicular ao vector Momento} \Rightarrow \beta = \theta \pm 90^\circ = 79,79^\circ$$

