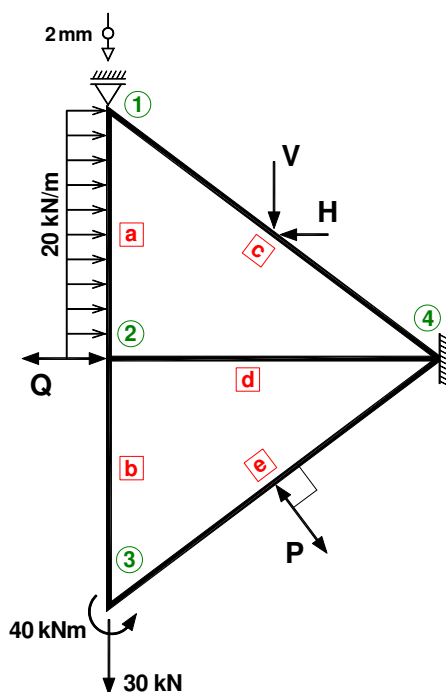


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

EXAME DE ÉPOCA NORMAL - 2013/2014



ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

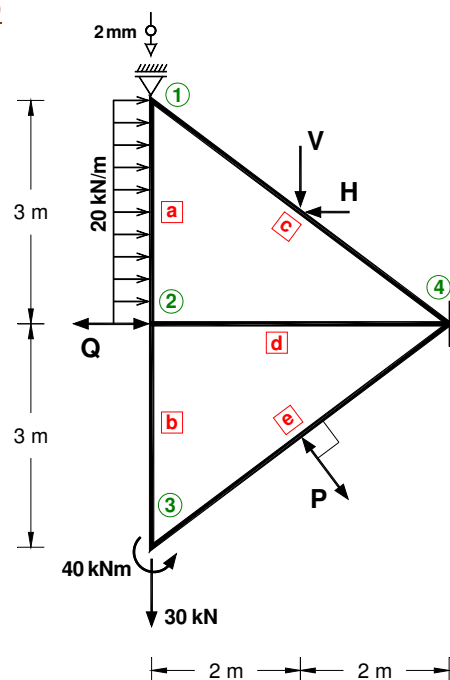
Considere a estrutura representada na figura, composta por barras contínuas com distintas secções transversais e materiais constituintes.

Para além da carga uniformemente distribuída na **barra a** e da força e momento no nó **3**, na estrutura estão ainda a actuar:

- uma força **P**, perpendicular à **barra e**, de que se desconhece o sentido e grandeza;
- uma força horizontal **Q** a actuar no **nó 2**, de que se desconhece o sentido e grandeza;
- duas forças (**V** e **H**) a actuar na **barra c** de que se desconhece a grandeza;
- um assentamento de 2 mm do apoio do **nó 1**.

Dados:

Vector solicitação [F]	
1	21 kN
2	-12 kN
3	-3,75 kNm
4	-30 kN
5	0
6	-15 kNm
7	-15 kN
8	-10 kN
9	71,25 kNm
10	-24 kN
11	8 kN
12	-12,5 kNm



Matriz de rigidez da estrutura na seguinte forma:

$$[K_G]^{Est} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 10 & 11 & 12 \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{matrix} K_{LL} & & & & & & & & & & \\ & K_{LL} & & & & & & & & & & \\ & & K_{LL} & & & & & & & & & \\ & & & K_{LL} & & & & & & & & \\ & & & & K_{LL} & & & & & & & \\ & & & & & K_{LL} & & & & & & \\ & & & & & & K_{LL} & & & & & \\ & & & & & & & K_{LL} & & & & \end{matrix} & \begin{matrix} K_{LF} \\ K_{LF} \\ K_{LF} \\ K_{LF} \\ K_{LF} \\ K_{LF} \\ K_{LF} \\ K_{LF} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{matrix} K_{FL} \\ K_{FL} \\ K_{FL} \\ K_{FL} \end{matrix} & \begin{matrix} K_{FF} \\ K_{FF} \\ K_{FF} \\ K_{FF} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$[K_G]^{Est} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 236\,866,56 & 10\,944 & -6\,000 & 0 & 9\,000 & 0 & 0 & -172\,177,92 & -230\,866,56 & 172\,177,92 & 1\,944 \\ 3 & 10\,944 & 28\,800 & -9\,000 & 0 & 9\,000 & 0 & 0 & 2\,592 & -1\,944 & -2\,592 & 5\,400 \\ 4 & -6\,000 & -9\,000 & 462\,000 & 0 & 0 & -6\,000 & 9\,000 & 0 & -450\,000 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1\,202\,531,25 & 5\,062,50 & 0 & -600\,000 & -600\,000 & 0 & -2\,531,25 & 5\,062,50 \\ 6 & 9\,000 & 9\,000 & 0 & 5\,062,50 & 49\,500 & -9\,000 & 9\,000 & 0 & 0 & -5\,062,50 & 6\,750 \\ 7 & 0 & 0 & -6\,000 & 0 & -9\,000 & 236\,866,56 & 172\,177,92 & -10\,944 & -230\,866,56 & -172\,177,92 & -1\,944 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & -600\,000 & 0 & 172\,177,92 & 730\,429,44 & 2\,592 & -172\,177,92 & -130\,429,44 & 2\,592 \\ 9 & 0 & 0 & 9\,000 & 0 & 9\,000 & -10\,944 & 2\,592 & 28\,800 & 1\,944,00 & -2\,592 & 5\,400 \\ 2 & -172\,177,92 & 2\,592 & 0 & -600\,000 & 0 & 0 & 0 & 730\,429,44 & 172\,177,92 & -130\,429,44 & 2\,592 \\ 10 & -230\,866,56 & -1\,944 & -450\,000 & 0 & 0 & -230\,866,56 & -172\,177,92 & 1\,944 & 911\,733,12 & 0 & 0 \\ 11 & 172\,177,92 & -2\,592 & 0 & -2\,531,25 & -5\,062,50 & -172\,177,92 & -130\,429,44 & -2\,592 & -130\,429,44 & 263\,390,13 & -10\,246,50 \\ 12 & 1\,944 & 5\,400 & 0 & 5\,062,50 & 6\,750 & -1\,944 & 2\,592 & 5\,400 & 2\,592 & -10\,246,50 & 35\,100 \end{bmatrix}$$

Para todas as barras assumo $i < j$, sendo i e j as numerações dos nós das barras. Os ângulos dos eixos das barras são medidos em torno do nó i .

Na resolução das alíneas seguintes use a **formulação matricial do Método dos Deslocamentos dos Nós**.

- a) Tendo em conta o vector solicitação $[F]$ anteriormente representado, determine o sentido e grandeza das forças **P** e **Q**.
- b) Determine a matriz de rigidez da **barra d** no sistema de eixos local: $[K_L^d]$.
- c) Recorrendo ao menor número possível de equações, complete o seguinte **vector dos deslocamentos**:

$$[\Delta] = \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 2 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} \Delta_L \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \Delta_F \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{matrix} \Delta 1 = -1,386 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \Delta 3 = 6,300 \times 10^{-4} \text{ rad} \\ \Delta 4 = -1,161 \times 10^{-4} \text{ m} \\ \Delta 5 = -2,025 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \Delta 6 = -2,871 \times 10^{-4} \text{ rad} \\ \Delta 7 \\ \Delta 8 \\ \Delta 9 = 3,385 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ \Delta 2 \\ \Delta 10 \\ \Delta 11 \\ \Delta 12 \end{matrix}$$

- d) Considerando a matriz de rigidez no referencial local da **barra a** que abaixo se representa e o vector dos deslocamentos da alínea anterior, desenhe os diagramas de esforços da referida barra.

$$[K_L^a] = \begin{bmatrix} 600\,000 & 0 & 0 & -600\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 6\,000 & 9\,000 & 0 & -6\,000 & 9\,000 \\ 0 & 9\,000 & 18\,000 & 0 & -9\,000 & 9\,000 \\ -600\,000 & 0 & 0 & 600\,000 & 0 & 0 \\ 0 & -6\,000 & -9\,000 & 0 & 6\,000 & -9\,000 \\ 0 & 9\,000 & 9\,000 & 0 & -9\,000 & 18\,000 \end{bmatrix}$$

RESOLUÇÃO

- MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS LOCAL

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

- MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO TRANSPOSTA

$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

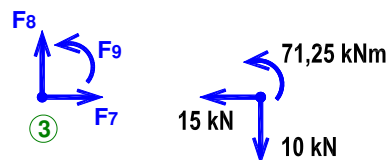
- MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS GLOBAL

$$[K_G] = [T]^T [K_L] [T]$$

ALÍNEA a

Determinação da força **P**

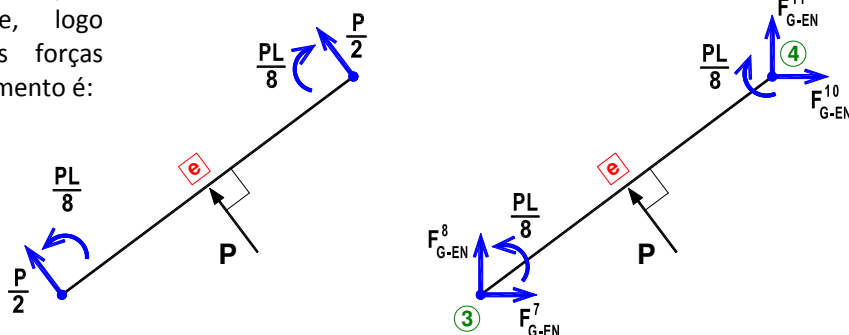
Consideremos o nó 3 e as forças do vector solicitação aí aplicadas:



A força **P** vai introduzir um momento no nó 3, que é somado na posição 9 do vector de solicitação **F**.

Esse momento no referencial local é o mesmo do referencial global, ou seja, $F_{L-EN}^3 = F_{G-EN}^9$.

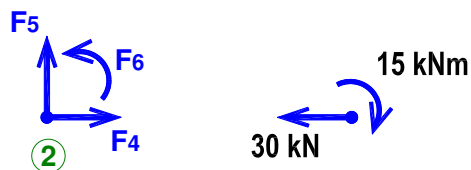
Partindo da hipótese que a força **P** tem sentido ascendente, logo positivo nas tabelas das forças equivalentes, o referido momento é:



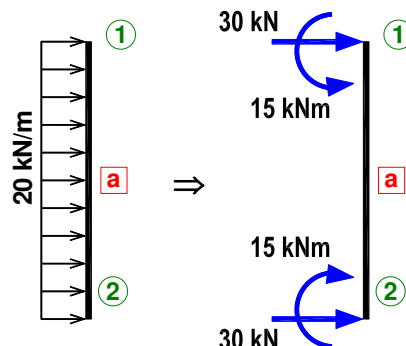
$$F_9 = 71,25 = 40 + \frac{PL}{8} \Rightarrow P = \frac{(71,25 - 40) \times 8}{5} = 50 \text{ kN} \quad \curvearrowright$$

Determinação da força **Q**

Consideremos o nó 2 e as forças do vector solicitação aí aplicadas:



A carga distribuída de 20 kN/m na barra a introduz as seguintes forças equivalentes nodais:



Partindo da hipótese que a força **Q** tem sentido da esquerda para a direita ($\rightarrow$ positivo) e tendo em conta $F_4 = -30 \text{ kN}$:

$$F_4 = -30 = 30 + Q \Rightarrow Q = -60 \text{ kN} \Rightarrow Q = 60 \text{ kN} \quad \leftarrow$$

ALÍNEA b

Contribuição da matriz de rigidez global de cada barra para a matriz de rigidez da estrutura:

$$[K_G]_{Est} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & & & & & & & & & \\ & a+c & & & a & & & & & & c & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ a & & & a+b+d & & b & & & & d & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & b & & b+e & & e & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ c & & & d & & e & & & c+d+e & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A **barra d** é horizontal com o nó menor (*i*) à esquerda $\Rightarrow [K_L^d] = [K_G^d]$

$$[K_L^d] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{4,4} & 0 & 0 & -450\,000 & 0 & 0 \\ 0 & K_{5,5} & K_{5,6} & 0 & -2\,531,25 & 5\,062,50 \\ 0 & K_{6,5} & K_{6,6} & 0 & -5\,062,50 & 6\,750 \\ -450\,000 & 0 & 0 & K_{10,10} & 0 & 0 \\ 0 & -2\,531,25 & -5\,062,50 & 0 & K_{11,11} & K_{11,12} \\ 0 & 5\,062,50 & 6\,750 & 0 & K_{12,11} & K_{12,12} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$K_{4,4} = -K_{4,10} = 450\,000$$

$$K_{10,10} = -K_{10,4} = 450\,000$$

$$K_{5,5} = -K_{5,11} = 2\,531,25$$

$$K_{11,11} = -K_{11,5} = 2\,531,25$$

$$K_{5,6} = K_{5,12} = 5\,062,50$$

$$K_{11,12} = K_{11,6} = -5\,062,50$$

$$K_{6,5} = -K_{6,11} = 5\,062,50$$

$$K_{12,11} = -K_{12,5} = -5\,062,50$$

$$K_{6,6} = 2 \times K_{6,12} = 2 \times 6\,750 = 13\,500$$

$$K_{12,12} = 2 \times K_{12,6} = 2 \times 6\,750 = 13\,500$$

$$[K_L^d] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 450\,000 & 0 & 0 & -450\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 2\,531,25 & 5\,062,50 & 0 & -2\,531,25 & 5\,062,50 \\ 0 & 5\,062,50 & 13\,500 & 0 & -5\,062,50 & 6\,750 \\ -450\,000 & 0 & 0 & 450\,000 & 0 & 0 \\ 0 & -2\,531,25 & -5\,062,50 & 0 & 2\,531,25 & -5\,062,50 \\ 0 & 5\,062,50 & 6\,750 & 0 & -5\,062,50 & 13\,500 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ALÍNEA c

Assentamento do apoio do nó 1 $\Rightarrow \Delta 2 = -0,002 \text{ m}$

Apoios $\Rightarrow \Delta 10 = \Delta 11 = \Delta 12 = 0$

Determinação de $\Delta 7$ e $\Delta 8$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 2 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 10 & 11 & 12 \end{array} \right] \times \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 2 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 2 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 10 & 11 & 12 \end{array} \right] + \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 2 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 10 & 11 & 12 \end{array} \right]$$

$$[K_{LL}] \cdot [\Delta_L] + [K_{LF}] \cdot [\Delta_F] = [F_L] \quad \Rightarrow \quad [\Delta_L]$$

Como só temos duas incógnitas, só será necessário utilizar duas equações.

Equação correspondente ao grau de liberdade 4 $\Rightarrow \Delta 7$

$$K_{4,1} \times \Delta 1 + K_{4,3} \times \Delta 3 + K_{4,4} \times \Delta 4 + K_{4,5} \times \Delta 5 + K_{4,6} \times \Delta 6 + K_{4,7} \times \Delta 7 + K_{4,8} \times \Delta 8 + K_{4,9} \times \Delta 9 + K_{4,2} \times \Delta 2 + K_{4,10} \times \Delta 10 + K_{4,11} \times \Delta 11 + K_{4,12} \times \Delta 12 = F4$$

$$-6\,000 \times \Delta 1 - 9\,000 \times \Delta 3 + 462\,000 \times \Delta 4 - 6\,000 \times \Delta 7 + 9\,000 \times \Delta 9 = -30$$

$$- 6\,000 \times (-1,386 \times 10^{-3}) - 9\,000 \times 6,3 \times 10^{-4} + 462\,000 \times (-1,161 \times 10^{-4}) - 6\,000 \times \Delta 7 + 9\,000 \times 3,385 \times 10^{-3} = -30$$

$$\Delta 7 = 1,579 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,579 \text{ mm} \rightarrow$$

Equação correspondente ao grau de liberdade 5 $\Rightarrow \Delta 8$

$$K_{5,1} \times \Delta 1 + K_{5,3} \times \Delta 3 + K_{5,4} \times \Delta 4 + K_{5,5} \times \Delta 5 + K_{5,6} \times \Delta 6 + K_{5,7} \times \Delta 7 + K_{5,8} \times \Delta 8 + K_{5,9} \times \Delta 9 + K_{5,2} \times \Delta 2 + K_{5,10} \times \Delta 10 + K_{5,11} \times \Delta 11 + K_{5,12} \times \Delta 12 = F5$$

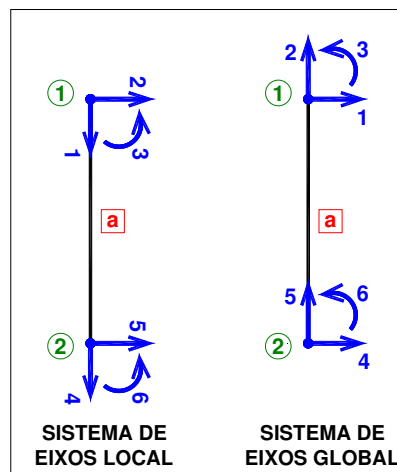
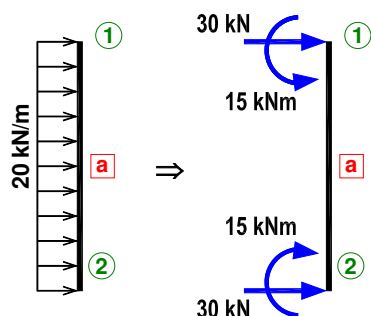
$$1\,202\,531,25 \times \Delta 5 + 5\,062,50 \times \Delta 6 - 600\,000 \times \Delta 8 - 600\,000 \times \Delta 2 = 0$$

$$1\,202\,531,25 \times (-2,025 \times 10^{-3}) + 5\,062,50 \times (-2,871 \times 10^{-4}) - 600\,000 \times \Delta\theta - 600\,000 \times (-0,002) = 0$$

$$\Delta \delta = -2,061 \times 10^{-3} \text{ m} = -2,061 \text{ mm} \downarrow$$

ALÍNEA d

Barra a $[F_L] = [K_L] \cdot [\Delta_L] - [F_{L-EN}]$



$$F_{L-EN} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \\ 0 \\ 30 \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1^L &= -\Delta_2^G \\ \Delta_2^L &= \Delta_1^G \\ \Delta_3^L &= \Delta_3^G \\ \Delta_4^L &= -\Delta_5^G \\ \Delta_5^L &= \Delta_4^G \\ \Delta_6^L &= \Delta_6^G \end{aligned} \Rightarrow [\Delta_L] = \begin{bmatrix} 0,002 \\ -1,386 \times 10^{-3} \\ 6,300 \times 10^{-4} \\ 2,025 \times 10^{-3} \\ -1,161 \times 10^{-4} \\ -2,871 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$[F_L] = [K_L] \cdot [\Delta_L] - [F_{L-EN}]$

$$[F_L] = \begin{bmatrix} 600\,000 & 0 & 0 & -600\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 6\,000 & 9\,000 & 0 & -6\,000 & 9\,000 \\ 0 & 9\,000 & 18\,000 & 0 & -9\,000 & 9\,000 \\ -600\,000 & 0 & 0 & 600\,000 & 0 & 0 \\ 0 & -6\,000 & -9\,000 & 0 & 6\,000 & -9\,000 \\ 0 & 9\,000 & 9\,000 & 0 & -9\,000 & 18\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,002 \\ -1,386 \times 10^{-3} \\ 6,300 \times 10^{-4} \\ 2,025 \times 10^{-3} \\ -1,161 \times 10^{-4} \\ -2,871 \times 10^{-4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \\ 0 \\ 30 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -34,533 \\ -17,673 \\ 15 \\ -25,467 \\ 4,073 \end{bmatrix}$$

