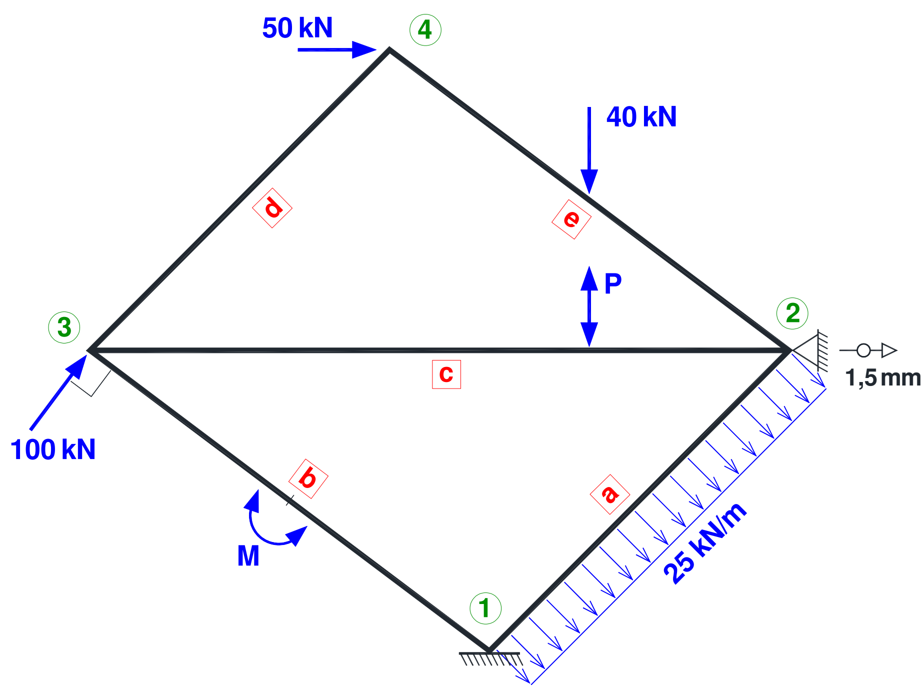
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL (SETEMBRO) - 2014/2015



ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

Considere a estrutura representada na figura, composta por barras contínuas com distintas secções transversais e materiais constituintes e da qual se representam abaixo o **vetor solicitação**, a **matriz de rigidez no referêncial local da barra e** e a **matriz de rigidez global**.

A estrutura encontra-se submetida às seguintes ações conhecidas:

- uma carga uniformemente distribuída de **25 kN/m** perpendicular à **barra a**;
- uma força vertical de **40 kN** a atuar a meio da **barra e**;
- uma força horizontal de **50 kN** no **nó 4**;
- uma força de **100 kN** perpendicular à **barra b**, a atuar no **nó 3**;
- um deslocamento horizontal de **1,5 mm** do apoio do **nó 2**.

A estrutura encontra-se ainda submetida às seguintes ações de que se desconhece a grandeza e sentido:

- uma força vertical **P** a atuar na **barra c**;
- um momento **M** a atuar a meio da **barra b**.

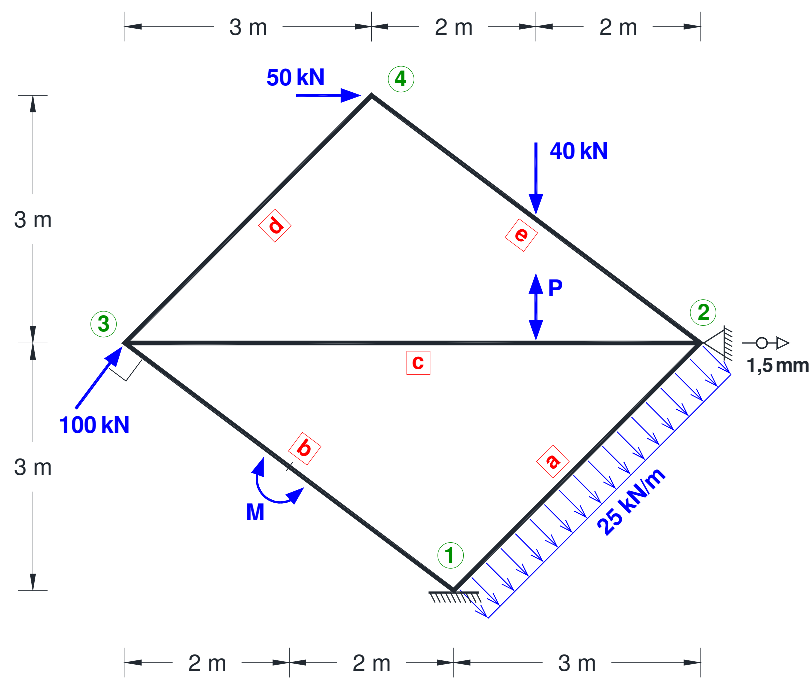
Na resolução deste exercício use a **formulação matricial do Método dos Deslocamentos dos Nós** e apresente todos os cálculos efetuados.

Para todas as barras assuma ***i<j***, sendo ***i*** e ***j*** as numerações dos nós das barras. Os ângulos dos eixos das barras são medidos em torno do nó ***i***.

Vetor solicitação [F]

[F] =

1	50,1 kN
2	-20,7 kN
3	-55 KNm
4	37,5 KN
5	-81,5525 kN
6	88,1122 kNm
7	47,4 kN
8	57,2525 kN
9	-29,7449 KNm
10	50 kN
11	-20 kN
12	-20 kNm



Matriz de rigidez no referencial local da barra e

$$
\left[K_L^e\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
171\,429 & 0 & 0 & -171\,429 & 0 & 0 \\
0 & 315 & -1\,102 & 0 & -315 & -1\,102 \\
0 & -1\,102 & 5\,143 & 0 & 1\,102 & 2\,571 \\
\hline
-171\,429 & 0 & 0 & 171\,429 & 0 & 0 \\
0 & -315 & 1\,102 & 0 & 315 & 1\,102 \\
0 & -1\,102 & 2\,571 & 0 & 1\,102 & 5\,143
\end{array}\right]
$$

Matriz de rigidez da estrutura $[K_G]^{Est}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	147 637,95	13 074,13	- 427,17	-70 799,07	-70 622,29	- 265,17	-76 838,88	57 548,16	-162	0	0	0
2	13 074,13	114 068,19	49,17	-70 622,29	-70 799,07	265,17	57 548,16	-43 269,12	-216	0	0	0
3	- 427,17	49,17	1 960,66	265,17	- 265,17	530,33	162	216	450	0	0	0
4	-70 799,07	-70 622,29	265,17	319 066,52	13 074,13	103,17	-171428,57	0	0	-76 838,88	57 548,16	-162
5	-70 622,29	-70 799,07	- 265,17	13 074,13	114 383,06	-1 583,21	0	- 314,87	-1 102,04	57 548,16	-43 269,12	-216
6	- 265,17	265,17	530,33	103,17	-1 583,21	7 103,52	0	1 102,04	2 571,43	162	216	450
7	-76 838,88	57 548,16	162	-171 428,57	0	0	319 066,52	13 074,13	- 103,17	-70 799,07	-70 622,29	- 265,17
8	57 548,16	-43 269,12	216	0	- 314,87	1 102,04	13 074,13	114 383,06	1 583,21	-70 622,29	-70 799,07	265,17
9	-162	-216	450	0	-1 102,04	2 571,43	- 103,17	1 583,21	7 103,52	265,17	- 265,17	530,33
10	0	0	0	-76 838,88	57 548,16	162	-70 799,07	-70 622,29	265,17	147 637,95	13 074,13	427,17
11	0	0	0	57 548,16	-43 269,12	216	-70 622,29	-70 799,07	- 265,17	13 074,13	114 068,19	- 49,17
12	0	0	0	-162	-216	450	- 265,17	265,17	530,33	427,17	- 49,17	1 960,66

a) Tendo em conta o vetor solicitação $[\,\mathbf{F}\,]$ anteriormente representado, determine o sentido e grandeza do momento **M**.

b) Determine as partições **B**, **C** e **D** da matriz de rigidez da **barra d** no sistema de eixos global.

$$\left[K_G^{\,d}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right]$$

c) Recorrendo ao menor número possível de equações, complete o **vetor dos deslocamentos** $[\,\Delta\,]$ aqui representado, identificando claramente a direção e sentido de cada deslocamento calculados.

d) Calcule a grandeza e sentido da reação horizontal no apoio do **nó 2**.

e) Calcule e desenhe neste enunciado os diagramas de esforços da **barra e**.

$$\mathbf{\Delta} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta 3 \\ \Delta 4 \\ \Delta 5 \\ \Delta 6 = 1{,}591 \times 10^{-2} \text{ rad} \\ \Delta 7 = 2{,}304 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \Delta 8 = 4{,}574 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \Delta 9 \\ \Delta 10 = 4{,}201 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \Delta 11 = 2{,}793 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \Delta 12 = -1{,}215 \times 10^{-2} \text{ rad} \end{bmatrix}$$

ESFORÇO AXIAL (kN)

ESFORÇO TRANSVERSO (kN)

MOMENTO FLETOR (kNm)

RESOLUÇÃO

- **MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS LOCAL**

$$[\mathbf{K_L}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array}\right]$$

- **MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO**

$$[\mathbf{T}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- **MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO TRANSPOSTA**

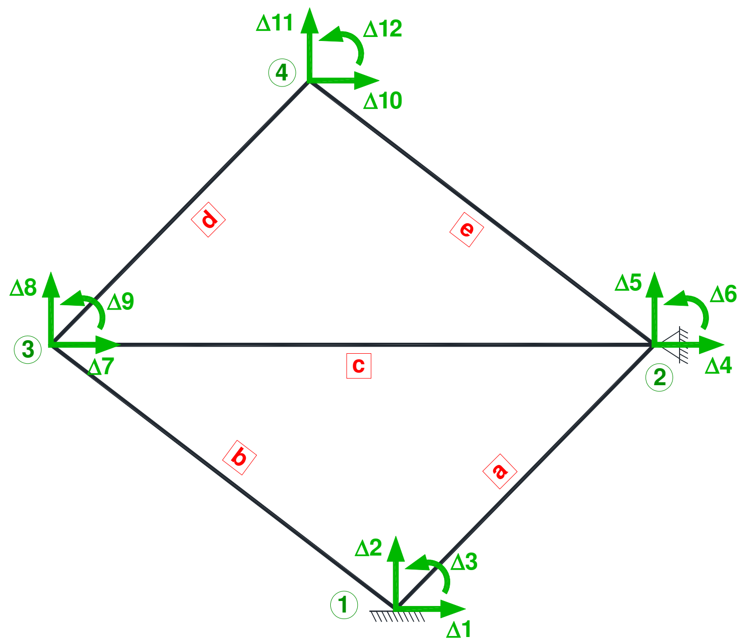
$$[\mathbf{T}]^{\mathbf{T}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- **MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS GLOBAL**

$$[K_G] = [T]^T\,[K_L]\,[T]$$

ALÍNEA a

- **GRAUS DE LIBERDADE DA ESTRUTURA (SISTEMA GLOBAL)**

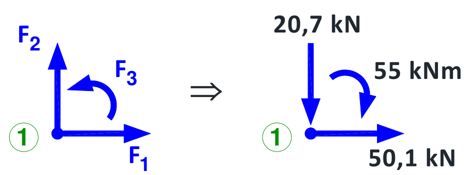


Nas posições 1, 2 e 3 do vetor solicitação, correspondentes ao **nó 1** (Δ1, Δ2, Δ3), entra a contribuição do momento **M** a atuar na **barra b** e da carga uniformemente distribuída de25 kN/m a atuar na **barra a**.

Na **posição 3** do vetor solicitação estão somados o momento introduzido no **nó 1** pelo momento **M** a atuar na **barra b** e o momento introduzido no **nó 1** pela carga uniformemente distribuída de 25 kN/m a atuar na **barra a**.

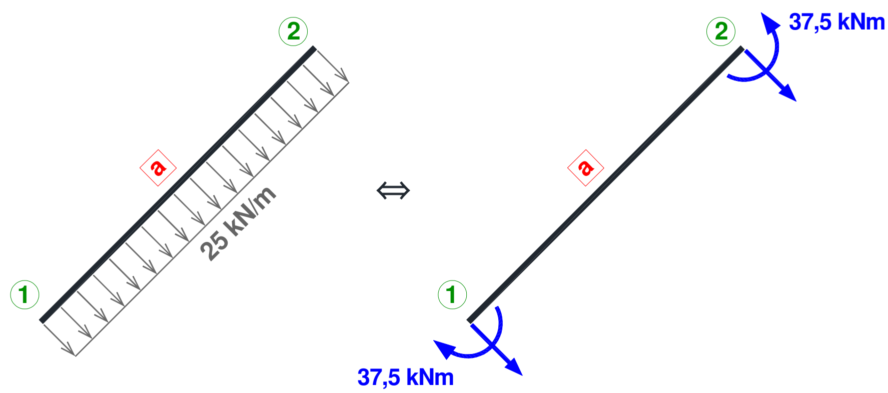
Ou seja: $F_3 \;=\; -55\text{ kNm} \;=\; \mathbf{M}_{M}^{\text{barra b}} + \mathbf{M}_{25\text{kN/m}}^{\text{barra a}}$

$\mathbf{M}_{25\text{kN/m}}^{\text{barra a}} \;\Rightarrow\; \dfrac{p.l^2}{12} = \dfrac{25\times(3\sqrt{2})^2}{12} = 37{,}5\text{ kNm}$



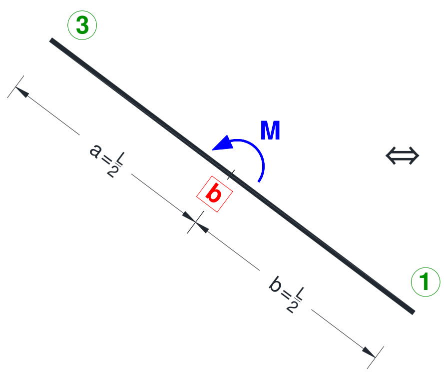
Comparando o sentido do momento no **nó 1** com o sentido positivo do grau de liberdade **Δ3**, conclui-se:

$\mathbf{M}_{25\text{kN/m}}^{\text{barra a}} \;=\; -37{,}5\text{ kNm}$

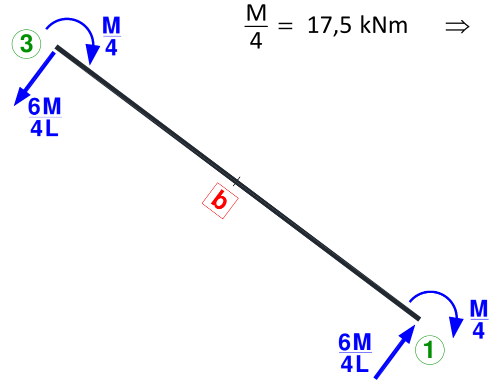


$$F_3 = -55\ \text{kNm} = \mathbf{M}_M^{\text{barra b}} + \mathbf{M}_{25\text{kN/m}}^{\text{barra a}} \quad \Rightarrow \quad -55 = \mathbf{M}_M^{\text{barra b}} - 37{,}5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}_M^{\text{barra b}} = -17{,}5\ \text{kNm}\ (\circlearrowleft)$$

$$\frac{M}{4} = 17{,}5\ \text{kNm} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = 70\ \text{kNm} \quad (\circlearrowleft)$$



$\Leftrightarrow$



ALÍNEA b

Contribuição da matriz de rigidez global de cada barra para a matriz de rigidez da estrutura:

$$[K_G]^{Est} = \begin{array}{c} \\ 1\ 2\ 3 \\ 4\ 5\ 6 \\ 7\ 8\ 9 \\ 10\ 11\ 12 \end{array} \begin{array}{cccc} 1\ 2\ 3 & 4\ 5\ 6 & 7\ 8\ 9 & 10\ 11\ 12 \\ \end{array}$$

	1 2 3	4 5 6	7 8 9	10 11 12
1 2 3	**a + b**	**a**	**b**	
4 5 6	**a**	**a + b + e**	**c**	**e**
7 8 9	**b**	**c**	**b + c + d**	**d** (partição B)
10 11 12		**e**	**d** (partição C)	**d + e** (partição D + e)

Tal como se pode constatar na figura anterior, a partição **B** e **C** da matriz de rigidez global da barra d podem ser "retirados" de imediato da matriz de rigidez global.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	147 637,95	13 074,13	- 427,17	-70 799,07	-70 622,29	- 265,17	-76 838,88	57 548,16	-162	0	0	0
2	13 074,13	114 068,19	49,17	-70 622,29	-70 799,07	265,17	57 548,16	-43 269,12	-216	0	0	0
3	- 427,17	49,17	1 960,66	265,17	- 265,17	530,33	162	216	450	0	0	0
4	-70 799,07	-70 622,29	265,17	319 066,52	13 074,13	103,17	-171428,57	0	0	-76 838,88	57 548,16	-162
5	-70 622,29	-70 799,07	- 265,17	13 074,13	114 383,06	-1 583,21	0	- 314,87	-1 102,04	57 548,16	-43 269,12	-216
6	- 265,17	265,17	530,33	103,17	-1 583,21	7 103,52	0	1 102,04	2 571,43	162	216	450
7	-76 838,88	57 548,16	162	-171 428,57	0	0	319 066,52	13 074,13	- 103,17	-70 799,07	-70 622,29	- 265,17
8	57 548,16	-43 269,12	216	0	- 314,87	1 102,04	13 074,13	114 383,06	1 583,21	-70 622,29	-70 799,07	265,17
9	-162	-216	450	0	-1 102,04	2 571,43	- 103,17	1 583,21	7 103,52	265,17	- 265,17	530,33
10	0	0	0	-76 838,88	57 548,16	162	-70 799,07	-70 622,29	265,17	147 637,95	13 074,13	427,17
11	0	0	0	57 548,16	-43 269,12	216	-70 622,29	-70 799,07	- 265,17	13 074,13	114 068,19	- 49,17
12	0	0	0	-162	-216	450	- 265,17	265,17	530,33	427,17	- 49,17	1 960,66

*Partição **B*** =

$$\begin{bmatrix} -70\,799{,}07 & -70\,622{,}29 & -265{,}17 \\ -70\,622{,}29 & -70\,799{,}07 & 265{,}17 \\ 265{,}17 & -265{,}17 & 530{,}33 \end{bmatrix}$$

*Partição **C*** =

$$\begin{bmatrix} -70\,799{,}07 & -70\,622{,}29 & 265{,}17 \\ -70\,622{,}29 & -70\,799{,}07 & -265{,}17 \\ -265{,}17 & 265{,}17 & 530{,}33 \end{bmatrix}$$

Consultando a matriz de rigidez global da estrutura acima representada, constata-se que a partição **D** da matriz $\left\lfloor K_G^d \right\rfloor$ que precisamos de determinar se encontra somada com uma parte da matriz $\left\lfloor K_G^e \right\rfloor$, pelo que precisamos de calcular a matriz $\left\lfloor K_G^e \right\rfloor$.

No enunciado é dada a matriz $\left\lfloor K_L^e \right\rfloor$. Como $\left\lfloor K_G^e \right\rfloor = [\,T\,]^T \left\lfloor K_L^e \right\rfloor [\,T\,]$, precisamos de calcular a matriz de Transformação $[\,T\,]$ e $[\,T\,]^T$.

$$[\,\mathbf{T}\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -0{,}8 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}6 & -0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}6 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$[\,\mathbf{T}\,]^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -0{,}8 & -0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & -0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -0{,}8 & -0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left\lfloor K_G^e \right\rfloor = [\,T\,]^T \left\lfloor K_L^e \right\rfloor [\,T\,] = \begin{array}{c} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \;\;4\;\; & \;\;\;\;5\;\;\;\; & \;\;\;\;6\;\;\;\; & \;\;\;\;10\;\;\;\; & \;\;\;\;11\;\;\;\; & \;\;12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 76\,838.88 & -57\,548.16 & -162 & -76\,838.88 & 57\,548.16 & -162 \\ -57\,548.16 & 43\,269.12 & -216 & 57\,548.16 & -43\,269.12 & -216 \\ -162 & -216 & 900 & 162 & 216 & 450 \\ \hline -76\,838.88 & 57\,548.16 & 162 & 76\,838.88 & -57\,548.16 & 162 \\ 57\,548.16 & -43\,269.12 & 216 & -57\,548.16 & 43\,269.12 & 216 \\ -162 & -216 & 450 & 162 & 216 & 900 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\textit{Partição } \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 147\,637{,}95 & 13\,074{,}13 & 427{,}17 \\ 13\,074{,}13 & 114\,068{,}19 & -49{,}17 \\ 427{,}17 & -49{,}17 & 1\,960{,}66 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 76\,838.88 & -57\,548.16 & 162 \\ -57\,548.16 & 43\,269.12 & 216 \\ 162 & 216 & 900 \end{bmatrix}$$

$$\textit{Partição } \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 70\,799.07 & 70\,622.29 & 265.17 \\ 70\,622.29 & 70\,799.07 & -265.17 \\ 265.17 & -265.17 & 1\,060.66 \end{bmatrix}$$

ALÍNEA c

Encastramento do **nó 1**: $\Delta 3 = 0$

Apoio duplo do **nó 2**: $\Delta 4 = 1{,}5 \times 10^{-3}$ m (deslizamento horizontal do apoio)

$\Delta 5 = 0$

Determinação de $\Delta 9$

$$\left[K_G^{Est} \right] \times [\Delta] = [F] + [R]$$

$$\begin{array}{c|c|} & 1\;\;2\;\;3\;\;4\;\;5\;\;6\;\;7\;\;8\;\;9\;\;10\;\;11\;\;12 \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\end{matrix} & \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ & K_G^{Est} & \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} \Delta 1 = 0 \\ \Delta 2 = 0 \\ \Delta 3 = 0 \\ \Delta 4 = 1{,}5\mathrm{x}10^{-3} \\ \Delta 5 = 0 \\ \Delta 6 = 1{,}595\mathrm{x}10^{-2} \\ \Delta 7 = 2{,}302\mathrm{x}10^{-3} \\ \Delta 8 = 4{,}574\mathrm{x}10^{-3} \\ \Delta 9 \\ \Delta 10 = 4{,}201\mathrm{x}10^{-3} \\ \Delta 11 = 2{,}793\mathrm{x}10^{-3} \\ \Delta 12 = -1{,}215\mathrm{x}10^{-2} \end{bmatrix} = \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\end{matrix} \begin{bmatrix} 50{,}1 \\ -20{,}7 \\ -55 \\ 37{,}5 \\ -81{,}5525 \\ 88{,}1122 \\ 47{,}4 \\ 57{,}2525 \\ -29{,}7449 \\ 50 \\ -20 \\ -20 \end{bmatrix} + \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\end{matrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como não sabemos as reações (desconhecemos os valores R1 a R5), só podemos escolher equações das linhas 6 a 12.

Vamos resolver a equação da linha 9.

Equação correspondente ao **grau de liberdade 9** $\Rightarrow$ $\Delta 9$

$$K_{9,6} \times \Delta 6 + K_{9,7} \times \boldsymbol{\Delta 7} + K_{9,8} \times \boldsymbol{\Delta 8} + K_{9,9} \times \boldsymbol{\Delta 9} + K_{9,10} \times \Delta 10 + K_{9,11} \times \Delta 11 + K_{9,12} \times \Delta 12 = F_9$$

$$2\,571{,}43 \times 1{,}591 \times 10^{-2} - 103{,}17 \times 2{,}304 \times 10^{-3} + 1\,583{,}21 \times 4{,}574 \times 10^{-3} + 7\,103{,}52 \times \boldsymbol{\Delta 9} + 265{,}17 \times 4{,}201 \times 10^{-3} +$$
$$- 265{,}17 \times 2{,}793 \times 10^{-3} + 530{,}33 \times (-1{,}215 \times 10^{-2}) = -29{,}7449$$

$\boldsymbol{\Delta 9} = -1{,}01 \times 10^{-2}$ rad ( )

ALÍNEA d

Reação horizontal do apoio do **nó 2** ⇨ $\mathbf{R_4}$

Equação correspondente ao **grau de liberdade 4** ⇒ $\mathbf{R_4}$

$K_{4,4} \times \Delta 4 + K_{4,6} \times \Delta 6 + K_{4,7} \times \Delta 7 + K_{4,10} \times \Delta 10 + K_{4,11} \times \Delta 11 + K_{4,12} \times \Delta 12 = F_4 + \mathbf{R_4}$

$319\,066{,}52 \times 1{,}5 \times 10^{-3} - 103{,}17 \times 1{,}591 \times 10^{-2} - 171\,428{,}57 \times 2{,}304 \times 10^{-3} - 76\,838{,}88 \times 4{,}201 \times 10^{-3} +$

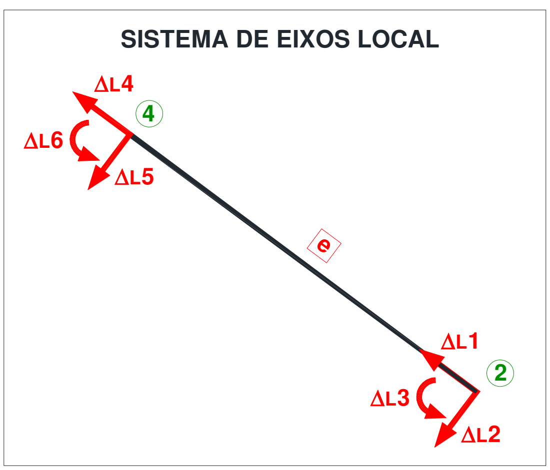
$57\,548{,}16 \times 2{,}793 \times 10^{-3} - 162 \times (-1{,}215 \times 10^{-2}) = 37{,}5 + \mathbf{R_4}$

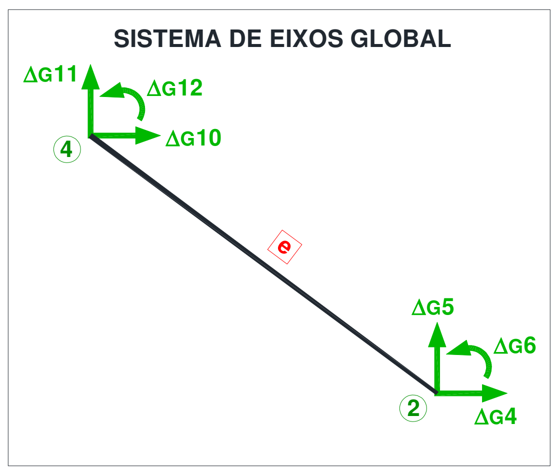
$\mathbf{R_4} = -\,112{,}29$ kN (←)

ALÍNEA e

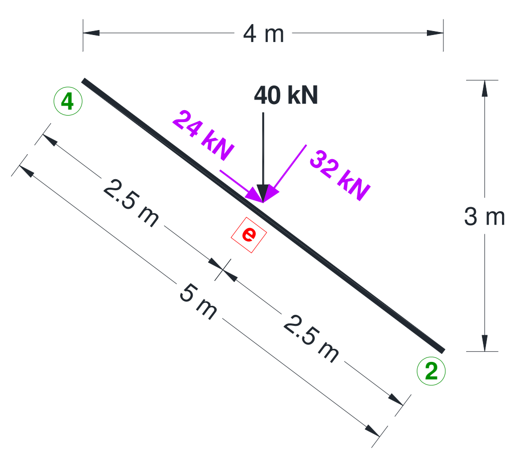
Barra a $[F_L] = [K_L]\,.\,[\Delta_L] - [F_{L\text{-}EN}] = [K_L]\,.\,[T]\,.\,[\Delta_G] - [F_{L\text{-}EN}]$

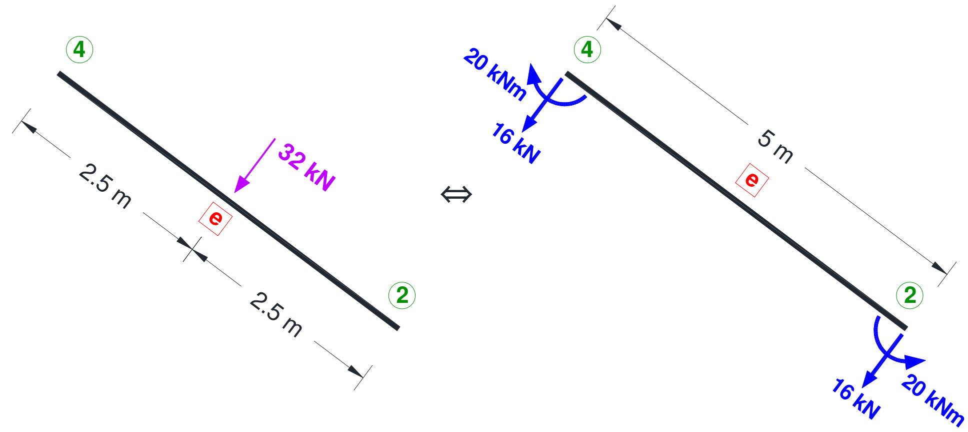
BARRA e	**Nós 2 - 4**	Graus de liberdade - sistema local: **ΔL1, ΔL2, ΔL3 - ΔL4, ΔL5, ΔL6** Graus de liberdade - sistema global: **ΔG4, ΔG5, ΔG6 - ΔG10, ΔG11, ΔG12**





Força 40 kN ⇒ $\begin{cases} P_y = 32 \text{ kN} \swarrow & (\perp \text{ à barra}) \\ P_x = 24 \text{ kN} \searrow & (// \text{ à barra}) \end{cases}$



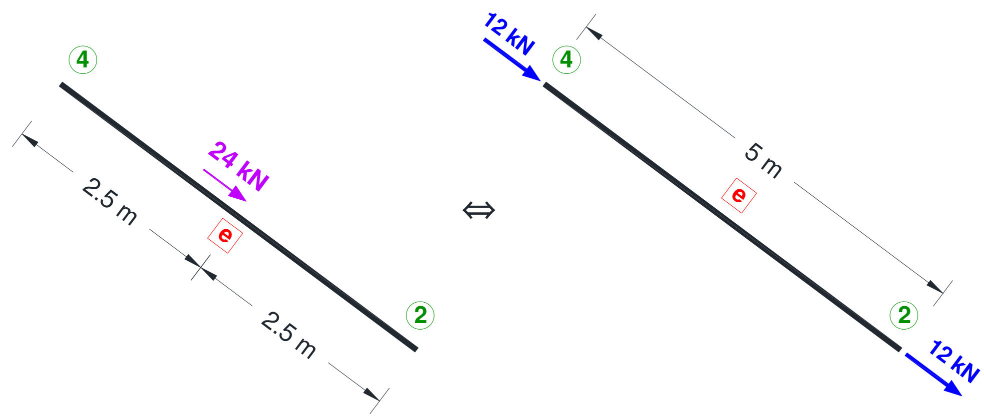


$P_Y = 32$ kN	$F_1 = 0$ $\lvert F_2 \rvert = \left\lvert \frac{P_y \cdot b^2}{L^3}(L+2a) \right\rvert = \frac{32 \times 2{,}5^2}{5^3}(5+2\times 2{,}5) = 16$ kN $\lvert F_3 \rvert = \left\lvert \frac{P_y \cdot a \cdot b^2}{L^2} \right\rvert = \frac{32 \times 2{,}5 \times 2{,}5^2}{5^2} = 20$ kNm $F_4 = 0$ $\lvert F_5 \rvert = \left\lvert \frac{P_y \cdot b^2}{L^3}(L+2a) \right\rvert = \frac{32 \times 2{,}5^2}{5^3}(5+2\times 2{,}5) = 16$ kN $\lvert F_6 \rvert = \left\lvert \frac{P_y \cdot a \cdot b^2}{L^2} \right\rvert = \frac{32 \times 2{,}5 \times 2{,}5^2}{5^2} = 20$ kNm

$P_Y = 32$ kN

$F_{L\text{-}EN}$ - LOCAL

F_1	=	0
F_2		16
F_3		20
F_4		0
F_5		16
F_6		-20



$P_X = 24$ kN	$\lvert F_1 \rvert = \left\lvert \frac{P_x \cdot b}{L} \right\rvert = \left\lvert \frac{12 \times 2{,}5}{5} \right\rvert = 12$ kN $F_2 = 0$ $F_3 = 0$ $\lvert F_4 \rvert = \left\lvert \frac{P_x \cdot b}{L} \right\rvert = \left\lvert \frac{12 \times 2{,}5}{5} \right\rvert = 12$ kN $F_5 = 0$ $F_6 = 0$

$P_X = 24$ kN

$F_{L\text{-}EN}$ - LOCAL

F_1	=	-12
F_2		0
F_3		0
F_4		-12
F_5		0
F_6		0

P_Y = 32 kN + P_X = 24 kN		
$F_{L\text{-}EN}$ - LOCAL		
F_1	=	0 - 12
F_2		16
F_3		20
F_4		0 - 12
F_5		16
F_6		-20

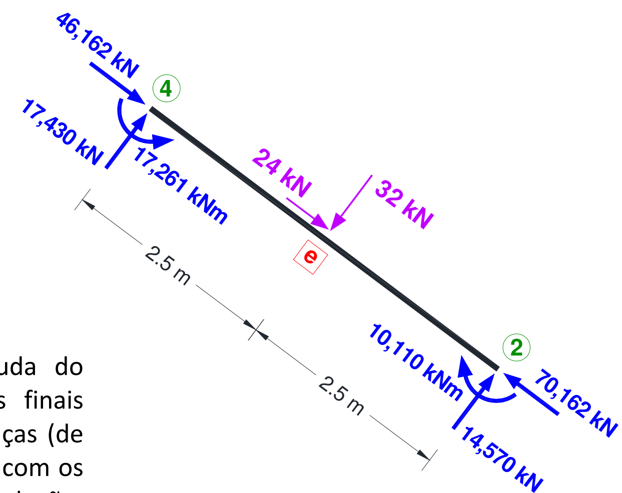
⇒

Barra e - Nós 2 - 4		
$F_{L\text{-}EN}$ - LOCAL		
F_1	=	-12
F_2		16
F_3		20
F_4		-12
F_5		16
F_6		-20

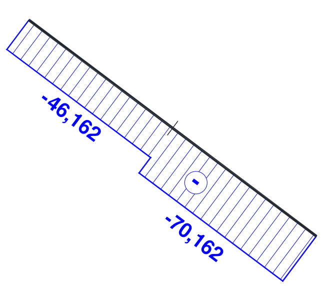
$$[F_L] = [K_L] \cdot [T] \cdot [\Delta_G] - [F_{L\text{-}EN}]$$

$$[F_L] = \begin{bmatrix} 171\,429 & 0 & 0 & -171\,429 & 0 & 0 \\ 0 & 315 & -1\,102 & 0 & -315 & -1\,102 \\ 0 & -1\,102 & 5\,143 & 0 & 1\,102 & 2\,571 \\ -171\,429 & 0 & 0 & 171\,429 & 0 & 0 \\ 0 & -315 & 1\,102 & 0 & 315 & 1\,102 \\ 0 & -1\,102 & 2\,571 & 0 & 1\,102 & 5\,143 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,6 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1,5 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 1,591 \times 10^{-2} \\ 4,201 \times 10^{-3} \\ 2,793 \times 10^{-3} \\ -1,215 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} - \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \\ 20 \\ -12 \\ 16 \\ --20 \end{bmatrix}$$

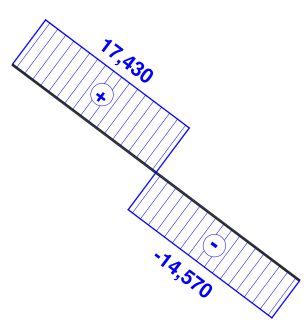
$$[F_L] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.162 \\ -14.570 \\ -10.110 \\ -46.162 \\ -17.430 \\ 17.261 \end{bmatrix}$$



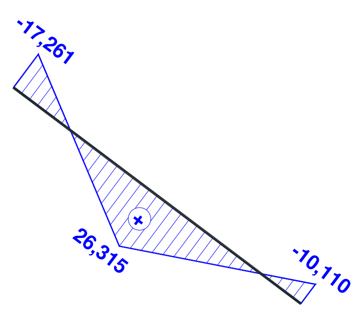
Nota: Os cálculos foram realizados com a ajuda do programa *Excel*, pelo que os resultados finais apresentados poderão ter algumas diferenças (de arredondamentos) em relação aos obtidos com os algarismos significativos indicados nesta resolução.



ESFORÇO AXIAL
(kN)



ESFORÇO TRANSVERSO
(kN)



MOMENTO FLETOR
(kNm)