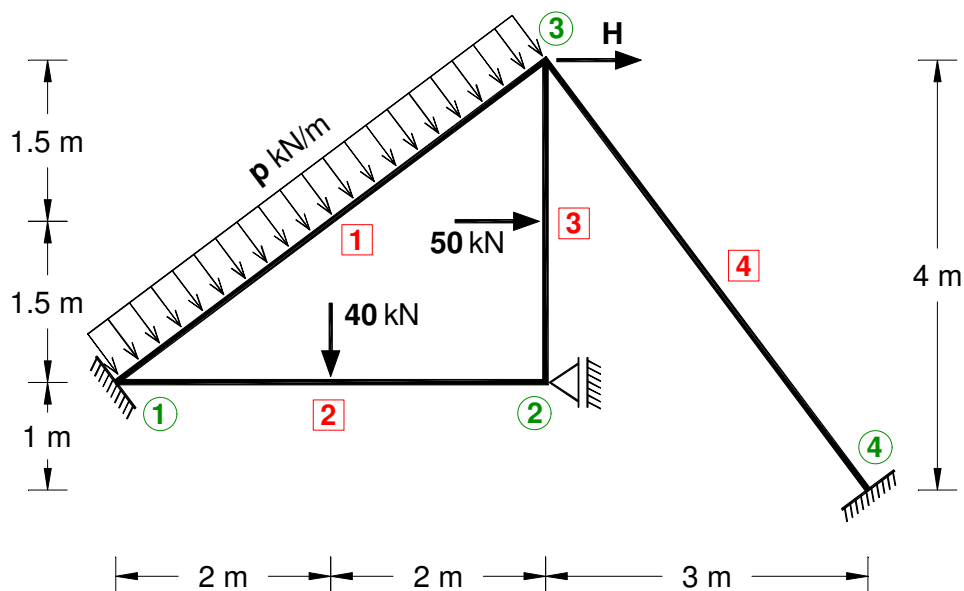


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL (SETEMBRO) - 2019/2020



ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO

Considere a estrutura representada na *Figura 1*, composta por barras contínuas com distintas secções transversais e materiais constituintes.

Para além da força vertical de **40 kN** a atuar a meio da **barra 2** e da força horizontal de **50 kN** a atuar a meio da **barra 3**, a estrutura está ainda submetida às seguintes ações:

- carga **p** uniformemente distribuída e perpendicular à **barra 1**, de que se desconhece a grandeza;
- força horizontal **H** a actuar no **nó 3**, de que se desconhece a grandeza.

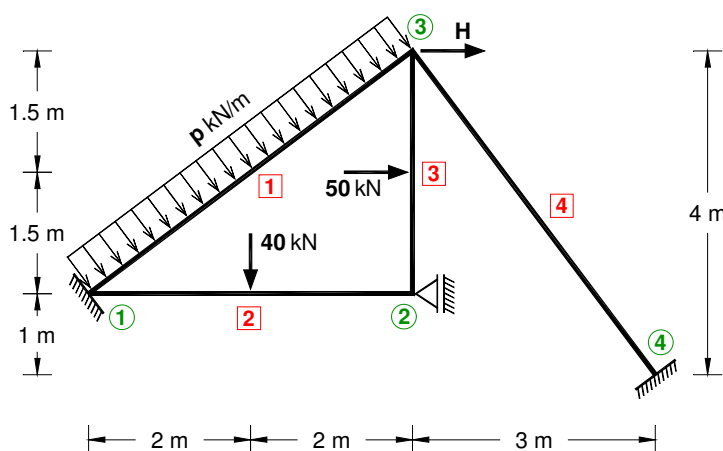


Figura 1

Na resolução do exercício use a **formulação matricial do Método dos Deslocamentos dos Nós**, assumindo $i < j$, sendo i e j as numerações dos nós das barras. Os ângulos dos eixos das barras são medidos em torno do nó i .

Considere ainda a informação que seguidamente se apresenta (sistema de unidades compatível com a *Figura 1*).

Matriz de rigidez da estrutura $[K_G]^{Est}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	68 086,656	17 217,792	-194,4	-45 000	0	0	-23 086,656	-17 217,792	-194,4	0	0	0
2	17 217,792	13 296,069	765,45	0	-253,125	506,25	-17 217,792	-13 042,944	259,2	0	0	0
3	-194,4	765,45	2 430	0	-506,25	675	194,4	-259,2	540	0	0	0
4	-45 000	0	0	45 600	0	-900	-600	0	-900	0	0	0
5	0	-253,125	-506,25	0	60 253,125	-506,25	0	-60 000	0	0	0	0
6	0	506,25	675	-900	-506,25	3 150	900	0	900	0	0	0
7	-23 086,656	-17 217,792	194,4	-600	0	900	36 729,6	0	1 353,6	-13 042,944	17 217,792	259,2
8	-17 217,792	-13 042,944	-259,2	0	-60 000	0	0	96 129,6	-64,8	17 217,792	-23 086,656	194,4
9	-194,4	259,2	540	-900	0	900	1 353,6	-64,8	3 960	-259,2	-194,4	540
10	0	0	0	0	0	0	-13 042,944	17 217,792	-259,2	13 042,944	-17 217,792	-259,2
11	0	0	0	0	0	0	17 217,792	-23 086,656	-194,4	-17 217,792	23 086,656	-194,4
12	0	0	0	0	0	0	259,2	194,4	540	-259,2	-194,4	1 080

Matrizes de rigidez das **barras 2 e 3** no sistema de eixos local

$$[K_L^2] = \begin{bmatrix} 45\,000 & 0 & 0 & -45\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 253,125 & 506,25 & 0 & -253,125 & 506,25 \\ 0 & 506,25 & 1\,350 & 0 & -506,25 & 675 \\ -45\,000 & 0 & 0 & 45\,000 & 0 & 0 \\ 0 & -253,125 & -506,25 & 0 & 253,125 & -506,25 \\ 0 & 506,25 & 675 & 0 & -506,25 & 1\,350 \end{bmatrix} \quad [K_L^3] = \begin{bmatrix} 60\,000 & 0 & 0 & -60\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 900 & 0 & -600 & 900 \\ 0 & 900 & 1\,800 & 0 & -900 & 900 \\ -60\,000 & 0 & 0 & 60\,000 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & -900 & 0 & 600 & -900 \\ 0 & 900 & 900 & 0 & -900 & 1\,800 \end{bmatrix}$$

Vetor solicitação

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 40,5 \\ 2 & -74 \\ 3 & -76,25 \\ 4 & 25 \\ 5 & -20 \\ 6 & 1,25 \\ 7 & 95,5 \\ 8 & -54 \\ 9 & 75 \\ 10 & 0 \\ 11 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

Vetor dos deslocamentos

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \\ 5 & -2,46 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 6 & -6,18 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ 7 & 2,03 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 8 & -2,08 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 9 & 1,96 \times 10^{-2} \text{ rad} \\ 10 & 0 \\ 11 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Tendo em conta o vetor solicitação $[F]$ anteriormente representado, determine a grandeza da carga uniformemente distribuída p .

- b) Determine as partições **A** e **B** da matriz de rigidez da **barra 1** no sistema de eixos global.

$$[K_G^1] = \begin{bmatrix} \text{A} & \text{B} \\ \text{C} & \text{D} \end{bmatrix}$$

- c) Determine o momento fletor atuante na secção onde está aplicada a força de **40 kN**, na **barra 2**

RESOLUÇÃO

• **MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS LOCAL**

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

• **MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO**

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• **MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO TRANSPOSTA**

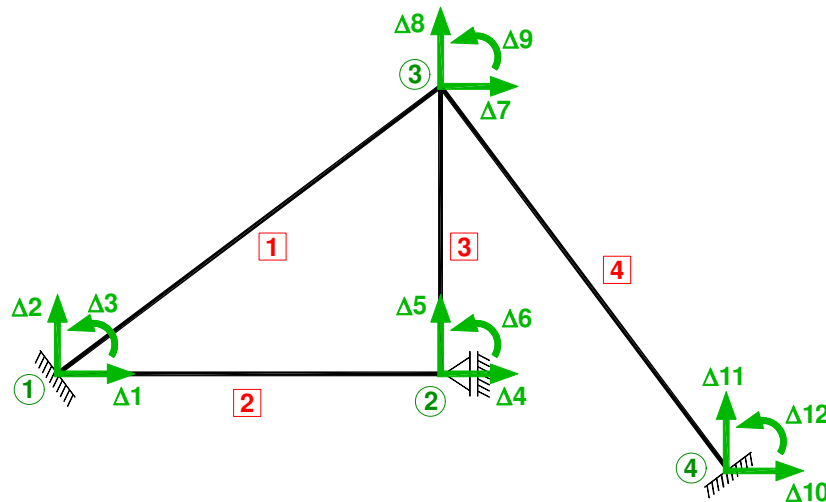
$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• **MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS GLOBAL**

$$[K_G] = [T]^T [K_L] [T]$$

ALÍNEA a

• **GRAUS DE LIBERDADE DA ESTRUTURA (SISTEMA GLOBAL)**

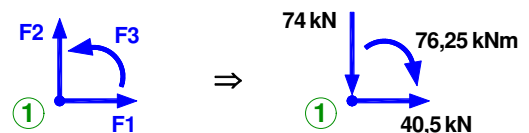


Nas posições 1, 2 e 3 do vetor solicitação, correspondentes ao **nó 1** ($\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$), entra a contribuição do momento da carga uniformemente distribuída **p** a atuar na **barra 1** e da força de **40 kN** a atuar na **barra 2**.

Na **posição 3** do vetor solicitação estão somados o momento introduzido no **nó 1** pela carga uniformemente distribuída **p** a atuar na **barra 1** e o momento introduzido no **nó 1** pela força de **40 kN** a atuar na **barra 2**.

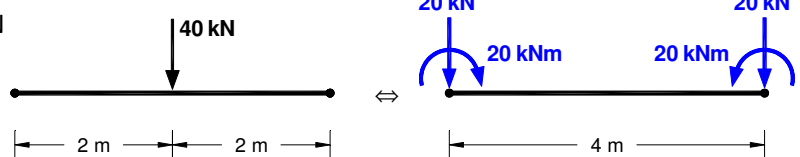
Ou seja: $F_3 = -76,25 \text{ kNm} \Rightarrow F_3 = 76,25 \text{ kNm} \quad \Omega$

$$F_3 = M_p^{\text{barra 1}} + M_{40 \text{ kN}}^{\text{barra 2}} = 76,25 \text{ kNm}$$



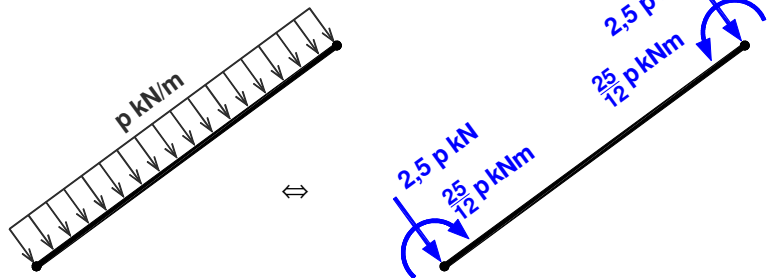
$$F_{40 \text{ kN}}^{\text{barra 2}} = \frac{40 \times 2^2}{4^3} (4 + 2 \times 2) = 20 \text{ kN}$$

$$M_{40 \text{ kN}}^{\text{barra 2}} = \frac{40 \times 2 \times 2^2}{4^2} = 20 \text{ kNm}$$



$$F_p^{\text{barra 1}} = \frac{p \times 5}{2} = 2,5 p \text{ kNm}$$

$$M_p^{\text{barra 1}} = \frac{p \times 5^2}{12} = \frac{25}{12} p \text{ kNm}$$



$$F_3 = M_p^{\text{barra 1}} + M_{40 \text{ kN}}^{\text{barra 2}} = 76,25 \text{ kNm} \quad \Omega$$

$$20 + \frac{25}{12} p = 76,25 \Rightarrow p = 27 \text{ kN/m}$$

ALÍNEA b

Contribuição da matriz de rigidez global de cada barra para a matriz de rigidez da estrutura:

$$[K_G]_{Est} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1 + 2 (partição A + 2)						1 (partição B)					
2				2								
3												
4												
5	2				2 + 3		3				4	
6												
7												
8	1				3		1 + 3 + 4				4	
9												
10												
11							4				4	
12												

Tal como se pode constatar na figura anterior, a partição **B** da matriz de rigidez global da barra 1 pode ser “retirada” de imediato da matriz de rigidez global.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	68 086.656	17 217.792	- 194.4	-45 000	0	0	-23 086.656	-17 217.792	- 194.4	0	0	0
2	17 217.792	13 296.069	765.45	0	- 253.125	506.25	-17 217.792	-13 042.944	259.2	0	0	0
3	- 194.4	765.45	2 430	0	- 506.25	675	194.4	- 259.2	540	0	0	0
4	-45 000	0	0	45 600	0	- 900	- 600	0	- 900	0	0	0
5	0	- 253.125	- 506.25	0	60 253.125	- 506.25	0	-60 000	0	0	0	0
6	0	506.25	675	- 900	- 506.25	3 150	900	0	900	0	0	0
7	-23 086.656	-17 217.792	194.4	- 600	0	900	36 729.6	0	1 353.6	-13 042.944	17 217.792	259.2
8	-17 217.792	-13 042.944	- 259.2	0	-60 000	0	0	96 129.6	- 64.8	17 217.792	-23 086.656	194.4
9	- 194.4	259.2	540	- 900	0	900	1 353.6	- 64.8	3 960	- 259.2	- 194.4	540
10	0	0	0	0	0	0	-13 042.944	17 217.792	- 259.2	13 042.944	-17 217.792	- 259.2
11	0	0	0	0	0	0	17 217.792	-23 086.656	- 194.4	-17 217.792	23 086.656	- 194.4
12	0	0	0	0	0	0	259.2	194.4	540	- 259.2	- 194.4	1 080

$$Partição B = \begin{bmatrix} -23\,086.656 & -17\,217.792 & -194.4 \\ -17\,217.792 & -13\,042.944 & 259.2 \\ 194.4 & -259.2 & 540 \end{bmatrix}$$

Consultando a matriz de rigidez global da estrutura acima representada, constata-se que a partição **A** da matriz $[K_G^1]$ que precisamos de determinar se encontra somada com uma parte da matriz $[K_G^2]$, pelo que precisamos de calcular a matriz $[K_G^2]$.

A barra 2 é horizontal com o nó menor à esquerda, logo $[K_G^2] = [K_L^2]$.

$$[K_G^2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 45\,000 & 0 & 0 & -45\,000 & 0 \\ 2 & 0 & 253,125 & 506,25 & 0 & -253,125 \\ 3 & 0 & 506,25 & 1\,350 & 0 & -506,25 \\ 4 & -45\,000 & 0 & 0 & 45\,000 & 0 \\ 5 & 0 & -253,125 & -506,25 & 0 & 253,125 \\ 6 & 0 & 506,25 & 675 & 0 & -506,25 \end{bmatrix}$$

$$\text{Partição A} = \begin{bmatrix} 68\,086.656 & 17\,217.792 & -194.4 \\ 17\,217.792 & 13\,296.069 & 765.45 \\ -194.4 & 765.45 & 2\,430 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 45\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 253,125 & 506,25 \\ 0 & 506,25 & 1\,350 \end{bmatrix}$$

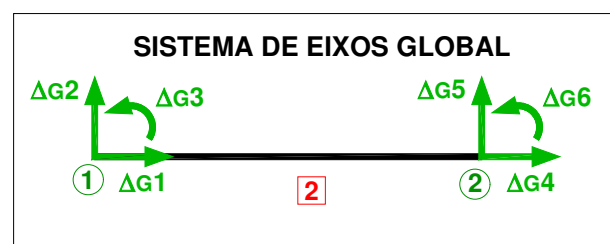
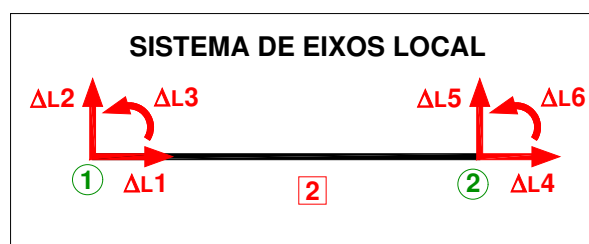
$$\text{Partição A} = \begin{bmatrix} 23\,086.656 & 17\,217.792 & -194.4 \\ 17\,217.792 & 130\,042.944 & 259.20 \\ -194.4 & 259.20 & 1\,080 \end{bmatrix}$$

ALÍNEA c

Barra 2

$$[F_L] = [K_L] \cdot [\Delta_L] - [F_{L-EN}]$$

BARRA 2 Nós 1 - 2 Graus de liberdade - sistema local: $\Delta L_1, \Delta L_2, \Delta L_3 - \Delta L_4, \Delta L_5, \Delta L_6$
Graus de liberdade - sistema global: $\Delta G_1, \Delta G_2, \Delta G_3 - \Delta G_4, \Delta G_5, \Delta G_6$



É fácil relacionar o sistema de eixos local com o global:

$$\begin{aligned} \Delta L_1 &= \Delta G_1 = 0 \\ \Delta L_2 &= \Delta G_2 = 0 \\ \Delta L_3 &= \Delta G_3 = 0 \\ \Delta L_4 &= \Delta G_4 = 0 \\ \Delta L_5 &= \Delta G_5 = -2,46 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \Delta L_6 &= \Delta G_6 = -6,18 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

$$[\Delta_L] = \begin{bmatrix} \Delta L_1 \\ \Delta L_2 \\ \Delta L_3 \\ \Delta L_4 \\ \Delta L_5 \\ \Delta L_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2,46 \times 10^{-3} \\ -6,18 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Nó 1 (extremidade à esquerda)

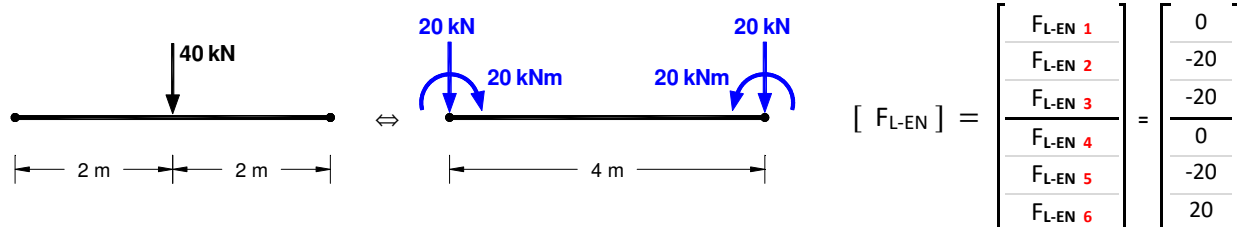
$$F_{40\text{kN}}^{\text{barra 2}} = \frac{-40 \times 2^2}{4^3} (4 + 2 \times 2) = -20 \text{ kN}$$

$$M_{40\text{kN}}^{\text{barra 2}} = \frac{-40 \times 2 \times 2^2}{4^2} = -20 \text{ kNm}$$

Nó 2 (extremidade à direita)

$$F_{40\text{kN}}^{\text{barra 2}} = \frac{-40 \times 2^2}{4^3} (4 + 2 \times 2) = -20 \text{ kN}$$

$$M_{40\text{kN}}^{\text{barra 2}} = -\frac{40 \times 2 \times 2^2}{4^2} = 20 \text{ kNm}$$

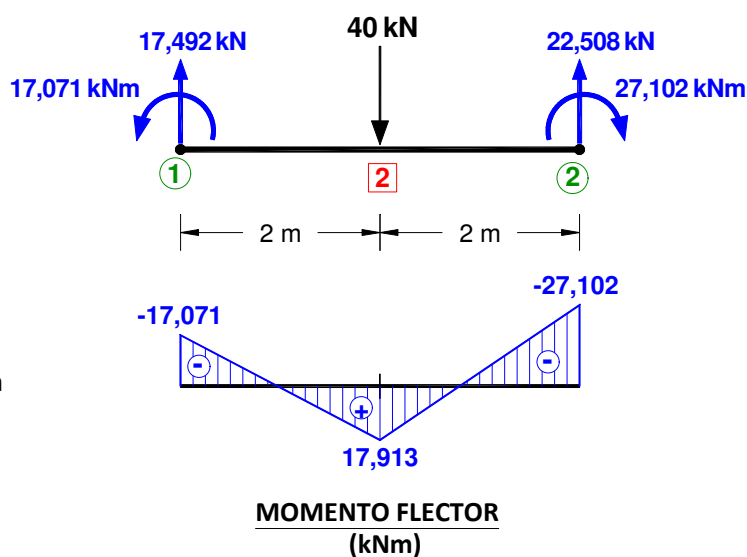


$$[F_L] = [K_L] \cdot [\Delta_L] - [F_{L-EN}]$$

$$[F_L] = \begin{bmatrix} 45\,000 & 0 & 0 & -45\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 253,125 & 506,25 & 0 & -253,125 & 506,25 \\ 0 & 506,25 & 1\,350 & 0 & -506,25 & 675 \\ -45\,000 & 0 & 0 & 45\,000 & 0 & 0 \\ 0 & -253,125 & -506,25 & 0 & 253,125 & -506,25 \\ 0 & 506,25 & 675 & 0 & -506,25 & 1\,350 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2,46 \times 10^{-3} \\ -6,18 \times 10^{-3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ -20 \\ 0 \\ -20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$[F_L] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 17,492 \\ 17,071 \\ 0 \\ 22,508 \\ -27,102 \end{bmatrix}$$

$$M(z=2m) = -17,071 + 17,492 \times 2 = 17,913 \text{ kNm}$$



Nota: Os cálculos foram realizados com a ajuda do programa *Excel*, pelo que os resultados finais apresentados poderão ter algumas diferenças (de arredondamentos) em relação aos obtidos com os algarismos significativos indicados nesta resolução.