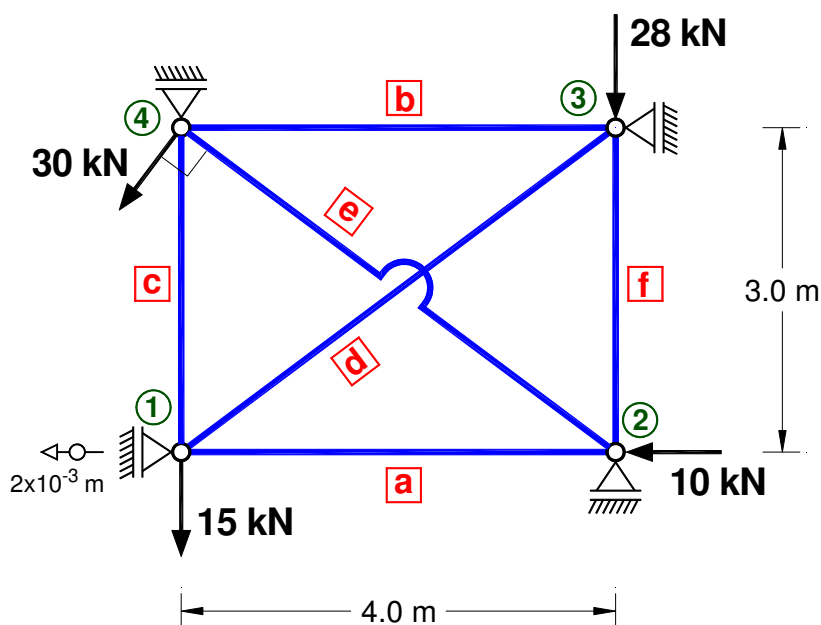


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS DOS NÓS



EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL - 13/SETEMBRO/2023

SISTEMA ARTICULADO PLANO (SAP)

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO PROPOSTO (EXAME 13/SETEMBRO/2023)

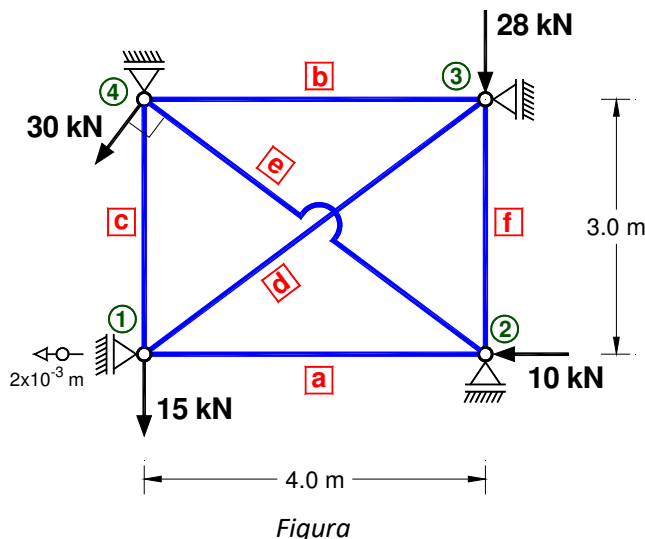
Considere a estrutura articulada representada na figura e toda a informação que seguidamente se apresenta.

As barras da estrutura poderão apresentar secções diversas e ser constituídas por diferentes materiais.

Para todas as barras assuma que $i < j$, sendo i e j as numerações dos nós da barra, e os ângulos dos eixos das barras medidos em torno do nó i .

Faça uso da formulação matricial do **Método dos Deslocamentos dos Nós**.

Nota: A força de 30 kN aplicada no nó 4 é perpendicular à barra e.



- a) Considere que é conhecida a diagonal principal da matriz de rigidez da estrutura e as matrizes de rigidez no referencial local da barra a, barra b e barra f, conforme abaixo se descreve.

Defina a matriz de rigidez no sistema global da barra e.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	57 600	19 200						
2	19 200	38 400						
3			48 384	-12 288				
4			-12 288	24 576				
5					57 600	19 200		
6					19 200	29 760		
7							48 384	-12 288
8							-12 288	33 216

**Matriz de rigidez
da estrutura
(incompleta)**

barra a
e
barra b

$$\begin{bmatrix} K_L^a \\ K_L^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32\,000 & 0 & -32\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -32\,000 & 0 & 32\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz de rigidez – sist. eixos local})$$

barra f

$$\begin{bmatrix} K_L^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15\,360 & 0 & -15\,360 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15\,360 & 0 & 15\,360 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz de rigidez – sist. eixos local})$$

Na resolução das alíneas **b)** e **c)** considere que houve necessidade de proceder a uma remodelação da estrutura. Esta manteve a sua geometria e ações (forças atuantes e assentamento de apoio) mas foi realizada utilizando barras com áreas e materiais diferentes dos inicialmente previstos.

Seguidamente apresenta-se a **matriz de rigidez da estrutura remodelada**.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	14 400	4 800	-8 000	0	-6 400	-4 800	0	0
2	4 800	9 600	0	0	-4 800	-3 600	0	-6 000
3	-8 000	0	14 400	-4 800	0	0	-6 400	4 800
4	0	0	-4 800	7 440	0	-3 840	4 800	-3 600
5	-6 400	-4 800	0	0	12 525	4 800	-6 125	0
6	-4 800	-3 600	0	-3 840	4 800	7 440	0	0
7	0	0	-6 400	4 800	-6 125	0	12 525	-4 800
8	0	-6 000	4 800	-3 600	0	0	-4 800	9 600

**Matriz de rigidez
da
estrutura
remodelada**

- b)** Determine o vetor dos deslocamentos da estrutura remodelada, tendo em conta que já foram obtidos os seguintes deslocamentos:

Deslocamento vertical do nó 3: 6,507 mm ↓

Deslocamento horizontal do nó 4: 3,053 mm ←

Indique claramente as direcções e sentidos de todos os deslocamentos.

- c)** Caracterize os esforços que actuam na **barra b**, sabendo que na **estrutura remodelada** essa barra é realizada por um perfil com secção transversal quadrada com 3,5 cm de lado e o material que a constitui apresenta um módulo de elasticidade de 20 GPa.

RESOLUÇÃO

- MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS LOCAL: K_L**

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• **MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO: T**

e

MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO TRANSPOSTA: T^T

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

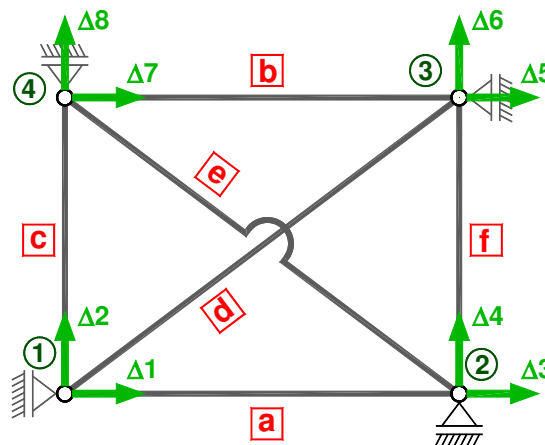
$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

• **MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS GLOBAL: K_G**

$$[K_G] = [T]^T [K_L] [T]$$

Alínea a)

Graus de liberdade associados aos nós da estrutura:



Contribuição de cada uma das barras na matriz de rigidez global da estrutura:

$$[K_G^{EST}] = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & & & & & & & & \\ 2 & a+c+d & & a & & d & & c & \\ 3 & & & & & & & & \\ 4 & a & & a+e+f & & f & & e & \\ 5 & & & & & & & & \\ 6 & d & & f & & b+d+f & & b & \\ 7 & & & & & & & & \\ 8 & c & & e & & b & & b+c+e & \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez global da **barra e**: $[K_G^e] = \begin{bmatrix} & 3 & 4 & 8 & 9 \\ 3 & & & & \\ 4 & X & & -X & \\ 8 & & & & \\ 9 & -X & & X & \end{bmatrix}$

$$X = [K_G^{EST}] - [K_G^a] - [K_G^f]$$

$$\text{barra a} \quad [K_G^a] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 32\,000 & 0 & -32\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -32\,000 & 0 & 32\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{barra f} \quad [K_G^f] = [T]^T [K_L^f] [T]$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ 0 & 0 & -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ 0 & 0 & \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^f] = [T]^T [K_L^f] [T]$$

$$[K_G^f] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 15\,360 & 0 & -15\,360 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15\,360 & 0 & 15\,360 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_G^f] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15\,360 & 0 & -15\,360 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15\,360 & 0 & 15\,360 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$K_{3,3}^e = K_{3,3}^{EST} - K_{3,3}^a - K_{3,3}^f = 48\,384 - 32\,000 - 0 = 16\,384$$

$$K_{3,4}^e = K_{3,4}^{EST} - K_{3,4}^a - K_{3,4}^f = -12\,288 - 0 - 0 = -12\,288$$

$$K_{4,3}^e = K_{3,4}^e = -12\,288$$

$$K_{4,4}^e = K_{4,4}^{EST} - K_{4,4}^a - K_{4,4}^f = 24\,576 - 0 - 15\,360 = 9\,216$$

Matriz de rigidez global da barra e: $K_G^e =$

$$= \begin{bmatrix} & \overset{3}{\text{X}} & \overset{4}{\text{X}} & \overset{8}{\text{X}} & \overset{9}{\text{X}} \\ \overset{3}{\text{X}} & & & & \\ \overset{4}{\text{X}} & & & & \\ \overset{8}{\text{X}} & & & & \\ \overset{9}{\text{X}} & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16\,384 & -12\,288 & -16\,384 & 12\,288 \\ -12\,288 & 9\,216 & 12\,288 & -9\,216 \\ -16\,384 & 12\,288 & 16\,384 & -12\,288 \\ 12\,288 & -9\,216 & -12\,288 & 9\,216 \end{bmatrix}$$

Alínea b)

DESLOCAMENTOS

Nó 1: $\Delta 1 = -2 \times 10^{-3} \text{ m}$ Nó 2: $\Delta 3 = ?$ Nó 3: $\Delta 5 = 0$ Nó 4: $\Delta 7 = -3,053 \times 10^{-3} \text{ m}$
 $\Delta 2 = ?$ $\Delta 4 = 0$ $\Delta 6 = -6,507 \times 10^{-3} \text{ m}$ $\Delta 8 = 0$

Vetor dos deslocamentos: $\Delta =$

$$\begin{bmatrix} -2 \times 10^{-3} \\ \Delta 2 \\ \Delta 3 \\ 0 \\ 0 \\ -6,507 \times 10^{-3} \\ -3,053 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

FORÇAS EXTERIORES

Nó 1: $F 1 = 0$ Nó 2: $F 3 = -10 \text{ kN}$ Nó 3: $F 5 = 0$ Nó 4: $F 7 = -30 \times 0,6 = -18 \text{ kN}$
 $F 2 = -15 \text{ kN}$ $F 4 = 0$ $F 6 = -28 \text{ kN}$ $F 8 = -30 \times 0,8 = -24 \text{ kN}$

Vetor das forças: $F =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ -28 \\ -18 \\ -24 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

$$\left[K_G \right] \times \left[\Delta_G \right] = \left[F_G \right] + \left[R_G \right]$$

K_G - Estrutura								x	Δ_G	=	F_G	+	R_G
1	2	3	4	5	6	7	8		1		1		1
14 400	4 800	-8 000	0	-6 400	-4 800	0	0		-0.002		0		R1
4 800	9 600	0	0	-4 800	-3 600	0	-6 000		$\Delta 2$		-15		0
-8 000	0	14 400	-4 800	0	0	-6 400	4 800		$\Delta 3$		-10		0
0	0	-4 800	7 440	0	-3 840	4 800	-3 600		0		0		R4
-6 400	-4 800	0	0	12 525	4 800	-6 125	0		0		0		R5
-4 800	-3 600	0	-3 840	4 800	7 440	0	0		-0.006507		-28		0
0	0	-6 400	4 800	-6 125	0	12 525	-4 800		-0.003053		-18		0
0	-6 000	4 800	-3 600	0	0	-4 800	9 600		0		-24		R8

Linha 2

$$4\,800 \times (-0,002) + 9\,600 \times \Delta 2 - 3\,600 \times (-0,006507) = -15$$

$$\Delta 2 = -0,003003 = -3,003 \times 10^{-3} \text{ m} = -3,003 \text{ mm} \downarrow$$

Linha 7

$$-6\,400 \times \Delta 3 + 12\,525 \times (-0,003053) = -18$$

$$\Delta 3 = -0,003162 = -3,162 \times 10^{-3} \text{ m} = -3,162 \text{ mm} \leftarrow$$

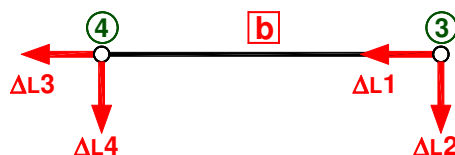
Alínea c)

$$\left[K_L^b \right] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra b: $E = 20 \times 10^6 \text{ kPa}$; $A = 3,5 \times 3,5 \times 10^{-4} = 12,25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$; $L = 4 \text{ m}$

$$\frac{EA}{L} = \frac{20 \times 10^6 \times 12,25 \times 10^{-4}}{4} = 6125$$

$$\left[K_L^b \right] = \begin{bmatrix} \Delta L1 & \Delta L2 & \Delta L3 & \Delta L4 \\ 6125 & 0 & -6125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6125 & 0 & 6125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta L1 \\ \Delta L2 \\ \Delta L3 \\ \Delta L4 \end{matrix}$$



$$\Delta L1 = -\Delta 5 = 0$$

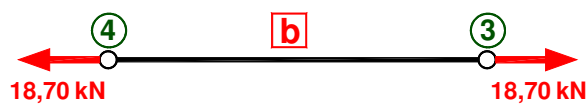
$$\Delta L2 = -\Delta 6 = -(-6,507 \times 10^{-3}) = 6,507 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta L3 = -\Delta 7 = -(-3,053 \times 10^{-3}) = 3,053 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta L4 = -\Delta 8 = 0$$

$$\begin{bmatrix} F_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\,125 & 0 & -6\,125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6\,125 & 0 & 6\,125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 6,507 \times 10^{-3} \\ 3,053 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18,70 \\ 0 \\ 18,70 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Na **barra b** está a atuar um esforço de tração de **18,70 kN**.

