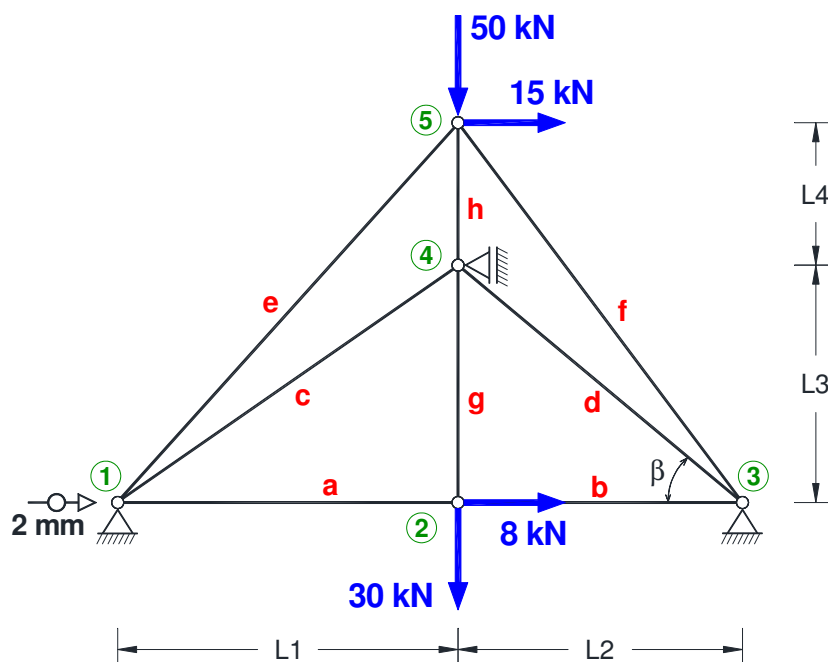


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS DOS NÓS



EXAME DE 12/JULHO/2011

SISTEMA ARTICULADO PLANO (SAP)

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO PROPOSTO (EXAME 12/JULHO/2011)

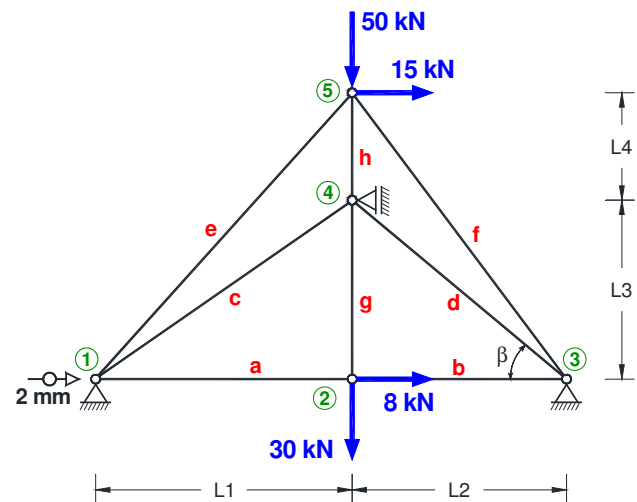
Considere a estrutura articulada representada na figura e toda a informação que seguidamente se apresenta.

Todas as barras da estrutura apresentam secções diferentes e poderão também ser constituídas por diferentes materiais.

Para todas as barras assuma que $i < j$, sendo i e j as numerações dos nós da barra, e os ângulos dos eixos das barras medidos em torno do nó i .

Faça uso da formulação matricial do **Método dos Deslocamentos dos Nós**.

Ângulo $\beta = 39,806^\circ$



$$\text{Barra a : } [K_L^a] = \begin{bmatrix} 10\,000 & 0 & -10\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10\,000 & 0 & 10\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz de rigidez – sistema de eixos local})$$

$$\text{Barra c : } [K_G^c] = \begin{bmatrix} 4\,533,765 & 3\,778,137 & -4\,533,765 & -3\,778,137 \\ 3\,778,137 & 3\,148,448 & -3\,778,137 & -3\,148,448 \\ -4\,533,765 & -3\,778,137 & 4\,533,765 & 3\,778,137 \\ -3\,778,137 & -3\,148,448 & 3\,778,137 & 3\,148,448 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz de rigidez – sist. eixos global})$$

$$\text{Barra d : } [K_L^d] = \begin{bmatrix} 7\,682,213 & 0 & -7\,682,213 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7\,682,213 & 0 & 7\,682,213 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz de rigidez – sistema de eixos local})$$

$$\text{Barra f : } [K_G^f] = \begin{bmatrix} 2\,160 & -2\,880 & -2\,160 & 2\,880 \\ -2\,880 & 3\,840 & 2\,880 & -3\,840 \\ -2\,160 & 2\,880 & 2\,160 & -2\,880 \\ 2\,880 & -3\,840 & -2\,880 & 3\,840 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz de rigidez – sistema de eixos global})$$

$$\text{Barra h : } [K_L^h] = \begin{bmatrix} 20\,000 & 0 & -20\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20\,000 & 0 & 20\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{matriz de rigidez – sistema de eixos local})$$

Matriz de rigidez da estrutura

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	16 693,765	6 658,137	-10 000	0	0	0	-4 533,765	-3 778,137	-2 160	-2 880
2	6 658,137	6 988,448	0	0	0	0	-3 778,137	-3 148,448	-2 880	-3 840
3	-10 000	0	20 000	0	-10 000	0	0	0	0	0
4	0	0	0	12 000	0	0	0	-12 000	0	0
5	0	0	-10 000	0	16 693,765	-6 658,137	-4 533,765	3 778,137	-2 160	2 880
6	0	0	0	0	-6 658,137	6 988,448	3 778,137	-3 148,448	2 880	-3 840
7	-4 533,765	-3 778,137	0	0	-4 533,765	3 778,137	9 067,530	0	0	0
8	-3 778,137	-3 148,448	0	-12 000	3 778,137	-3 148,448	0	38 296,896	0	-20 000
9	-2 160	-2 880	0	0	-2 160	2 880	0	0	4 320	0
10	-2 880	-3 840	0	0	2 880	-3 840	0	-20 000	0	27 680

- a) Determine a matriz de rigidez da barra **d** no referencial global: K_G^d .
- b) Determine a matriz de rigidez da barra **e** no referencial global: K_G^e .
- c) Considere a seguinte informação adicional: Deslocamento horizontal do nó **2**: 1,400 mm →
Deslocamento vertical do nó **5**: 4,917 mm ↓
Determine os restantes deslocamentos dos nós da estrutura.
- d) Determine a reação vertical no apoio do nó **3** e as reações no apoio do nó **4**, usando apenas o número necessário de equações.

RESOLUÇÃO

- MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS LOCAL: K_L

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO: T

e

- MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO TRANSPONDA: T^T

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

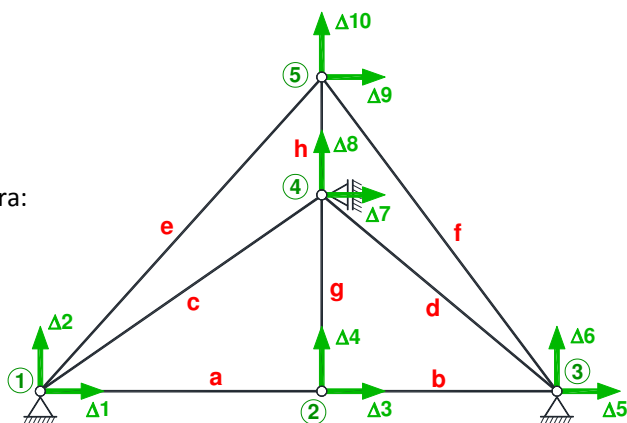
$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

• **MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS GLOBAL: K_G**

$$[K_G] = [T]^T [K_L] [T]$$

Alínea a)

Graus de liberdade associados aos nós da estrutura:



Contribuição de cada uma das barras na matriz de rigidez global da estrutura:

$$[K_G^{EST}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a+c+e & & a & & \bar{0} & & c & & e \\ & a+b+g & & b & & g & & \bar{0} \\ \bar{0} & & b & & b+d+f & & d & & f \\ c & & g & & d & & c+d+g+h & & h \\ e & & \bar{0} & & f & & h & & e+f+h \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Matriz de rigidez global da **barra d**: $[K_G^d] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -X & & X \\ & -X & & \\ X & & & -X \end{bmatrix} \end{matrix}$

X: retirar da matriz de rigidez global da estrutura $[K_G^{EST}]$

Matriz de rigidez global da **barra d**: $[K_G^d] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4\,533,765 & -3\,778,137 & -4\,533,765 & 3\,778,137 \\ -3\,778,137 & 3\,148,448 & 3\,778,137 & -3\,148,448 \\ -4\,533,765 & 3\,778,137 & 4\,533,765 & -3\,778,137 \\ 3\,778,137 & -3\,148,448 & -3\,778,137 & 3\,148,448 \end{bmatrix} \end{matrix}$

Alínea b)

Matriz de rigidez global da **barra e**:
$$\begin{bmatrix} K_G^e \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -X & & & X \\ & & & \\ & & & \\ X & & & -X \end{bmatrix} \end{matrix}$$

X: retirar da matriz de rigidez global da estrutura $\begin{bmatrix} K_G^{EST} \end{bmatrix}$

Matriz de rigidez global da **barra e**:
$$\begin{bmatrix} K_G^e \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2\,160 & 2\,880 & -2\,160 & -2\,880 \\ 2\,880 & 3\,840 & -2\,880 & -3\,840 \\ -2\,160 & -2\,880 & 2\,160 & 2\,880 \\ -2\,880 & -3\,840 & 2\,880 & 3\,840 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Alínea c)

Deslocamento horizontal do nó 2: 1,400 mm $\rightarrow$ $\Rightarrow \Delta 3 = 1,4 \times 10^{-3}$ m

Deslocamento vertical do nó 5: 4,917 mm $\downarrow$ $\Rightarrow \Delta 10 = -4,917 \times 10^{-3}$ m

APOIOS Nó 1: $\Delta 1 = 2 \times 10^{-3}$ m $\rightarrow$
 $\Delta 2 = 0$

Nó 3: $\Delta 5 = 0$
 $\Delta 6 = 0$

Nó 4: $\Delta 7 = 0$

K _G - Estrutura										*	Δ _G	=	F _G	+	R _G	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
1	16 693,765	6 658,137	-10 000	0	0	0	-4 533,765	-3 778,137	-2 160	-2 880	1	2.0E-3	1	0	1	R1
2	6 658,137	6 988,448	0	0	0	0	-3 778,137	-3 148,448	-2 880	-3 840	2	0	2	0	2	R2
3	-10 000	0	20 000	0	-10 000	0	0	0	0	0	3	1.4E-3	3	8	3	0
4	0	0	0	12 000	0	0	0	-12 000	0	0	4	Δ4	4	-30	4	0
5	0	0	-10 000	0	16 693,765	-6 658,137	-4 533,765	3 778,137	-2 160	2 880	5	0	5	0	5	R5
6	0	0	0	0	-6 658,137	6 988,448	3 778,137	-3 148,448	2 880	-3 840	6	0	6	0	6	R6
7	-4 533,765	-3 778,137	0	0	-4 533,765	3 778,137	9 067,530	0	0	0	7	0	7	0	7	R7
8	-3 778,137	-3 148,448	0	-12 000	3 778,137	-3 148,448	0	38 296,896	0	-20 000	8	Δ8	8	0	8	0
9	-2 160	-2 880	0	0	-2 160	2 880	0	0	4 320	0	9	Δ9	9	15	9	0
10	-2 880	-3 840	0	0	2 880	-3 840	0	-20 000	0	27 680	10	-4,917E-3	10	-50	10	0

K _G - Estrutura										*	Δ _G	=	F _G	+	R _G	
	3	4	8	9	10	1	2	5	6	7						
3	20 000	0	0	0	0	-10 000	0	-10 000	0	0	3	1.4E-3	3	8	3	0
4	0	12 000	-12 000	0	0	0	0	0	0	0	4	Δ4	4	-30	4	0
8	0	-12 000	38 296,896	0	-20 000	-3 778,137	-3 148,448	3 778,137	-3 148,448	0	8	Δ8	8	0	8	0
9	0	0	0	4 320	0	-2 160	-2 880	-2 160	2 880	0	9	Δ9	9	15	9	0
10	0	0	-20 000	0	27 680	-2 880	-3 840	2 880	-3 840	0	10	-4.917E-3	10	-50	10	0
1	-10 000	0	-3 778,137	-2 160	-2 880	16 693,765	6 658,137	0	0	-4 533,765	1	2.0E-3	1	0	1	R1
2	0	0	-3 148,448	-2 880	-3 840	6 658,137	6 988,448	0	0	-3 778,137	2	0	2	0	2	R2
5	-10 000	0	3 778,137	-2 160	2 880	0	0	16 693,765	-6 658,137	-4 533,765	5	0	5	0	5	R5
6	0	0	-3 148,448	2 880	-3 840	0	0	-6 658,137	6 988,448	3 778,137	6	0	6	0	6	R6
7	0	0	0	0	0	-4 533,765	-3 778,137	-4 533,765	3 778,137	9 067,530	7	0	7	0	7	R7

Como só temos 3 incógnitas, só precisamos de 3 equações:

K _G - Estrutura										*	Δ _G	=	F _G	+	R _G	
	3	4	8	9	10	1	2	5	6	7						
4	0	12 000	-12 000	0	0	0	0	0	0	0	3	1.4E-3	4	-30	4	0
8	0	-12 000	38 296,896	0	-20 000	-3 778,137	-3 148,448	3 778,137	-3 148,448	0	4	Δ4	8	0	8	0
9	0	0	0	4 320	0	-2 160	-2 880	-2 160	2 880	0	8	Δ8	9	15	9	0
											9	Δ9				
											10	-4.917E-3				
											1	2.0E-3				
											2	0				
											5	0				
											6	0				
											7	0				

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 12\,000 & -12\,000 & 0 \\ -12\,000 & 38\,296,896 & 0 \\ 0 & 0 & 4\,320 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta 4 \\ \Delta 8 \\ \Delta 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 20\,000 \times (-4.917E-3) + 3\,778,137 \times 2.0E-3 \\ 15 + 2\,160 \times 2.0E-3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta 4 \text{ (nó 2)} = -7.093 \times 10^{-3} \text{ m} = -7.093 \text{ mm} \downarrow$$

$$\Delta 8 \text{ (nó 4)} = -4.593 \times 10^{-3} \text{ m} = -4.593 \text{ mm} \downarrow$$

$$\Delta 9 \text{ (nó 5)} = 4.472 \times 10^{-3} \text{ m} = 4.472 \text{ mm} \rightarrow$$

Alínea d)

Reação vertical no apoio do **nó 3** $\Rightarrow$ **R6**

Vamos utilizar a linha 6 do sistema:

$K_G - Estrutura$										*	Δ_G	=	F_G	+	R_G	
	3	4	8	9	10	1	2	5	6	7						
6	0	0	-3 148,448	2 880	-3 840	0	0	-6 658,137	6 988,448	3 778,137	3	1.4E-3	6	0	6	R6
											4	-7.093E-3				
											8	-4.593E-3				
											9	4.472E-3				
											10	-4.917E-3				
											1	2.0E-3				
											2	0				
											5	0				
											6	0				
											7	0				

$$R6 = -3\,148.448 \times (-4.593E-3) + 2\,880 \times 4.472E-3 - 3\,840 \times (-4.917E-3)$$

$$R6 = 46.22 \text{ kN } \uparrow$$

Reação no apoio do **nó 4** $\Rightarrow$ **R7** (reação horizontal)

Vamos utilizar a linha 7 do sistema:

$K_G - Estrutura$										*	Δ_G	=	F_G	+	R_G	
	3	4	8	9	10	1	2	5	6	7						
7	0	0	0	0	0	-4 533,765	-3 778,137	-4 533,765	3 778,137	9 067,530	3	1.4E-3	7	0	7	R7
											4	-7.093E-3				
											8	-4.593E-3				
											9	4.472E-3				
											10	-4.917E-3				
											1	2.0E-3				
											2	0				
											5	0				
											6	0				
											7	0				

$$R7 = -4\,533.765 \times 0.002$$

$$R7 = -9.068 \text{ kN } \leftarrow$$