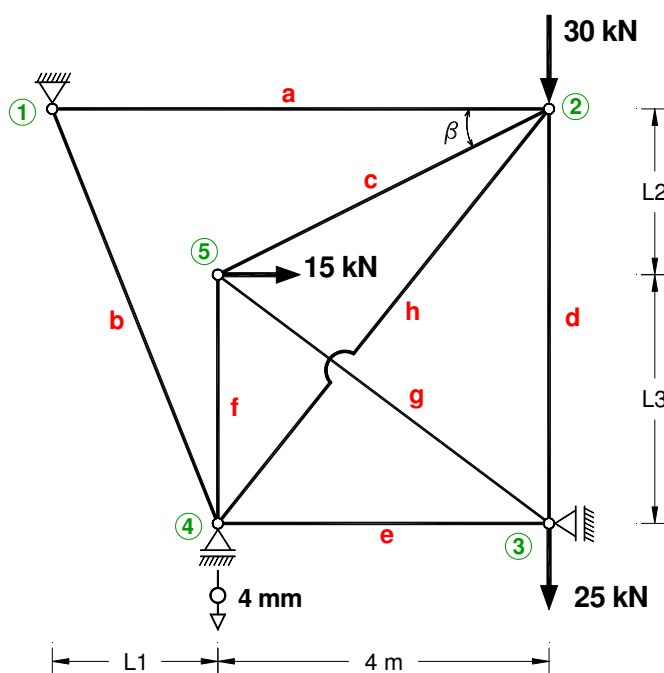


LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

TEORIA DE ESTRUTURAS

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS DOS NÓS



EXAME DE 22/JULHO/2011

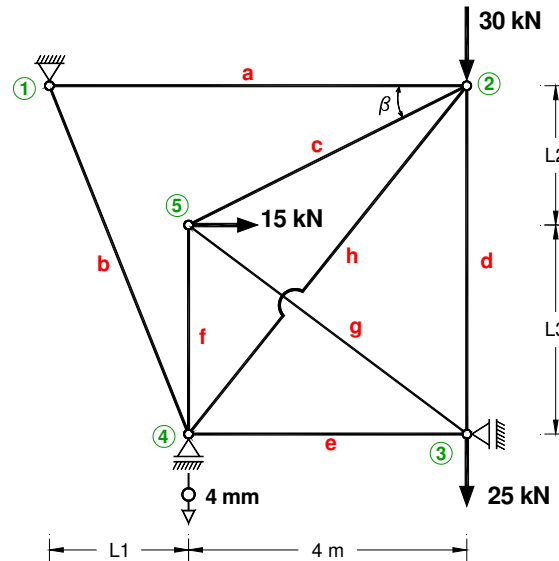
SISTEMA ARTICULADO PLANO (SAP)

ISABEL ALVIM TELES

EXERCÍCIO PROPOSTO (EXAME 22/JULHO/2011)

Considere a estrutura articulada representada na figura e toda a informação que abaixo se apresenta.

Ângulo $\beta = 26,565^\circ$



Todas as barras da estrutura apresentam secções diferentes e poderão também ser constituídas por diferentes materiais.

Para todas as barras assuma que $i < j$, sendo i e j as numerações dos nós da barra, e os ângulos dos eixos das barras medidos *em torno do nó i*.

Faça uso da formulação matricial do **Método dos Deslocamentos dos Nós**.

Barra e : Área = 10 cm² E = 100 GPa

$$\text{Barra c : } \left[K_L^c \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 11\,180,340 & 0 & -11\,180,340 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -11\,180,340 & 0 & 11\,180,340 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{matriz de rigidez – sistema de eixos local})$$

$$\text{Barra d : } \left[K_L^d \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 10\,000 & 0 & -10\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -10\,000 & 0 & 10\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{matriz de rigidez – sistema de eixos local})$$

$$\text{Barra f : } \left[K_L^f \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 33\,333,333 & 0 & -33\,333,333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -33\,333,333 & 0 & 33\,333,333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{matriz de rigidez – sistema de eixos local})$$

Matriz de rigidez da estrutura (incompleta)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	67 947,324	-3 201,644			0	0			0	0
2	-3 201,644	8 004,109			0	0			0	0
3			87 800,110	19 708,601						
4			19 708,601	31 281,649						
5	0	0			50 600	-19 200				
6	0	0			-19 200	24 400				
7							38 469,829	12 034,821	0	0
8							12 034,821	60 383,023	0	-33 333,333
9	0	0					0	0	34 544,272	-14 727,864
10	0	0					0	-33 333,333	-14 727,864	49 969,401

a) Defina as sub-matrizes **A**, **B**, **C** e **D**.

b) Determine a matriz de rigidez da **barra g** no referencial global: K_G^g .

Aquando da construção, houve necessidade de proceder a uma remodelação: a estrutura manteve a sua geometria mas foi realizada utilizando barras com áreas e materiais diferentes dos inicialmente previstos.

Seguidamente apresenta-se a **matriz de rigidez da estrutura remodelada**.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	38 455,963	-12 806,575	-33 333,333	0	0	0	-5 122,630	12 806,575	0	0
2	-12 806,575	32 016,438	0	0	0	0	12 806,575	-32 016,438	0	0
3	-33 333,333	0	57 316,463	16 562,504	0	0	-6 094,586	-7 618,232	-17 888,544	-8 944,272
4	0	0	16 562,504	33 994,926	0	-20 000	-7 618,232	-9 522,790	-8 944,272	-4 472,136
5	0	0	0	0	18 900	-4 800	-12 500	0	-6 400	4 800
6	0	0	0	-20 000	-4 800	23 600	0	0	4 800	-3 600
7	-5 122,630	12 806,575	-6 094,586	-7 618,232	-12 500	0	23 717,216	-5 188,343	0	0
8	12 806,575	-32 016,438	-7 618,232	-9 522,790	0	0	-5 188,343	58 205,895	0	-16 666,667
9	0	0	-17 888,544	-8 944,272	-6 400	4 800	0	0	24 288,544	4 144,272
10	0	0	-8 944,272	-4 472,136	4 800	-3 600	0	-16 666,667	4 144,272	24 738,803

c) Determine todos os deslocamentos dos nós da estrutura remodelada, tendo em conta que já foram obtidos os seguintes deslocamentos:

Deslocamento vertical do nó **2**: 10,861 mm ↓

Deslocamento vertical do nó **3**: 11,379 mm ↓

Deslocamento horizontal do nó **4**: 3,955 mm ←

Indique claramente as direções e sentidos de todos os deslocamentos.

d) Ainda para a **estrutura remodelada**, determine a reações nos apoios do nó **3** e nó **4**, usando apenas o número necessário de equações. Indique claramente quais as direções e sentidos de todas as reações calculadas.

e) Caracterize os esforços que atuam na **barra e**, sabendo que na estrutura remodelada essa barra apresenta uma secção de 5 cm² e é constituída por um material com módulo de elasticidade de 100GPa.

RESOLUÇÃO

- MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS LOCAL: K_L**

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO: T**

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

- MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO TRANSPOSTA: T^T**

$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

- MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR – SISTEMA DE EIXOS GLOBAL: K_G**

$$[K_G] = [T]^T [K_L] [T]$$

Alínea a)

Contribuição de cada uma das barras na matriz de rigidez global da estrutura:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$a + b$		a		$\bar{0}$		b		$\bar{0}$	
2										
3	a		$a + c + d + h$		d		h		c	
4										
5	$\bar{0}$		d		$d + e + g$		e		g	
6										
7	b		h		e		$b + e + f + h$		f	
8										
9	$\bar{0}$		c		g		f		$c + f + g$	
10										

As sub-matrizes **A** e **B** são iguais e pertencem à matriz de rigidez global da **barra d**.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & \dots & & \mathbf{B} \\ \hline & & & \\ \mathbf{A} & & & \dots \end{array} \right] \end{matrix} = \mathbf{K}_G^d$$

$$[\mathbf{K}_G] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{K}_L] [\mathbf{T}]$$

$\mathbf{K}_L^d$ é um dado do exercício.

$$\alpha = -90^\circ$$

$$\mathbf{T} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \cos(-90^\circ) & \sin(-90^\circ) & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -\sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0 & 0 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \\ \hline & & \cos(-90^\circ) & \sin(-90^\circ) \\ & & -\sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{array} \right] \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \\ \hline & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_G^d = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & 0 & -1 \end{array} \right] \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 10\,000 & 0 & -10\,000 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \\ \hline & & 10\,000 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \\ \hline & & 0 & -1 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 10\,000 & 0 & -10\,000 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & 0 & 10\,000 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Sub-matrizes: $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -10\,000 \end{bmatrix}$

As sub-matrizes **C** e **D** são iguais e pertencem à matriz de rigidez global da **barra e**.

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} \Rightarrow \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & \dots & & \mathbf{D} \\ \hline & & & \\ \mathbf{C} & & & \dots \end{array} \right] \end{matrix} = \mathbf{K}_G^e$$

Barra e $\left\{ \begin{array}{l} E = 100 \times 10^6 \text{ kPa} \\ A = 10 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ L = 4 \text{ m} \\ \alpha = 180^\circ \end{array} \right.$

$$K_L^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25\,000 & 0 & -25\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25\,000 & 0 & 25\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & \sin 180^\circ & 0 & 0 \\ -\sin 180^\circ & \cos 180^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 180^\circ & \sin 180^\circ \\ 0 & 0 & -\sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = T^T$$

$$[K_G] = [T]^T [K_L] [T]$$

$$K_G^e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25\,000 & 0 & -25\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25\,000 & 0 & 25\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25\,000 & 0 & -25\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25\,000 & 0 & 25\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sub-matrizes: $C = D = \begin{bmatrix} -25\,000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Alínea b)

Contribuição da barra **g** para a $K_G^{\text{Estrutura}}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 9 & 10 \\ 5 & \begin{bmatrix} d+e+g & g \end{bmatrix} \\ 6 & \begin{bmatrix} g & c+f+g \end{bmatrix} \\ 9 & \begin{bmatrix} g & c+f+g \end{bmatrix} \\ 10 & \begin{bmatrix} g & c+f+g \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 9 & 10 \\ 5 & \begin{bmatrix} 50\,600 & -19\,200 \end{bmatrix} \\ 6 & \begin{bmatrix} -19\,200 & 24\,400 \end{bmatrix} \\ 9 & \begin{bmatrix} 34\,544,272 & -14\,727,864 \end{bmatrix} \\ 10 & \begin{bmatrix} -14\,727,864 & 49\,969,401 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$K_G^d = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} 0 & 10\,000 \end{bmatrix} \\ 5 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 6 & \begin{bmatrix} 0 & -10\,000 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$K_G^e = \begin{bmatrix} & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 25\,000 & 0 & -25\,000 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -25\,000 & 0 & 25\,000 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{G-5,5}^g = 50\,600 - K_{G-5,5}^d - K_{G-5,5}^e = 50\,600 - 0 - 25\,000 = 25\,600$$

$$K_{G-5,6}^g = -19\,200 - K_{G-5,6}^d - K_{G-5,6}^e = -19\,200 - 0 - 0 = -19\,200$$

$$K_{G-6,5}^g = K_{G-5,6}^g = -19\,200$$

$$K_{G-6,6}^g = 24\,400 - K_{G-6,6}^d - K_{G-6,6}^e = 24\,400 - 10\,000 - 0 = 14\,400$$

$$K_{G-5,9}^g = -K_{G-5,5}^g = -25\,600$$

$$K_{G-5,10}^g = -K_{G-5,6}^g = 19\,200$$

$$K_{G-6,9}^g = -K_{G-6,5}^g = 19\,200$$

$$K_{G-6,10}^g = -K_{G-6,6}^g = -14\,400$$

$$K_{G-9,5}^g = K_{G-5,9}^g = -25\,600$$

$$K_{G-9,6}^g = K_{G-6,9}^g = 19\,200$$

$$K_{G-10,5}^g = K_{G-5,10}^g = 19\,200$$

$$K_{G-10,6}^g = K_{G-6,10}^g = -14\,400$$

$$K_{G-9,9}^g = K_{G-5,5}^g = 25\,600$$

$$K_{G-9,10}^g = K_{G-5,6}^g = -19\,200$$

$$K_{G-10,9}^g = K_{G-6,5}^g = -19\,200$$

$$K_{G-10,10}^g = K_{G-6,6}^g = 14\,400$$

$$K_G^g = \begin{bmatrix} & 5 & 6 & 9 & 10 \\ 5 & 25\,600 & -19\,200 & -25\,600 & 19\,200 \\ 6 & -19\,200 & 14\,400 & 19\,200 & -14\,400 \\ 9 & -25\,600 & 19\,200 & 25\,600 & -19\,200 \\ 10 & 19\,200 & -14\,400 & -19\,200 & 14\,400 \end{bmatrix}$$

Alínea c)

Dados:	Deslocamento vertical do nó 2:	10,861 mm ↓	⇒ Δ4 = -10,861 x 10 ⁻³ m
	Deslocamento vertical do nó 3:	11,379 mm ↓	⇒ Δ6 = -11,379 x 10 ⁻³ m
	Deslocamento horizontal do nó 4:	3,955 mm ←	⇒ Δ7 = -3,955 x 10 ⁻³ m

Outros deslocamentos conhecidos: Δ1 = Δ2 = Δ5 = 0 (apoios) e Δ8 (assent. apoio, nó 4) = 4 mm ↓

Falta determinar os deslocamentos Δ3, Δ9 e Δ10.

$K_G - Estrutura$										$\Delta_G = F_G + R_G$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
38 455.963	-12 806.575	-33 333.333	0	0	0	-5 122.630	12 806.575	0	0	0	0	R1
-12 806.575	32 016.438	0	0	0	0	12 806.575	-32 016.438	0	0	0	0	R2
-33 333.333	0	57 316.463	16 562.504	0	0	-6 094.586	-7 618.232	-17 888.544	-8 944.272	$\Delta 3$	0	0
0	0	16 562.504	33 994.926	0	-20 000	-7 618.232	-9 522.790	-8 944.272	-4 472.136	-10.861E-3	-30	0
0	0	0	0	18 900	-4 800	-12 500	0	-6 400	4 800	0	0	R5
0	0	0	-20 000	-4 800	23 600	0	0	4 800	-3 600	-11.379E-3	-25	0
-5 122.630	12 806.575	-6 094.586	-7 618.232	-12 500	0	23 717.216	-5 188.343	0	0	-3.955E-3	0	0
12 806.575	-32 016.438	-7 618.232	-9 522.790	0	0	-5 188.343	58 205.895	0	-16 666.667	-0.004	0	R8
0	0	-17 888.544	-8 944.272	-6 400	4 800	0	0	24 288.544	4 144.272	$\Delta 9$	15	0
0	0	-8 944.272	-4 472.136	4 800	-3 600	0	-16 666.667	4 144.272	24 738.803	$\Delta 10$	0	0

Como só temos 3 incógnitas, só precisamos de 3 equações:

$K_G - Estrutura$										$\Delta_G = F_G + R_G$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
-33 333.333	0	57 316.463	16 562.504	0	0	-6 094.586	-7 618.232	-17 888.544	-8 944.272	0	0	0
0	0	-17 888.544	-8 944.272	-6 400	4 800	0	0	24 288.544	4 144.272	0	15	0
0	0	-8 944.272	-4 472.136	4 800	-3 600	0	-16 666.667	4 144.272	24 738.803	$\Delta 3$	0	0
										-10.861E-3		
										0		
										-11.379E-3		
										-3.955E-3		
										-0.004		
										$\Delta 9$		
										$\Delta 10$		

$$\begin{bmatrix} 57\,316.463 & -17\,888.544 & -8\,944.272 \\ -17\,888.544 & 24\,288.544 & 4\,144.272 \\ -8\,944.272 & 4\,144.272 & 24\,738.803 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta 3 \\ \Delta 9 \\ \Delta 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16\,562.504 \times (-10.861E-3) - (-6\,094.586) \times (-3.955E-3) - (-7\,618.232) \times (-0.004) \\ 15 - (-8\,944.272) \times (-10.861E-3) - 4\,800 \times (-11.379E-3) \\ -(-4\,472.136) \times (-10.861E-3) - (-3\,600) \times (-11.379E-3) - (-16\,666.667) \times (-0.004) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 57\,316.463 & -17\,888.544 & -8\,944.272 \\ -17\,888.544 & 24\,288.544 & 4\,144.272 \\ -8\,944.272 & 4\,144.272 & 24\,738.803 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta 3 \\ \Delta 9 \\ \Delta 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125.31 \\ -27.525 \\ -156.20 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta 3 \text{ (nó 2)} = 1.59 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.59 \text{ mm} \rightarrow \\ \Delta 9 \text{ (nó 5)} = 1.05 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.05 \text{ mm} \rightarrow \\ \Delta 10 \text{ (nó 5)} = -5.91 \times 10^{-3} \text{ m} = -5.91 \text{ mm} \downarrow \end{bmatrix}$$

Alínea d)

Reacção horizontal no apoio do nó 3 $\Rightarrow$ R5

Reacção vertical no apoio do nó 4 $\Rightarrow$ R8

$K_G - Estrutura$										$\Delta_G = F_G + R_G$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	5	8
0	0	0	0	18 900	-4 800	-12 500	0	-6 400	4 800	0	0	R5
12 806.575	-32 016.438	-7 618.232	-9 522.790	0	0	-5 188.343	58 205.895	0	-16 666.667	0	0	R8
										1.59 E-3		
										-10.861E-3		
										0		
										-11.379E-3		
										-3.955E-3		
										-0.004		
										1.05E-3		
										-5.91E-3		

$$R5 = -4\,800 \times (-11.379E-3) - 12\,500 \times (-3.955E-3) - 6\,400 \times 1.05E-3 + 4\,800 \times (-5.91E-3) = 68.97 \text{ kN} \rightarrow$$

$$R8 = -7\,618.232 \times 1.59 E-3 - 9\,522.790 \times (-10.861E-3) - 5\,188.343 \times (-3.955E-3) + 58\,205.895 \times (-0.004) +$$

$$-16\,666.667 \times (-5.91E-3) = -22.49 \text{ kN} \downarrow$$

Alínea e)

$$[F_L] = [K_L] [\Delta_L] = [K_L] [T] [\Delta_G]$$

Barra e (estrutura modificada)

$$E = 100 \times 10^6 \text{ kPa}$$

$$A = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$L = 4 \text{ m}$$

$$\alpha = 180^\circ$$

$$K_L^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\,500 & 0 & -12\,500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12\,500 & 0 & 12\,500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & \sin 180^\circ & 0 & 0 \\ -\sin 180^\circ & \cos 180^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 180^\circ & \sin 180^\circ \\ 0 & 0 & -\sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Barra e (nós 3 e 4)} \Rightarrow \Delta_G = \begin{bmatrix} \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -11.379\text{E-}3 \\ -3.955\text{E-}3 \\ -0.004 \end{bmatrix}$$

$$[F_L] = [K_L] [\Delta_L] = [K_L] [T] [\Delta_G]$$

$$F_L^e = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\,500 & 0 & -12\,500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12\,500 & 0 & 12\,500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -11.379\text{E-}3 \\ -3.955\text{E-}3 \\ -0.004 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -49.44 \\ 0 \\ 49.44 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na **barra e** está a atuar um esforço de tração de 49,44 kN.